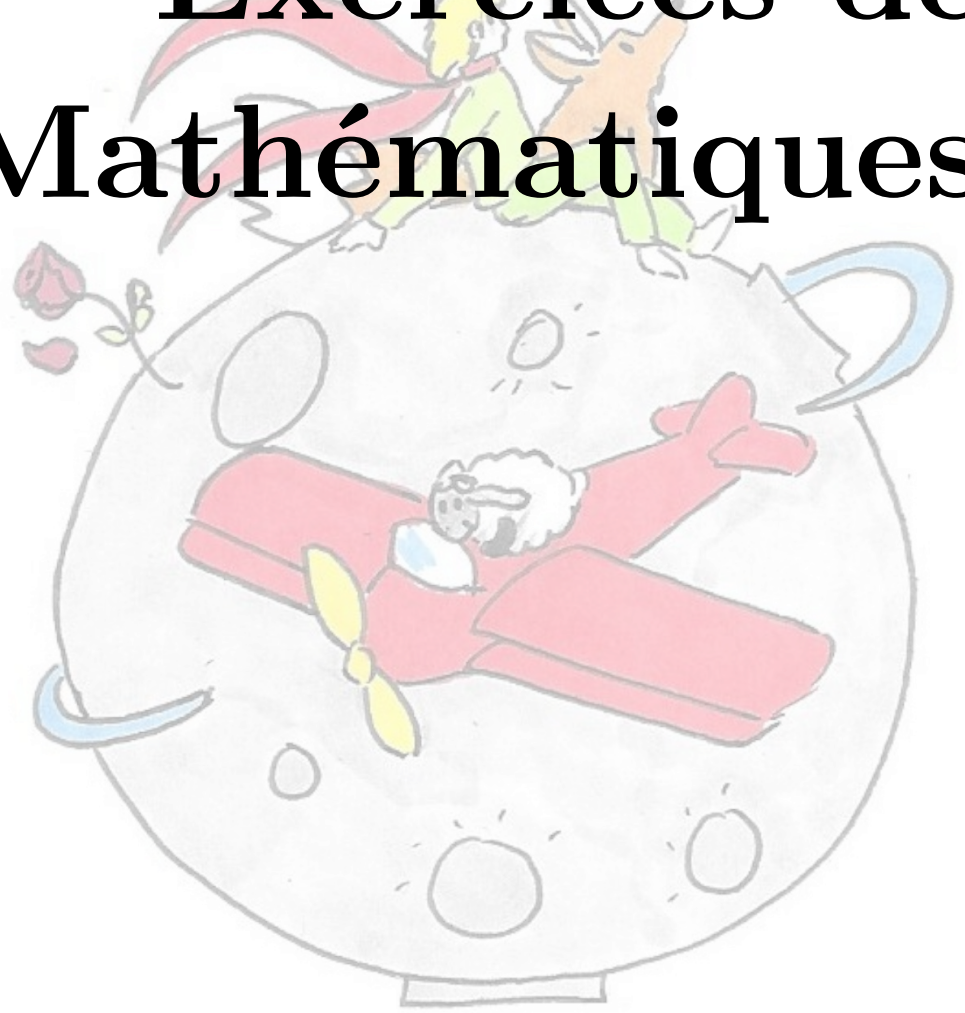
MPSI 3

Exercices de Mathématiques



2025–2026

Introduction

Présentation

Ce document regroupe les exercices de TDs de mathématiques pour la MPSI 3 de Ginette donnés durant l'année 2025-2026.

Les exercices sont regroupés par chapitre, sur chaque exercice se trouvent des symboles :

- une étoile dont le remplissage indique l'importance **subjective** de l'exercice, d'anecdotique (☆) à essentiel (★),
- une horloge dont le remplissage indique la longueur **subjective** de l'exercice, de rapide (◔) à vraiment dur (◉),
- une indication qu'il s'agit d'une propriété du cours (♣) ou ayant pu faire partie du cours (♠),
- d'autres symboles indiquant des liens avec d'autres disciplines (pour du Python, pour de la physique, etc.)

Ce recueil contient 31 chapitres, et

- **1646** exercices
- dont 1597 (97 %) accompagnés d'une indication,
- et 234 (14 %) d'une solution.

Il contient également 80 figures.

Partage

Ce recueil est un document en constante évolution.

Il est diffusé sous la licence Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0 International (CC BY-SA 4.0), ce qui signifie que vous êtes libre de partager et d'adapter le contenu, à condition de créditer l'auteur et de partager les œuvres dérivées sous la même licence.

Pour d'éventuelles questions ou des remarques (**les erreurs sont encore nombreuses**), n'hésitez pas à me contacter par mail : jean.rax.maths+polyMPSI@gmail.com

Merci à tous les élèves de MPSI 3 pour leurs nombreuses remarques ayant aidé à améliorer ce document.

Illustration de couverture : Albane Wimille

Détails techniques

- Compilé avec : `typst` 0.15.1
- Auteur : Jean Rax
- Date : 13-08-2026
- Git : `master@55fb12d`

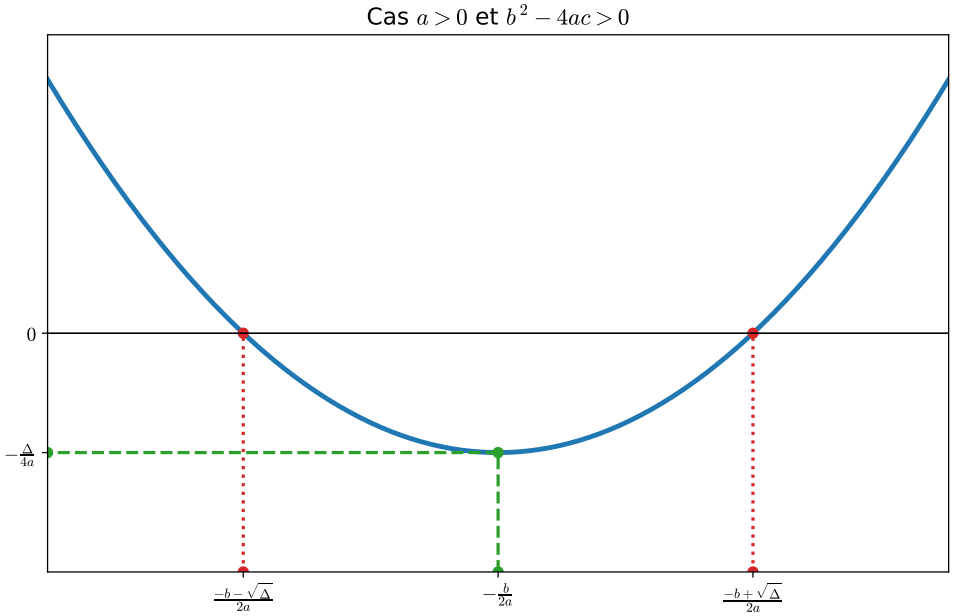
Table des matières

Trinômes 1
Logique 25
Sommes 68
Nombres Complexes 95
Binôme et Trigonométrie 119
Ensembles et Applications 138
Fonctions Usuelles 174
Relations 195
Structures Algébriques 225
Matrices sans Algèbre Linéaire 267
Arithmétique 303
Suites et Limites 380
Introduction à l'Algèbre Linéaire 468
Continuité 507
Bases et Dimension 549
Dérivabilité 557
Matrices (Retour) 593
Polynômes 623
Fractions Rationnelles 668
Intégration 685
Permutations 729
Développements Limités 764
Convexité 817
Équations Différentielles Ordinaires 863
Dénombrement 897
Déterminants 930
Séries 992
Espaces Euclidiens 1043
Probabilités et Variables Aléatoires 1067
Fonctions de Plusieurs Variables 1091
Graphes 1107

Chapitre 1

Trinômes

Énoncés 2
Essentiel: calculs à connaître 2
Digression: carrés et inégalité de Cauchy-Schwarz 5
Applications en vrac 7
Autres applications des trinômes 10
Indications 14
Solutions 20



$$aX^2+bX+c=a\left(\left(X-\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)^2-\frac{b^2-4ac}{(2a)^2}\right)$$

Énoncés

Ne pas oublier de pratiquer le cahier de calculs.

Essentiel: calculs à connaître

Exercice 1 (◔★♣ Faits sur les trinômes réels)
Soient a, b, c des réels tels que $a \neq 0$.

On pose

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto at^2 + bt + c. \end{aligned}$$

1. Dresser sans justification le tableau de variations de f.

   On distinguera selon la valeur de a.
2. Dresser sans justification le tableau de signes de f.

   On distinguera selon les valeurs de a et de $b^2 - 4ac$.

Indication p. 14 · Solution p. 20

Exercice 2 (◔★ Un ingrédient critique de plusieurs preuves)
Soient a, b, c des réels tels que $a \neq 0$.

Montrer que **si** pour tout $x \in \mathbb{R}$, $ax^2 + bx + c \geq 0$ **alors** $b^2 - 4ac \leq 0$.

Indication p. 14

Exercice 3 (◔★♠ Cosinus et sinus hyperboliques)
1. Montrer que pour tout $y \in \mathbb{R}$ il existe une et unique solution à l'équation

   $$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = y$$

   d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

   Expliciter cette solution en fonction de y.
2. Déterminer selon $y \in \mathbb{R}$ le nombre de solutions de l'équation

   $$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = y$$

   d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

   Expliciter ces solutions éventuelles en fonction de y.

Indication p. 14 · Solution p. 22

Exercice 4 (◔★ Une inégalité paramétrique)
Soit η un réel strictement positif.

Montrer que pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$

$$|ab| \leq \eta a^2 + \frac{1}{4\eta} b^2.$$

Indication p. 14

Exercice 5 (◔★ Extraction de racines complexes)
(Fera partie du **cours** du chapitre de nombres complexes.)

1. Soient $\rho \in \mathbb{R}_+^*$ et $\varphi \in \mathbb{R}$.

Déterminer (sous forme exponentielle) tous les $z \in \mathbb{C}$ tels que

$$z^2 = \rho e^{i\varphi}.$$

2. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

On cherche à déterminer (sous forme algébrique) tous les $z \in \mathbb{C}$ tels que

$$z^2 = \alpha + i\beta.$$

2.1. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que

$$(a+ib)^2 = \alpha + i\beta \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} a^2 - b^2 = \alpha \\ a^2 + b^2 = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \end{cases} \\ \text{et} \\ ab \text{ de même signe que } \beta. \end{cases}$$

2.2. Conclure, c'est à dire déterminer (sous forme algébrique) tous les $z \in \mathbb{C}$ tels que

$$z^2 = \alpha + i\beta.$$

Remarque: la formule fera intervenir une disjonction de cas.

Indication p. 14

Exercice 6 (◔★ Tangente hyperbolique)
Déterminer selon $y \in \mathbb{R}$ le nombre de solutions de l'équation

$$\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = y$$

d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Expliciter ces solutions éventuelles en fonction de y.

Indication p. 15

Exercice 7 (◔★ Un petit calcul à connaître)

1. Déterminer le maximum et représenter graphiquement la fonction

$$\begin{aligned}\mathbb{R} &\to \mathbb{R}\\ x &\mapsto x(1-x).\end{aligned}$$

2. Soient $a < b$ deux réels.

Déterminer le maximum et représenter graphiquement la fonction

$$\begin{aligned}\mathbb{R} &\to \mathbb{R}\\ x &\mapsto (x-a)(b-x).\end{aligned}$$

Indication p. 15

Exercice 8 (◔★ Encore une petite inégalité à connaître)

1. Montrer que pour tout $x > 0$ réel strictement positif,

$$x + \frac{1}{x} \geq 2.$$

2. Soient a et b deux réels strictement positifs.

Montrer que pour tout réel $x > 0$,

$$ax + \frac{b}{x} \geq 2\sqrt{ab}.$$

Indication p. 15

Exercice 9 (◔★ Équation d'un cercle)

Soient a, b, c des réels.

Montrer que le lieu des points M de coordonnées (x, y) vérifiant

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

est

- ▷ un cercle si $a^2 + b^2 - 4c > 0$,
- ▷ un point si $a^2 + b^2 - 4c = 0$,
- ▷ l'ensemble vide si $a^2 + b^2 - 4c < 0$,

et déterminer son centre et son rayon dans le premier cas.

Indication p. 15

Exercice 10 (◔★♣ Le début des relations coefficients-racines)
Soient s et p deux nombres complexes.

Soient x_1, x_2 deux nombres complexes.

Montrer que

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = s \\ x_1 \times x_2 = p. \end{cases}$$

si et seulement si x_1 et x_2 sont les deux racines (éventuellement doubles) du trinôme

$$X^2 - sX + p.$$

Indication p. 15

Digression: carrés et inégalité de Cauchy-Schwarz

On rappelle qu'étant donnés $a_1, a_2, ..., a_n$ des nombres on note

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + ... + a_n.$$

Si vous manquez d'habitude avec le symbole "$\sum$« utilisez des $\cdots$.

L'inégalité de Cauchy-Schwarz fera partie du **cours** de plusieurs chapitres (dont celui d'espaces euclidiens).

Exercice 11 (◑★ Une démonstration paramétrique d'un cas particulier de Cauchy-Schwarz: variation de la norme selon une droite)
Soient $n \in \mathbb{N}$, $(a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$ et $(b_1, ..., b_n) \in \mathbb{R}^n$ deux familles de n réels.

On définit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (a_k + tb_k)^2 \end{array}$$

1. Expliquer pourquoi,

$$\text{pour tout } t \in \mathbb{R}, f(t) \geq 0.$$

2. Déterminer $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tels que

$$\text{pour tout } t \in \mathbb{R}, f(t) = \alpha t^2 + \beta t + \gamma.$$

3. En déduire que

$$\left| \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (a_k)^2} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (b_k)^2}$$

Indication p. 16

Exercice 12 (◑★ Une démonstration paramétrique d'un cas particulier de Cauchy-Schwarz: optimisation d'une inégalité locale)
Soient $n \in \mathbb{N}$, $(a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$ et $(b_1, ..., b_n) \in \mathbb{R}^n$ deux familles de n réels.

1. Montrer que pour tout $\eta > 0$,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq \eta \sum_{k=1}^{n} (a_k)^2 + \frac{1}{4\eta} \sum_{k=1}^{n} (b_k)^2$$

2. Soit $(A, B) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$.

Montrer que la fonction

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_+^* &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ \eta &\longmapsto A\eta + \frac{1}{\eta} B \end{aligned}$$

admet un minimum sur $\mathbb{R}_+^*$ et le déterminer.

3. En déduire que

$$\left| \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (a_k)^2} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (b_k)^2}$$

Indication p. 16

Exercice 13 (◑☆ Encore une autre démonstration d'un cas particulier de Cauchy-Schwarz: par normalisation)
Soient $n \in \mathbb{N}$ et $(a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$ et $(b_1, ..., b_n) \in \mathbb{R}^n$ deux familles de n réels non identiquement nulles.

On pose

$$A = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} \quad \text{et} \quad B = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}.$$

1. Montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{a_k}{A} - \frac{b_k}{B} \right)^2 \geq 0.$$

2. En déduire que

$$\left| \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (a_k)^2} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (b_k)^2}.$$

3. Commenter le lien entre la question 1 et l'exercice 11.

Indication p. 16

Exercice 14 (◑☆ Encore une autre démonstration d'un cas particulier de Cauchy-Schwarz: par calcul de somme double)
Soient $n \in \mathbb{N}$ et $(a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$ et $(b_1, ..., b_n) \in \mathbb{R}^n$ deux familles de n réels.

1. Montrer que

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right) = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 + \sum_{1\leq i<j\leq n} \left(a_i b_j - a_j b_i\right)^2.$$

2. En déduire que

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (a_k)^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} (b_k)^2}.$$

3. Commenter géométriquement l'égalité précédente dans le cas $n = 2$.

Indication p. 16

Applications en vrac

Exercice 15 (◔☆ Applications directes)

1. Mettre sous forme canonique le trinôme du second degré suivant:

$$-X^2 - \sqrt{8}X + 4.$$

2. Représenter graphiquement le graphe d'équation

$$y = \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{2}.$$

3. Déterminer l'ensemble des solutions réelles de l'équation

$$x(x^3 - 2x) = 3.$$

4. Déterminer, si il existe, le maximum de la fonction

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto (x-1)(3-x). \end{aligned}$$

5. Déterminer les racines complexes de

$$X^2 - 2X - i.$$

6. Représenter graphiquement le lieu des points M de coordonnées (x, y) tels que

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 \leq 0.$$

Indication p. 16

Exercice 16 (◔★ Des exemples d'équation bicarrée)

1. Déterminer tous les $z \in \mathbb{C}$ tels que

$$z^4 - 13z^2 + 36 = 0.$$

2. Déterminer tous les $z \in \mathbb{C}$ tels que

$$z^4 + 2z^2 - 3 = 0.$$

3. Déterminer les $z \in \mathbb{C}$ tels que

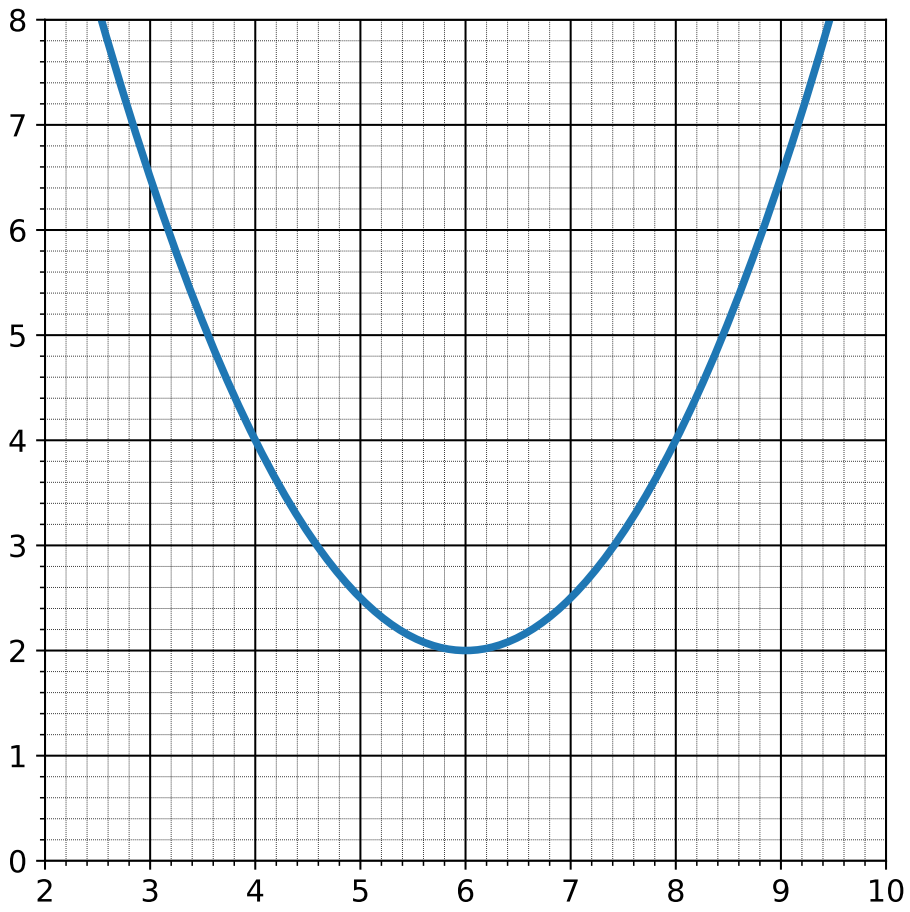
$$z^4 - 6z^2 + 25 = 0.$$

Indication p. 17

Exercice 17 (◔☆ Lecture graphique)

On admet que le graphique suivant représente une fonction trinomiale second degré.

Déterminer son expression explicite.



Indication p. 17

Exercice 18 (◔★ Construction d'exercice)
Déterminer b, c deux réels tels que le trinôme $-X^2 + bX + c$ admette -2 et $\frac{1}{2}$ comme racines.

Indication p. 17

Exercice 19 (◔☆ Somme et produit: un peu de complexes)
Déterminer l'ensemble des couples de complexes $(z, \xi) \in \mathbb{C}^2$ tels que

$$\begin{cases} z + \xi = i \\ z \times \xi = 2i. \end{cases}$$

Indication p. 17

Exercice 20 (◔★ Interpolation: cas très particulier)
Déterminer un trinôme du second degré

$$P(X) = aX^2 + bX + c$$

tel que

$$\begin{cases} P(1) = -2 \\ P(2) = -4 \\ P(3) = -4. \end{cases}$$

Indication p. 17

Exercice 21 (◔★ Calcul de racines)
Déterminer l'ensemble des racines complexes du polynôme

$$X^8 + (1 - 8i)X^5 - 8iX^2.$$

Indication p. 17

Exercice 22 (◔☆ Un encadrement)
Soient a et b deux réels de somme 2.

Montrer que leur produit est inférieur ou égal à 1.

Indication p. 17

Exercice 23 (◔★ Égalité de deux carrés)
Déterminer l'ensemble des complexes $z \in \mathbb{C}$ tels que

$$\left(2z^2+6z+1\right)^2 = \left(z^2+4z-1\right)^2$$

Indication p. 17

Autres applications des trinômes

Exercice 24 (◑★ Interpolation: cas particulier)
Soient $x_0, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ trois réels deux à deux distincts et $y_0, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ trois réels.

Montrer qu'il existe un unique triplet $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que le polynôme

$$P(X) = aX^2 + bX + c$$

vérifie

$$\begin{cases} P(x_0) = y_0 \\ P(x_1) = y_1 \\ P(x_2) = y_2. \end{cases}$$

Indication p. 18

Exercice 25 (◑☆ Le tout début des sommes de Newton)
Soient $s, p \in \mathbb{C}$ deux nombres complexes et $x_1, x_2 \in \mathbb{C}$ les deux racines (éventuellement doubles) du trinôme

$$X^2 - sX + p.$$

1. Exprimer
$$x_1^2 + x_2^2$$
en fonction de s et p.
2. Exprimer
$$x_1^3 + x_2^3$$
en fonction de s et p.

Indication p. 18

Exercice 26 (◑★ Intégration et éléments simples : le tout début)
Nécessite le chapitre d'intégration/dérivation de Terminale.

(Fera partie du **cours** de plusieurs chapitres, dont celui d'intégration.)

On admet qu'il existe une fonction $\arctan : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable telle que

$$\text{pour tout } t \in \mathbb{R}, \arctan'(t) = \frac{1}{1+t^2}.$$

1. Soit $\delta > 0$.

Déterminer l'ensemble des primitives de

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{1}{x^2+\delta^2} \end{aligned}$$

2. Soient a, b, c trois réels tels que $a \neq 0$ et $b^2 - 4ac < 0$.

Déterminer l'ensemble des primitives de

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{1}{ax^2+bx+c} \end{aligned}$$

Indication p. 18

Exercice 27 (◔☆ Trinôme et congruence)
Nécessite le chapitre d'arithmétique de Terminale.

Discuter, selon les valeurs de $(b, c) \in \mathbb{Z}^2$, l'ensemble des solutions entières de

$$x^2 + bx + c \equiv 0 \ [5]$$

d'inconnue $x \in \mathbb{Z}$.

Indication p. 18

Exercice 28 (◔★ Lien avec formes exponentielles)

1. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ un réel.

Déterminer les racines complexes du trinôme

$$X^2 - 2\cos(\theta)X + 1.$$

2. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ un réel et $r > 0$ un réel strictement positif.

Déterminer les racines complexes du trinôme

$$X^2 - 2r\cos(\theta)X + r^2.$$

Indication p. 18

Exercice 29 (◔☆ Le cas $\frac{\mathbb{Z}}{2}\mathbb{Z}$)

Nécessite le chapitre d'arithmétique de Terminale.

Déterminer toutes les équations du second degré « modulo 2 » et les résoudre.

Indication p. 18

Exercice 30 (◔★ Une généralisation de la forme canonique)

Soient a, b, c, d des réels tels que $a \neq 0$.

Montrer qu'il existe un réel x_0 et p, q des réels tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = a\Big((x - x_0)^3 + p(x - x_0) + q\Big).$$

Indication p. 18

Exercice 31 (◑★▫ Parabole de sécurité)
Soit g une constante strictement positive.

Soit v_0 un réel strictement positif.

On dit qu'un point de coordonnées (x, y) est *atteignable* ssi il existe un angle $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ tel que

$$\text{il existe } \ t \in \mathbb{R} \ \text{ tel que } \begin{cases} x = v_0 \cos(\alpha_0) t \\ y = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 \sin(\alpha_0) t. \end{cases}$$

1. Montrer qu'un point de coordonnées $(0, y)$ est atteignable ssi $y \leq \frac{v_0^2}{2g}$.
2. Montrer qu'un point de coordonnées (x, y) avec $x \neq 0$ est atteignable ssi il existe un angle α_0 tel que $\cos(\alpha_0) \neq 0$ et
$$y = -\frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_0 \cos(\alpha_0)} \right)^2 + v_0 \sin(\alpha_0) \left(\frac{x}{v_0 \cos(\alpha_0)} \right).$$
3. Conclure qu'un point de coordonnées (x, y) est atteignable ssi
$$y \leq \frac{v_0^2}{2g} - \frac{g}{2v_0^2} x^2.$$
4. Faire un schéma.

Indication p. 18

Exercice 32 (◔★▫ Un peu de Python: conditions emboîtées et calculs de flottants)
1. Écrire une fonction Python prenant en argument trois flottants a, b, c et renvoyant le nombre de solutions réelles de l'équation
$$ax^2 + bx + c = 0$$
d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
2. Tester votre programme pour `a = 1.0`, `b = 0.1`, `c = 0.0025`.

   Commenter.

Indication p. 19

Indications

Indication 1 · Énoncé p. 2 (Faits sur les trinômes réels)
Même si cela n'est pas demandé, un schéma est toujours apprécié.

1. Il y a 2 cas, $a > 0$ et $a < 0$.
2. Il y a $2 \times 3 = 6$ cas, selon le signe de a et celui de $\Delta = b^2 - 4ac$.

Solution p. 20

Indication 2 · Énoncé p. 2 (Un ingrédient critique de plusieurs preuves)
Procéder par contraposée.

Indication 3 · Énoncé p. 2 (Cosinus et sinus hyperboliques)
Remarquer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x \neq 0$ et que par conséquent

$$\frac{e^x \pm e^{-x}}{2} = y$$

ssi

$$(e^x)^2 - 2ye^x \pm 1 = 0.$$

Reconnaître un trinôme en e^x et le résoudre.

Attention au passage (logique et au niveau du calcul) de e^x vers x.

Solution p. 22

Indication 4 · Énoncé p. 3 (Une inégalité paramétrique)
Utiliser $\alpha\beta \leq \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2)$ avec α et β bien choisis ou remarquer que

$$\left(\sqrt{\eta}|a| - \frac{1}{2\sqrt{\eta}}|b|\right)^2 \geq 0.$$

Indication 5 · Énoncé p. 3 (Extraction de racines complexes)

1. Pour $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ on a

   $$r^2 e^{2i\theta} = \rho e^{i\varphi}$$

   ssi

   $$\begin{cases} r^2 = \rho \\ 2\theta \equiv \varphi \ [2\pi] \end{cases}.$$

   En déduire r (car $r > 0$) et θ modulo π.
2. Développer le carré et identifier les parties réelles et imaginaires. Faire attention aux conditions nécessaires et suffisantes entre une équation et la même équation « au carré », plus précisément pour x et y deux réels on a

$$(x = y) \Leftrightarrow (x^2 = y^2 \text{ et } x \text{ de même signe que } y).$$

Alternativement remarquer que $a^2 + b^2 = |a + ib|^2$.

On pourra se poser la question du cas particulier $\beta = 0$.

Enfin pour conclure remarquer qu'il s'agit d'un système « somme-différence » en a^2 et b^2.

Indication 6 · Énoncé p. 3 (Tangente hyperbolique)
On rappelle que pour p, q, r des réels ($q \neq 0$)

$$\frac{p}{q} = r$$

ssi

$$p = rq.$$

Se ramener ensuite à des calculs similaires à l'exercice 3.

Alternativement constater qu'il s'agit d'une équation (dite homographique) en e^{2x} et que, pour tout $(y, z) \in \mathbb{C} \setminus \{1\} \times \mathbb{C} \setminus \{-1\}$ on a

$$\frac{z-1}{z+1} = y \Leftrightarrow z = \frac{-y-1}{y-1}.$$

Indication 7 · Énoncé p. 4 (Un petit calcul à connaître)

1. On obtient $\frac{1}{4}$ atteint en $\frac{1}{2}$.
2. Par exemple se ramener au cas précédent.

Indication 8 · Énoncé p. 4 (Encore une petite inégalité à connaître)

1. De multiples méthodes équivalentes:
   - ▹ Étude de fonction,
   - ▹ inégalité arithmético-géométrique,
   - ▹ un carré est positif,
   - ▹ se ramener à un trinôme,
   - ▹ etc.
2. Les méthodes précédentes s'adaptent toutes mais le plus simple est d'utiliser le résultat précédent par homogénéité.

Indication 9 · Énoncé p. 4 (Équation d'un cercle)
Remarquer qu'en complétant les carrés,

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{a^2 + b^2 - 4c}{4}.$$

Indication 10 · Énoncé p. 5 (Le début des relations coefficients-racines)

- ▹ On obtient la somme et le produit des racines en développant $(X - x_1)(X - x_2)$.
- ▹ À partir du système non linéaire, réinjecter pour obtenir une solution du trinôme.

Indication 11 · Énoncé p. 5 (Une démonstration paramétrique d'un cas particulier de Cauchy-Schwarz: variation de la norme selon une droite)
Un carré est toujours positif et une somme de termes positifs est positive.

Déterminer ensuite α, β, γ en développant pour tout k, $(a_k + tb_k)^2$ puis en utilisant la linéarité de la somme.

Ne pas oublier de traiter le cas $\alpha = 0$.

Si $\alpha \neq 0$ il s'agit d'un trinôme du second degré de signe constant.

Que dire de son discriminant ? (cf exercice 1)

Indication 12 · Énoncé p. 6 (Une démonstration paramétrique d'un cas particulier de Cauchy-Schwarz: optimisation d'une inégalité locale)
Utiliser l'inégalité de l'exercice 4 à l'intérieur de la somme puis utiliser la linéarité de la somme.

On pourra se rappeler de l'exercice 8.

Puis prendre le $\eta > 0$ minimisant le terme de droite dans la première égalité (un tel η étant obtenu par la seconde question).

Remarquer qu'il y a une valeur absolue à la fin et montrer que cela ne change pas grand chose, et ne pas oublier les cas dégénérés.

Indication 13 · Énoncé p. 6 (Encore une autre démonstration d'un cas particulier de Cauchy-Schwarz: par normalisation)

1. Un carré est positif.
2. Développer et regrouper. Ne pas rajouter à la fin une discussion pour la valeur absolue.
3. Il s'agit en fait de la démonstration par la première méthode en choisissant dès le début le t rendant minimal l'expression $\sum_{k=1}^{n} (a_k + tb_k)^2$.

Indication 14 · Énoncé p. 7 (Encore une autre démonstration d'un cas particulier de Cauchy-Schwarz: par calcul de somme double)

1. Il suffit de développer et de traiter à part le terme « diagonal ».
2. Un carré est positif.
3. Interpréter comme le module d'un produit de nombres complexes ou bien en produits scalaires et vectoriels.

Indication 15 · Énoncé p. 7 (Applications directes)

1. Application directe du cours (cf cours).
2. Mettre sous forme canonique et représenter (cf cours).
3. Il s'agit d'une équation bicarrée: $x^4 - 2x^2 - 3 = 0$.
4. Faire une étude de la dérivée n'est pas incorrect mais n'est pas non plus nécessaire. Cf par exemple l'exercice 7.
5. Pour déterminer des racines complexes de $1 + i$, les méthodes par forme exponentielle ou par forme algébrique fonctionnent toutes les deux, cf par exemple l'exercice 5.
6. On obtient un disque, cf 9.

Indication 16 · Énoncé p. 8 (Des exemples d'équation bicarrée)
Dans chacun des cas montrer que $z \in \mathbb{C}$ est solution ssi z^2 est dans un ensemble à préciser.

Puis résoudre les équations de type $z^2 = \xi$.

Dans le dernier cas voir l'exercice 5.

Indication 17 · Énoncé p. 8 (Lecture graphique)
Il y a trois paramètres à déterminer, pour cela effectuer trois mesures (par exemple valeurs en des points bien choisis ou tangentes).

Indication 18 · Énoncé p. 9 (Construction d'exercice)
Utiliser au choix (cela est équivalent) les relations coefficients racines ou bien développer $(-1) \times (X - (-2))\big(X - \frac{1}{2}\big)$.

Indication 19 · Énoncé p. 9 (Somme et produit: un peu de complexes)
Cela revient à déterminer les racines de

$$X^2 - iX + 2i$$

c'est à dire à déterminer des racines complexes de

$$(-i)^2 - 4 \times 2i = -1 - 8i.$$

Indication 20 · Énoncé p. 9 (Interpolation: cas très particulier)
Cela équivaut à déterminer $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que

$$\begin{cases} a + b + c &= -2 \\ 4a + 2b + c = -4 \\ 9a + 3b + c = -4. \end{cases}$$

Pour résoudre ce système linéaire (cas particulier de système de Vandermonde) on peut par exemple effectuer des opérations sur les lignes.

Ne pas oublier de vérifier la solution à la fin.

Indication 21 · Énoncé p. 9 (Calcul de racines)
Aide au calcul: $16^2 + 63^2 = 65^2$.

Indication 22 · Énoncé p. 9 (Un encadrement)
De très nombreuses façons de procéder:

- IAG, $ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$
- Étude de $t \mapsto t(2-t)$
- Étude de l'existence de racines réelles de $X^2 - 2X + p$ selon la valeur de p
- etc.

Indication 23 · Énoncé p. 10 (Égalité de deux carrés)
Plutôt que d'essayer de développer, ou pire d'essayer de prendre des racines, remarquer que $A^2 = B^2$ ssi $(A - B) = 0$ ou $(A + B) = 0$.

Indication 24 · Énoncé p. 10 (Interpolation: cas particulier)
Comme pour l'exercice 20 il s'agit de montrer que le système associé admet une et unique solution.

Indication 25 · Énoncé p. 10 (Le tout début des sommes de Newton)
Utiliser l'expression explicite n'est pas une bonne idée.

Plutôt remarquer que $(x_1+x_2)^2$ s'exprime en fonction de la somme des carrés et du produit.

Indication 26 · Énoncé p. 11 (Intégration et éléments simples : le tout début)

1. Remarquer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\frac{1}{x^2+\delta^2} = \frac{1}{\delta} \times \frac{1}{\delta} \frac{1}{\left(\frac{x}{\delta}\right)^2+1}$$

et que (pour F une fonction dérivable, f une fonction et λ un réel), si $\frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x} = f(x)$ alors $\frac{\mathrm{d}F(\lambda x)}{\mathrm{d}x} = \lambda f(\lambda x)$.

2. Mettre ax^2+bx+c sous forme canonique puis se ramener à la question précédente.

Indication 27 · Énoncé p. 11 (Trinôme et congruence)
On a $3 \times 2 \equiv 1\ [5]$ et $3^2 \equiv -1\ [5]$.

Par conséquent l'équation peut se réécrire

$$(x+3b)^2 + c + b^2 \equiv 0\ [5].$$

Il reste alors à discuter selon la valeur de $-(c+b^2)$.

Indication 28 · Énoncé p. 12 (Lien avec formes exponentielles)

1. Ne pas oublier de distinguer $\theta \equiv 0[\pi]$.

2. Calcul explicite ou se ramener au précédent.

Indication 29 · Énoncé p. 12 (Le cas $\frac{\mathbb{Z}}{2}\mathbb{Z}$)
Il y a au total $2 \times 2 = 4$ équations

- $x^2+0x+0 \equiv 0\ [2]$
- $x^2+0x+1 \equiv 0\ [2]$
- $x^2+1x+0 \equiv 0\ [2]$
- $x^2+1x+1 \equiv 0\ [2]$

les résoudre individuellement.

Indication 30 · Énoncé p. 12 (Une généralisation de la forme canonique)
Procéder par analyse synthèse, ou juste par calcul direct.

Indication 31 · Énoncé p. 13 (Parabole de sécurité)

1. Dans ce cas $\alpha_0 \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$.

2. Exprimer t en fonction de x.

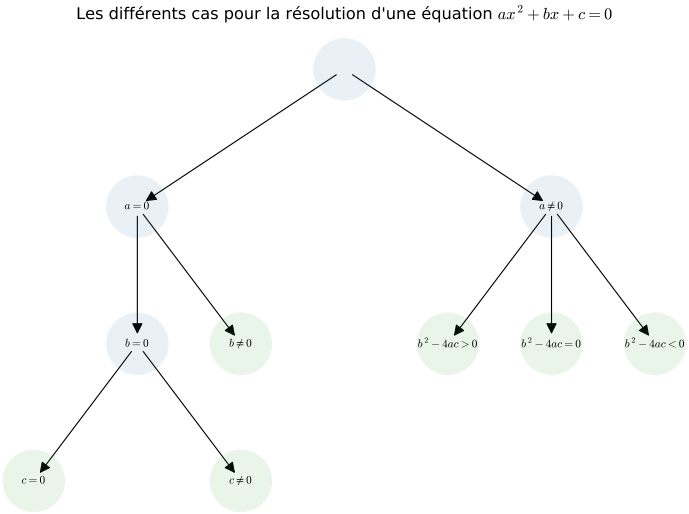
3. Remarquer que

$$\frac{1}{\cos(\alpha_0)^2} = 1 + \tan^2(\alpha_0)$$

et obtenir ainsi un trinôme du second degré en $\tan(\alpha_0)$.

Indication 32 · Énoncé p. 13 (Un peu de Python: conditions emboîtées et calculs de flottants)

1. En théorie il faut distinguer selon les cas suivants:



2. Comme `0.1` n'est pas exactement égal à $\frac{1}{10}$ (en tant que flottant), on observe que `0.1**2` $\neq$ `0.01` d'où une erreur par rapport au comportement théorique.

De manière générale tester l'égalité de deux flottants n'est jamais une bonne idée, il vaut mieux tester si leur différence est petite.

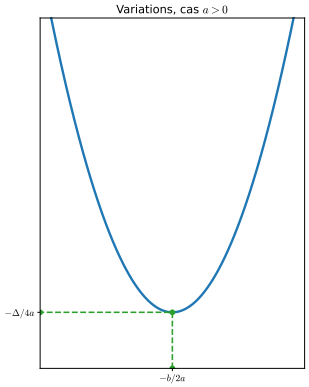
Solutions

Solution pour l'exercice 1 · Énoncé p. 2 · Indication p. 14 (Faits sur les trinômes réels)

1. On obtient

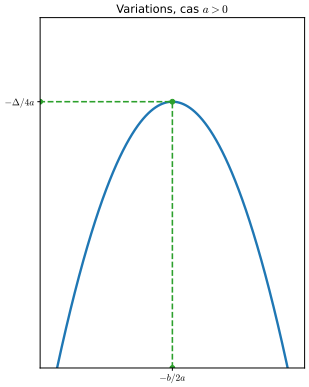
▷ Dans le cas $a > 0$,

	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{b^2-4ac}{4a}$	$\nearrow$	$+\infty$



▷ Dans le cas $a < 0$,

	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
f	$-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{b^2-4ac}{4a}$	$\searrow$	$-\infty$



Par ailleurs pour déterminer ces tableaux de variations il suffit de partir du tableau de variation de $t \mapsto t^2$ puis d'effectuer une translation pour obtenir celui de $t \mapsto \left(t - \left(-\frac{b}{2a}\right)\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}$ et ensuite une dilatation pour obtenir celui de f.

2. On obtient, en notant $\Delta = b^2 - 4ac$, selon le signe de a et le signe de Δ, 6 cas possibles.

	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
$a > 0$	(I)	(II)	(III)
$a < 0$	(IV)	(V)	(VI)

(I) Dans le cas $a > 0$ et $\Delta > 0$ le tableau de signes

t	$-\infty$		$\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$		$\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$		$+\infty$
$f(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

[Faire un schéma]

(II) Dans le cas $a > 0$ et $\Delta = 0$ le tableau de signes

t	$-\infty$		$\frac{-b}{2a}$		$+\infty$
$f(t)$		$+$	0	$+$	

[Faire un schéma]

(III) Dans le cas $a > 0$ et $\Delta < 0$ le tableau de signes

t	$-\infty$	$+\infty$
$f(t)$	$+$	

[Faire un schéma]

(IV) Dans le cas $a < 0$ et $\Delta > 0$ le tableau de signes

t	$-\infty$		$\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$		$\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$		$+\infty$
$f(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

[Faire un schéma]

(V) Dans le cas $a < 0$ et $\Delta = 0$ le tableau de signes

t	$-\infty$		$\frac{-b}{2a}$		$+\infty$
$f(t)$		$-$	0	$-$	

[Faire un schéma]

(VI) Dans le cas $a < 0$ et $\Delta < 0$ le tableau de signes

t	$-\infty$ $+\infty$
$f(t)$	$-$

[Faire un schéma]

Solution pour l'exercice 3 · Énoncé p. 2 · Indication p. 14 (Cosinus et sinus hyperboliques)

1. Soit $y \in \mathbb{R}$.

On a pour tout $x \in \mathbb{R}$ la chaîne d'équivalences, comme $e^x \neq 0$,

$$\begin{aligned}\frac{e^x - e^{-x}}{2} = y &\Leftrightarrow e^x - 2y - e^{-x} = 0\\ &\Leftrightarrow (e^x)^2 - 2ye^x - 1 = 0\\ &\Leftrightarrow e^x \text{ racine de } X^2 - 2yX - 1.\end{aligned}$$

Or le trinôme réel $X^2 - 2yX - 1$ est de discriminant $4y^2 + 4 > 0$ et de racines

$$\frac{2y \pm \sqrt{4y^2+4}}{2} = y \pm \sqrt{y^2+1}$$

et on en déduit donc que

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = y \Leftrightarrow \begin{cases} e^x = y + \sqrt{y^2+1} \\ \text{ou} \\ e^x = y - \sqrt{y^2+1} \end{cases}.$$

Or on a

$$0 \leq y^2 < y^2 + 1$$

d'où par stricte croissance de la racine,

$$|y| < \sqrt{y^2+1}$$

c'est à dire

$$\begin{aligned} y + \sqrt{y^2+1} &> 0\\ &\text{et}\\ y - \sqrt{y^2+1} &< 0.\end{aligned}$$

Par conséquent comme $\exp : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ est bijective de réciproque ln, on en déduit que l'équation $\frac{e^x - e^{-x}}{2} = y$ admet une et une seule solution donnée par

$$\boxed{x = \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right)}.$$

2. Soit $y \in \mathbb{R}$.

On a pour tout $x \in \mathbb{R}$ la chaîne d'équivalences, comme $e^x \neq 0$,

$$\begin{aligned}\frac{e^x + e^{-x}}{2} = y &\Leftrightarrow e^x - 2y + e^{-x} = 0\\ &\Leftrightarrow (e^x)^2 - 2ye^x + 1 = 0\\ &\Leftrightarrow e^x \text{ racine de } X^2 - 2yX + 1.\end{aligned}$$

Or le trinôme réel $X^2 - 2yX + 1$ est de discriminant

$$4y^2 - 4 = 4(y^2 - 1)$$

dont le signe dépend de y, contrairement au cas du sinus hyperbolique où le discriminant $4y^2 + 4$ était toujours strictement positif. On distingue donc selon la position de y par rapport à -1 et 1.

- ▹ Dans le cas $-1 < y < 1$, le discriminant est strictement négatif donc le trinôme n'admet pas de racine réelle : l'équation n'a pas de solution.
- ▹ Dans le cas $y = \pm 1$, le trinôme admet y pour racine double et donc

  $$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = y \Leftrightarrow e^x = y.$$

  Comme $e^x > 0$, l'équation n'a pas de solution si $y = -1$, et admet $x = \ln(1) = 0$ pour unique solution si $y = 1$.
- ▹ Dans le cas $|y| > 1$, le trinôme admet deux racines distinctes

  $$\frac{2y \pm \sqrt{4y^2 - 4}}{2} = y \pm \sqrt{y^2 - 1}.$$

  Or on a

  $$0 \leq y^2 - 1 < y^2$$

  d'où par stricte croissance de la racine,

  $$\sqrt{y^2 - 1} < |y|$$

  c'est à dire que $y - \sqrt{y^2 - 1}$ et $y + \sqrt{y^2 - 1}$ sont tous les deux du signe de y. (On peut aussi le voir sur leur produit, qui vaut $1 > 0$, et leur somme, qui vaut $2y$.)

  Par conséquent comme $\exp : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ est bijective de réciproque ln :

  - ▹ si $y < -1$, les deux racines sont strictement négatives et l'équation n'a pas de solution ;
  - ▹ si $y > 1$, les deux racines sont strictement positives et l'équation admet exactement deux solutions, $\ln\left(y - \sqrt{y^2 - 1}\right)$ et $\ln\left(y + \sqrt{y^2 - 1}\right)$.

En résumé, l'équation $\frac{e^x + e^{-x}}{2} = y$ admet

$$\begin{cases}\text{aucune solution} & \text{si } y<1\\ \text{l'unique solution } x=0 & \text{si } y=1\\ \text{exactement deux solutions } x=\pm\ln\left(y+\sqrt{y^2-1}\right) & \text{si } y>1.\end{cases}$$

La dernière écriture vient de ce que le produit des deux racines vaut 1, c'est à dire

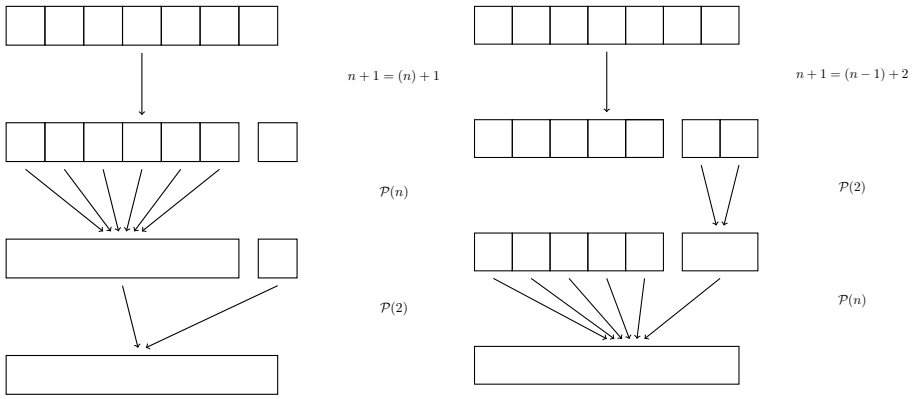
$$\ln\left(y-\sqrt{y^2-1}\right)=\ln\left(\frac{1}{y+\sqrt{y^2-1}}\right)=-\ln\left(y+\sqrt{y^2-1}\right)$$

ce qui est cohérent avec la parité de $x\mapsto\frac{e^x+e^{-x}}{2}$.

Chapitre 2

Logique

Énoncés 26
Vocabulaire mathématique 26
Méthodes de démonstration 29
Manipulations formelles 36
Indications 41
Solutions 49



$$((\mathcal{H}_1 \Rightarrow \mathcal{C}) \text{ et } (\mathcal{H}_2 \Rightarrow \mathcal{H}_1)) \Rightarrow (\mathcal{H}_2 \Rightarrow \mathcal{C})$$
$$((\mathcal{H} \Rightarrow \mathcal{C}_1) \text{ et } (\mathcal{C}_1 \Rightarrow \mathcal{C}_2)) \Rightarrow (\mathcal{H} \Rightarrow \mathcal{C}_2)$$

Énoncés

Vocabulaire mathématique

Exercice 1 (◔★♣ Formalisation des principes de preuves)
Relier chacun des principes suivants à son écriture formelle.

a. Principe de contraposée
b. Disjonction de cas
c. Double implication
d. Démonstration par l'absurde
e. Modus ponens
f. Principe de récurrence

(i) $(\mathcal{P} \text{ et } (\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q})) \Longrightarrow \mathcal{Q}$
(ii) $(\mathcal{P}_0 \text{ et } (\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}_n \Longrightarrow \mathcal{P}_{n+1})) \Longrightarrow (\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}_n)$
(iii) $(\mathcal{P} \Longleftrightarrow \mathcal{Q}) \Longleftrightarrow ((\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}) \text{ et } (\mathcal{Q} \Longrightarrow \mathcal{P}))$
(iv) $((\neg\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}) \text{ et } (\neg\mathcal{Q})) \Longrightarrow \mathcal{P}$
(v) $((\mathcal{P} \text{ ou } \mathcal{Q}) \text{ et } ((\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{R}) \text{ et } (\mathcal{Q} \Longrightarrow \mathcal{R}))) \Longrightarrow \mathcal{R}$
(vi) $(\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}) \Longleftrightarrow ((\neg\mathcal{Q}) \Longrightarrow (\neg\mathcal{P}))$

Indication p. 41

Exercice 2 (◔★ Traductions II)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction réelle.

Écrire à l'aide de quantificateurs et d'opérateurs logiques les propositions suivantes:

1. «f s'annule au moins une fois».
2. «f admet un maximum global».
3. «f est bornée».
4. «f est périodique».
5. «f s'annule au plus une fois».
6. «f est monotone».

Indication p. 41 · Solution p. 49

Exercice 3 (◔★ Unicité)
Soit E un ensemble *non vide* et $\mathcal{P}(x)$ un prédicat dépendant d'une variable $x \in E$.

1. Montrer que les deux propositions suivantes sont équivalentes
   (i) $\exists \xi \in E, \forall x \in E, (\mathcal{P}(x) \Longrightarrow x = \xi)$,
   (ii) $\forall (x_1, x_2) \in E^2, (\mathcal{P}(x_1) \text{ et } \mathcal{P}(x_2)) \Longrightarrow (x_1 = x_2)$.
2. Quelle propriété de $\mathcal{P}$ ces propositions traduisent-elles ?

Indication p. 41

Exercice 4 (◔★ Découpage de ε I)
Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes:

(i) $x = y$,
(ii) $\forall \varepsilon \geq 0, |x - y| \leq \varepsilon$,
(iii) $\forall \varepsilon > 0, |x - y| \leq \varepsilon$,
(iv) $\forall \varepsilon > 0, |x - y| < \varepsilon$.

Indication p. 41

Exercice 5 (◔★ Force et faiblesse)
Étant données deux propositions $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ on dit parfois que «$\mathcal{P}_1$ est plus fort que $\mathcal{P}_2$» si $\mathcal{P}_1 \Longrightarrow \mathcal{P}_2$.

1. Soient $\mathcal{H}$, $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ trois propositions.

On suppose $\mathcal{C}_1$ est plus fort que $\mathcal{C}_2$.

Que peut-on dire des propositions $\mathcal{H} \Longrightarrow \mathcal{C}_1$ et $\mathcal{H} \Longrightarrow \mathcal{C}_2$?

2. Soient $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ et $\mathcal{C}$ trois propositions.

On suppose $\mathcal{H}_1$ plus fort que $\mathcal{H}_2$.

Que peut-on dire des propositions $\mathcal{H}_1 \Longrightarrow \mathcal{C}$ et $\mathcal{H}_2 \Longrightarrow \mathcal{C}$?

3. Commenter.

Indication p. 41

Exercice 6 (◔★ Propriété vraie ÀPCR)
On dit qu'un prédicat $\mathcal{P}(n)$ dépendant d'un entier naturel n est vrai ÀPCR (À Partir d'un Certain Rang) ssi

$$\exists M \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq M \Longrightarrow \mathcal{P}(n).$$

1. Soient $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{Q}(n)$ deux prédicats dépendant d'un entier naturel n.

Montrer que **si** $\mathcal{P}(n)$ est vrai ÀPCR et $\mathcal{Q}(n)$ est vrai ÀPCR **alors** $\mathcal{P}(n)$ ou $\mathcal{Q}(n)$ est vrai ÀPCR.

2. Soient $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{Q}(n)$ deux prédicats dépendant d'un entier naturel n.

Montrer que **si** $\mathcal{P}(n)$ est vrai ÀPCR et $\mathcal{Q}(n)$ est vrai ÀPCR **alors** $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{Q}(n)$ est vrai ÀPCR.

Indication p. 41 · Solution p. 49

Exercice 7 (◔★ Monotonies)
Étant donnée une fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on dit que

- ▷ φ est **croissante** ssi

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x \leq y \Rightarrow \varphi(x) \leq \varphi(y),$$

- ▷ φ est **strictement croissante** ssi

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x < y \Rightarrow \varphi(x) < \varphi(y).$$

1. Montrer que toute fonction strictement croissante est croissante.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Montrer que

$$(f \text{ est croissante }) \iff (\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x) < f(y) \Rightarrow x < y).$$

Indication p. 42

Exercice 8 (◔★ Existence et unicité)
Soit E un ensemble et $\mathcal{P}(x)$ un prédicat dépendant d'une variable $x \in E$.

1. Écrire à l'aide de quantificateurs universels et existentiels la proposition:

«Il existe un unique x de E tel que $\mathcal{P}(x)$.»

2. Écrire la négation formelle de la proposition précédente.
3. On écrit parfois cette proposition

$$\exists ! x \in E, \mathcal{P}(x).$$

Commenter cette écriture.

Indication p. 42

Exercice 9 (◔★ Supremum et maximum)
Soit $A \subset \mathbb{R}$.

On dit que A

- ▷ admet un **maximum** ssi

$$\exists \alpha \in A, \forall a \in A, a \leq \alpha$$

- ▷ admet un **supremum** ssi

$$\exists \alpha \in \mathbb{R}, ((\forall a \in A, a \leq \alpha) \text{ et } (\forall M \in \mathbb{R}, (\forall a \in A, a \leq M) \Longrightarrow \alpha \leq M))$$

1. Traduire en une phrase ces deux définitions.
2. Donner un exemple de partie possédant un supremum et pas de maximum.
3. Montrer que toute partie possédant un maximum possède un supremum.

Indication p. 42

Exercice 10 (◔★ Rationnels et irrationnels)
On rappelle qu'on dit que $x \in \mathbb{R}$ est rationnel si et seulement si il existe $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tels que $x = \frac{p}{q}$.

On dit que $x \in \mathbb{R}$ est irrationnel si et seulement si il n'est pas rationnel.

1. Montrer que la somme de deux nombres rationnels est rationnelle.
2. Montrer que la somme d'un nombre rationnel et d'un nombre irrationnel est irrationnelle.
3. Donner un exemple de nombre irrationnel.
4. Que dire de la somme de deux nombres irrationnels ?

Indication p. 42

Exercice 11 (◑★ Fonctions périodiques et périodes)

1. Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, et $T > 0$.

   Écrire à l'aide de quantificateurs la proposition «f est T-périodique».
2. Soient $T > 0$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions T-périodiques.

   A-t-on nécessairement $f + g$ T-périodique ?
3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

   Écrire à l'aide de quantificateurs la proposition «f est périodique».
4. Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ périodiques.

   A-t-on nécessairement $f + g$ périodique ?
5. Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $T > 0$.

   Écrire à l'aide de quantificateurs la proposition «T est la plus petite période de f».
6. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ périodique. Existe-t-il nécessairement $T > 0$ tel que T est la plus petite période de f ?

Indication p. 42

Méthodes de démonstration

Exercice 12 (◔★♣ Tiroirs)
Soient $k \in \mathbb{N}$ et $\ell \in \mathbb{N}^*$ des entiers.

On range $k\ell + 1$ chaussettes dans ℓ tiroirs.

Montrer qu'il existe au moins un tiroir contenant (au moins) $k + 1$ chaussettes.

Indication p. 42 · Solution p. 50

Exercice 13 (◔★ Quelques démonstrations)
Démontrer les propositions suivantes:

1. $\forall n \in \mathbb{N}, (n^2 \text{ impair}) \Longrightarrow (n \text{ impair})$
2. $\forall x \in \mathbb{R}, x = \max(x, 0) - \max(-x, 0)$
3. «Si la moyenne de 48 notes est de 12 alors au moins l'une des notes est inférieure à 12.»
4. $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in]-1, +\infty[, (1+x)^n \geq 1 + nx$.
5. *(Sans utiliser la décomposition en facteurs premiers)*

   Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ il existe un unique couple $(v, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tel que q est impair et

   $$n = 2^v q.$$

6. Soit n un entier naturel. Si $2^n - 1$ est premier alors n est premier.

Indication p. 42 · Solution p. 50

Exercice 14 (◔★ Parties paires et impaires)
Étant donnée une fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on dit que

- ▷ φ est **paire** ssi

  $$\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(-x) = \varphi(x),$$

- ▷ φ est **impaire** ssi

  $$\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(-x) = -\varphi(x).$$

1. Donner un exemple de fonction paire, un exemple de fonction impaire, un exemple de fonction paire et impaire, et un exemple de fonction ni paire ni impaire.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction.

   Montrer qu'il existe deux fonctions $i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que
   - ▷ la fonction p est paire,
   - ▷ la fonction i est impaire,
   - ▷ $f = i + p$.

   Le couple (i, p) est-il unique ?

Indication p. 43

Exercice 15 (◔★ Argument d'Euclide)

1. Soient n un entier naturel et $a_1, \cdots, a_n$ des entiers naturels non nuls et différents de 1.

Montrer que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,

$$a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n + 1$$

n'est pas divisible par a_i.

2. En déduire qu'il existe une infinité de nombres premiers (c'est à dire que l'affirmation «Il existe un nombre fini de nombres premiers» est fausse).

3. On note pour tout entier naturel n, p_n le n-ième nombre premier.

Montrer que $p_n \leq 2^{2^n}$.

Indication p. 43

Exercice 16 (◑★ Quelle hypothèse de récurrence ?)

On rappelle que la fonction tangente, notée tan, de domaine de définition

$$\mathcal{D}_{\tan} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

est définie par

$$\forall x \in \mathcal{D}_{\tan}, \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

On admet que pour tout $n \in \mathbb{N}$, tan est dérivable n fois sur son ensemble de définition et on note $\tan^{(n)}$ sa dérivée n-ième.

Ainsi $\tan^{(0)} = \tan$, $\tan^{(1)} = \tan'$, $\tan^{(2)} = \tan''$, $\tan^{(3)} = \tan'''$, etc.

Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \tan^{(n)}(0) \geq 0.$$

Indication p. 43

Exercice 17 (◑☆ Un exercice complet)

Démontrer la proposition suivante:

«Toute fonction périodique et monotone est constante.»

Indication p. 43 · Solution p. 54

Exercice 18 (◕☆ Un exercice complet bis)
Soient $f_1, ..., f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des fonctions périodiques et $\ell \in \mathbb{R}$.

On suppose que

$$f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \ell.$$

Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x) = \ell.$$

Indication p. 43

Exercice 19 (◔★ Espace affine avant l'heure)
Soit $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

Montrer qu'il existe un unique couple (c, g) où $c \in \mathbb{R}$ et $g : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, tel que

$$\int_{-1}^{1} g(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

et

$$\forall x \in [-1, 1],\ f(x) = g(x) + c.$$

Indication p. 43

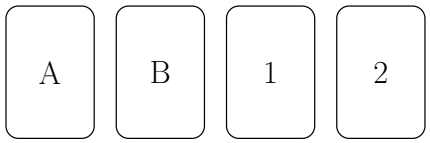
Exercice 20 (◔★ Un peu de prise d'initiative)
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} u_k. \end{cases}$$

Déterminer une expression explicite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Indication p. 44 · Solution p. 56

Exercice 21 (◔☆ Tâche de sélection de Wason)



On dispose de quatre cartes, chacune ayant une lettre sur une face et un chiffre sur l'autre face.

On dispose les cartes sur la table de telle sorte que sont visibles 4 faces : "A", "B", "1", "2".

Quelles cartes faut-il retourner pour vérifier si les cartes satisfont la propriété

« *au dos de chaque voyelle se trouve un chiffre pair* » ?

Indication p. 44

Exercice 22 (◑☆ Quelle récurrence ? III)
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_0, ..., a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que

- $a_0 < 0$
- $a_n > 0$
- il existe $p \in [\![0, n]\!]$ tel que $a_k \leq 0$ pour tout $k \leq p$ et $a_k \geq 0$ pour tout $k > p$.

Montrer que l'équation

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+$, admet une et unique solution réelle positive.

Indication p. 44

Exercice 23 (◑☆ Une question du Bac S 2003)
Déterminer tous les entiers x, y et z solutions de

$$x^2 + y^2 = 7z^2.$$

Indication p. 44 · Solution p. 57

Exercice 24 (◔★ Polynômes de Tchebychev camouflés)
Soit $z \in \mathbb{C}^*$ tel que

$$z + \frac{1}{z} \in \mathbb{Z}.$$

Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ z^n + \frac{1}{z^n} \in \mathbb{Z}.$$

Indication p. 44 · Solution p. 58

Exercice 25 (◑☆ Un oral PC: Erdős-Surányi)
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $m \in \mathbb{N}$ et $(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_m) \in \{-1, +1\}^m$ tels que

$$n = \sum_{k=1}^{m} \varepsilon_k k^2.$$

Indication p. 44 · Solution p. 59

Exercice 26 (◑★ Existence par comptage)
Soit $x \in \mathbb{R}$.

Montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, il existe $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in [\![1, N]\!]$ tels que

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{qN}.$$

Indication p. 44 · Solution p. 60

Exercice 27 (◑☆ Plusieurs façons de faire l'hérédité)
Montrer que pour tout $n \geq 3$ il existe $a_1, ..., a_n$ des entiers naturels non nuls deux à deux distincts tels que

$$1 = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}.$$

Indication p. 45

Exercice 28 (◕☆ Quelle récurrence II)
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = 2025$$

et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \begin{cases} u_n - \frac{1}{u_n} & \text{si } u_n \neq 0 \\ 0 & \text{si } u_n = 0. \end{cases}$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq 0$.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas périodique.

Indication p. 45

Exercice 29 (◔☆ Beaucoup de réels implique une proximité)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_0, ..., x_n \in [0, 1]$.

Montrer qu'il existe $i, j \in [\![0, n]\!]$ tels que $i \neq j$ et

$$|x_i - x_j| \leq \frac{1}{n}.$$

Indication p. 45

Exercice 30 (◑★ Existence sans savoir lequel)
Calculer

$$\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}.$$

En déduire qu'il existe x, y irrationnels tels que x^y est rationnel.

Indication p. 45 · Solution p. 62

Exercice 31 (◑★ Un tout petit début de bootstrap)
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 \in [0, +\infty[$$
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{n + u_n}.$$

Montrer que la suite $\left(\frac{u_n}{\sqrt{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 1.

Indication p. 45

Exercice 32 (◕★ Fejér-Jackson)
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}$ on pose

$$f_n(t) = \frac{\sin(t)}{1} + \frac{\sin(2t)}{2} + \cdots + \frac{\sin(nt)}{n}.$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\forall t \in]0, \pi[, f_n(t) > 0.$$

Indication: On pourra utiliser le fait suivant (Théorème des Bornes Atteintes)

«Toute fonction continue sur un segment admet un minimum.»

Indication p. 45 · Solution p. 62

Manipulations formelles

Exercice 33 (◔★ Négation)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

Donner la négation formelle des propositions suivantes:

1. $(\exists n \in \mathbb{N}, u_n = 0)$ ou $(\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0)$
2. «$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée»
3. $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \Longrightarrow u_n \geq 1)$
4. «$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante»
5. $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}^*, \forall p \geq N, \forall q \geq N, |u_p - u_q| \leq \varepsilon$

Indication p. 46 · Solution p. 64

Exercice 34 (◔★ Découpage de ε I bis)
Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

1. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes:
   (i) $x < y$,
   (ii) $\exists \varepsilon > 0, x + \varepsilon < y$.
2. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes:
   (i) $x \leq y$,
   (ii) $\forall \varepsilon \geq 0, x \leq y + \varepsilon$,
   (iii) $\forall \varepsilon > 0, x < y + \varepsilon$,
   (iv) $\forall \varepsilon > 0, x \leq y + \varepsilon$.

Indication p. 46

Exercice 35 (◔★ Attention aux quantificateurs I)
Pour chacune des propositions suivantes, l'écrire avec une phrase et donner sa valeur de vérité.

(i) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x \leq y$
(ii) $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, x \leq y$
(iii) $(\forall x \in \mathbb{R}, x \leq 0)$ ou $(\forall x \in \mathbb{R}, x \geq 0)$
(iv) $(\forall x \in \mathbb{R}, x \leq 0$ ou $x \geq 0)$

Commenter.

Indication p. 46

Exercice 36 (◑★ Résolution d'équations)
Résoudre les équations suivantes

1.
$$|x-1| + |x+1| = x + \frac{5}{2}$$
d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

2.
$$\sqrt{x+1} - \sqrt{2x-1} + 2\sqrt{3} = 0$$
d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

3.
$$6x^3 + 7x^2 + 17x + 10 = 0$$
d'inconnue $x \in \mathbb{Q}$.

Indication p. 46

Exercice 37 (◔★ Traduction I)
On considère la proposition suivante:

« Pour deux réels strictement positifs distincts, il existe toujours un multiple entier du plus petit strictement supérieur au plus grand. »

Comment s'écrit formellement cette proposition ?

1. $\forall (x,y) \in]0,+\infty[\times]0,+\infty[, x < y \Longrightarrow (\exists n \in \mathbb{N}, n \cdot x > y)$
2. $\forall x \in]0,+\infty[, \exists y \in]0,+\infty[, \forall n \in \mathbb{N}, n \cdot x < y$
3. $\forall (x,y) \in]0,+\infty[\times]0,+\infty[, (\forall n \in \mathbb{N}, n \cdot x > y) \Longrightarrow x < y$
4. $\forall x \in]0,+\infty[, \exists y \in]0,+\infty[, \exists n \in \mathbb{N}, n \cdot x < y$

Indication p. 47 · Solution p. 65

Exercice 38 (◑★ Propositions formelles)
Montrer que les propositions suivantes sont vraies:

1. $(\mathcal{P} \text{ et } \neg\mathcal{P}) \Longrightarrow (\mathcal{P} \text{ ou } \neg\mathcal{P})$.
2. $((\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{R}) \text{ et } (\mathcal{Q} \Longrightarrow \mathcal{R})) \Longleftrightarrow ((\mathcal{P} \text{ ou } \mathcal{Q}) \Longrightarrow \mathcal{R})$.
3. $((\neg\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}) \text{ et } (\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q})) \Longrightarrow \mathcal{Q}$.
4. $((\neg\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}) \text{ et } \neg\mathcal{Q}) \Longrightarrow \mathcal{P}$.
5. $((\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{R}) \text{ et } (\mathcal{Q} \Longrightarrow \mathcal{R}) \text{ et } (\mathcal{P} \text{ ou } \mathcal{Q})) \Longrightarrow \mathcal{R}$.

Indication p. 47 · Solution p. 65

Exercice 39 (◔★ Attention aux quantificateurs II)
Soit E une partie de $\mathbb{R}$, on considère les propositions suivantes:

(i) $\forall x \in E\ \forall y \in E\ x < y$
(ii) $\forall x \in E\ \exists y \in E\ x < y$
(iii) $\exists x \in E\ \forall y \in E\ x < y$
(iv) $\exists x \in E\ \exists y \in E\ x < y$
(v) $\forall y \in E\ \exists x \in E\ x < y$
(vi) $\exists y \in E\ \forall x \in E\ x < y$

Dans chacun des cas suivants déterminer sans justification lesquelles des propositions sont vraies.

1. $E = \mathbb{R}$
2. $E = [0, 1]$
3. $E =]0, +\infty[$
4. $E = \varnothing$
5. $E = \{0\}$
6. $E = [0, 1[$

Indication p. 47

Exercice 40 (◑★ Découpage de ε II)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in \mathbb{R}$.

Montrer que les propositions suivantes

(i) $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in \mathbb{R}, |x - a| < \eta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$
(ii) $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in \mathbb{R}, |x - a| \leq \eta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$
(iii) $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in \mathbb{R}, |x - a| < \eta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$
(iv) $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in \mathbb{R}, |x - a| \leq \eta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$
(v) $\forall \varepsilon \in]0, 1], \exists \eta > 0, \forall x \in \mathbb{R}, |x - a| < \eta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < 3\sqrt{\varepsilon}$

sont équivalentes.

Indication p. 47

Exercice 41 (◔★ Disjonction exclusive en vrac)
Étant données $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux propositions, on note

$$\mathcal{P} \text{ xor } \mathcal{Q}$$

la proposition

$$(\mathcal{P} \text{ ou } \mathcal{Q}) \text{ et } \neg(\mathcal{P} \text{ et } \mathcal{Q}).$$

1. Dresser la table de vérité de l'opérateur xor .
2. Soient $\mathcal{P}, \mathcal{Q}, \mathcal{R}$ trois propositions. Montrer que
   - ▷ $(\mathcal{P} \text{ xor } \mathcal{Q}) \text{ xor } \mathcal{R} \iff \mathcal{P} \text{ xor } (\mathcal{Q} \text{ xor } \mathcal{R})$,
   - ▷ $\mathcal{P} \text{ et } (\mathcal{Q} \text{ xor } \mathcal{R}) \iff (\mathcal{P} \text{ et } \mathcal{Q}) \text{ xor } (\mathcal{P} \text{ et } \mathcal{R})$.

Indication p. 47

Exercice 42 (◑☆ Un peu d'analyse)
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.

Considérons les propositions

$$(\mathcal{L}) : \quad \exists k \geq 0, \forall x \in I, \forall y \in I, |f(x) - f(y)| \leq k\,|x - y|$$
$$(\mathcal{U}) : \quad \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, \forall y \in I, |x - y| < \eta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$
$$(\mathcal{C}) : \quad \forall x \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall y \in I, |x - y| < \eta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Montrer que $\mathcal{L} \Longrightarrow \mathcal{U}$ et que $\mathcal{U} \Longrightarrow \mathcal{C}$.

Indication p. 47

Exercice 43 (◔☆ NAND et NOR)
Étant données $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux propositions, on note

$$\mathcal{P} \mathbin{\overline{\wedge}} \mathcal{Q} = \neg(\mathcal{P} \text{ et } \mathcal{Q})$$
$$\mathcal{P} \mathbin{\overline{\vee}} \mathcal{Q} = \neg(\mathcal{P} \text{ ou } \mathcal{Q}).$$

1. Exprimer les opérateurs logiques «¬», « et » et « ou » à l'aide uniquement de l'opérateur $\overline{\wedge}$.
2. Exprimer les opérateurs logiques «¬», « et » et « ou » à l'aide uniquement de l'opérateur $\overline{\vee}$.

Indication p. 48 · Solution p. 67

Exercice 44 (◔☆ Encore des inégalités et de la logique)
Soient $a, b \in \mathbb{R}$.

Montrer

$$(\forall x \in \mathbb{R}, x < a \implies x \leq b) \iff (a \leq b).$$

Indication p. 48

Exercice 45 (◔☆ Pseudocroissance)
On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la propriété (1) si et seulement si

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists p \in \mathbb{N}, \forall m \geq p, u_m \geq u_n. \tag{1}$$

1. Montrer que toute suite croissante vérifie la propriété $\mathcal{P}$.
2. Montrer qu'il existe une suite vérifiant la propriété $\mathcal{P}$ et qui n'est pas croissante.
3. Montrer que la somme de deux suites vérifiant la propriété $\mathcal{P}$ vérifie la propriété $\mathcal{P}$.

Indication p. 48

Exercice 46 (◔☆ Sinus est-il une fonction de cosinus ?)
Existe-t-il une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sin(x) = f(\cos(x)).$$

Indication p. 48

Indications

Indication 1 · Énoncé p. 26 (Formalisation des principes de preuves)
Cf le cours.

Indication 2 · Énoncé p. 26 (Traductions II)

1. On dit qu'une fonction s'annule si il existe un point où elle vaut 0.
2. Ne pas confondre admettre un maximum et être majorée !
3. Il existe deux caractérisations du caractère borné: majorée et minorée ou bien de valeur absolue (ou module, ou norme) majorée.
4. Une fonction est dite périodique si elle admet une période.
5. «Au plus une fois» signifie 0 ou 1 fois.
6. Monotone signifie croissante ou décroissante.

Solution p. 49

Indication 3 · Énoncé p. 26 (Unicité)

1. Pour (ii) $\Longrightarrow$ (i) procéder par exemple par contraposée, et remarquer que E non vide est une hypothèse importante.
2. Cf le titre de l'exercice.

Indication 4 · Énoncé p. 27 (Découpage de ε I)
Au lieu de montrer 4×3 implication, effectuer une chaîne d'équivalence.

Indication 5 · Énoncé p. 27 (Force et faiblesse)

1. Utiliser la transitivité de l'implication. On obtient que $\mathcal{H} \Longrightarrow \mathcal{C}_1$ est plus fort que $\mathcal{H} \Longrightarrow \mathcal{C}_2$.
2. Attention au sens. On obtient $\mathcal{H}_1 \Longrightarrow \mathcal{C}$ est plus faible (ou moins fort) que $\mathcal{H}_2 \Longrightarrow \mathcal{C}$.
3. Un théorème peut s'écrire sous forme abstraite $\mathcal{H} \Longrightarrow \mathcal{C}$ avec $\mathcal{H}$ les hypothèses et $\mathcal{C}$ les conclusions.

   Informellement, un théorème est donc « d'autant plus fort » c'est à dire d'autant plus utile que ses hypothèses sont faibles et ses conclusions sont fortes.

   Avez-vous des exemples de telles situations ?

Indication 6 · Énoncé p. 27 (Propriété vraie ÀPCR)

1. N'importe quel rang convenant pour l'un des deux convient.
2. N'importe quel rang plus grand que les deux rangs (par exemple le max) convient.

En bonus on pourra se poser la question de savoir si il est possible de généraliser à un nombre fini de prédicats (Oui dans les deux cas) et un nombre quelconque de prédicats (Oui pour la disjonction, parfois Non pour la conjonction).

Solution p. 49

Indication 7 · Énoncé p. 28 (Monotonies)
1. Regarder l'exercice 5.
2. Contraposée.

Indication 8 · Énoncé p. 28 (Existence et unicité)
Il existe un unique (parfois écrit «il existe un et unique») signifie qu'il existe x satisfaisant $\mathcal{P}$ (existence) et que si deux éléments x_1, x_2 satisfont $\mathcal{P}$ alors ce sont les mêmes (unicité).

Indication 9 · Énoncé p. 28 (Supremum et maximum)
Le supremum, si il existe (il est alors unique, pourquoi ?) est un majorant qui est plus petit que tout majorant (c'est le plus petit des majorants).

Montrer que si le maximum existe (il est alors unique, pourquoi ?) alors c'est un/le supremum.

Indication 10 · Énoncé p. 29 (Rationnels et irrationnels)
1. Somme de fractions.
2. Par l'absurde avec une soustraction.
3. Par exemple $\sqrt{2}$.
4. Cela dépend: prendre des exemples.

Indication 11 · Énoncé p. 29 (Fonctions périodiques et périodes)
1. Pour tout x dans $\mathbb{R}$, on a l'égalité entre $f(x+T)$ et $f(x)$.
2. Oui, le démontrer par rédaction automatique.
3. Il existe $T > 0$ tel que f est T-périodique.
4. Non, il faut exhiber un contre-exemple. Par exemple, est-ce possible que $t \mapsto \cos(t) + \cos\left(\sqrt{2}t\right)$ atteigne la valeur 2 en dehors de 0 ?
5. Toute période est supérieure ou égale à T et T est une période.
6. Non, que dire de la fonction indicatrice de $\mathbb{Q}$, c'est à dire valant 1 sur les rationnels et 0 sur les irrationnels ?

Indication 12 · Énoncé p. 29 (Tiroirs)
Procéder par exemple par l'absurde.

Solution p. 50

Indication 13 · Énoncé p. 30 (Quelques démonstrations)
1. Contraposée.
2. Disjonction de cas.
3. Contraposée.
4. Récurrence.
5. Récurrence forte pour l'existence.
6. Contraposée + Bernoulli.

Solution p. 50

Indication 14 · Énoncé p. 30 (Parties paires et impaires)
Procéder par Analyse-Synthèse.

Indication 15 · Énoncé p. 31 (Argument d'Euclide)

1. Regarder le reste de la division euclidienne.
2. Procéder par l'absurde et utiliser le fait que tout entier admet un diviseur premier.
3. Procéder par récurrence forte sur n.

Indication 16 · Énoncé p. 31 (Quelle hypothèse de récurrence ?)
Noter que de manière générale, la dérivée étant une notion locale et non ponctuelle, la connaissance de $f(0)$ ne donne **aucune** information sur $f'(0)$.

L'hypothèse de récurrence doit donc porter sur la fonction dérivée $\tan^{(n)}$ et non le nombre dérivé $\tan^{(n)}(0)$.

Regarder les petits cas pour conjecturer une forme de $\tan^{(n)}$.

Indication 17 · Énoncé p. 31 (Un exercice complet)
Commencer par faire un schéma.

Il y a de nombreuses façons de procéder (par sens direct, par contraposée, etc.), et dans tous les cas il est utile de remarquer que : $\forall T > 0, \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, y - nT \leq x$.

Solution p. 54

Indication 18 · Énoncé p. 32 (Un exercice complet bis)
Se ramener à $\ell = 0$.

Remarquer que le point important est que les périodes ne sont pas nécessairement les mêmes et surtout pas nécessairement commensurables.

Faire le cas d'une seule fonction et vérifier que si f est périodique alors $f(x+\tau) - f(x)$ l'est aussi quel que soit τ.

Pour la culture, on peut (à partir d'une $\mathbb{Q}$-base de $\mathbb{R}$) trouver deux fonctions périodiques f_1 et f_2 telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_1(x) + f_2(x) = x$ et donc en particulier $f_1(x) + f_2(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Indication 19 · Énoncé p. 32 (Espace affine avant l'heure)
Procéder par analyse-synthèse.

Pour l'analyse remarquer que déterminer la constante c suffit pour déterminer la fonction g et qu'une constante est entièrement déterminée par son intégrale sur un segment (non réduit à un point).

Indication 20 · Énoncé p. 32 (Un peu de prise d'initiative)
Étant donné la définition une récurrence forte est probablement adaptée.

Il reste à trouver l'expression, par exemple en regardant les premiers termes.

Une expression peut être donnée selon plusieurs cas.

Solution p. 56

Indication 21 · Énoncé p. 33 (Tâche de sélection de Wason)
Écrire sous la forme $\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$.

Indication 22 · Énoncé p. 33 (Quelle récurrence ? III)
Faire une récurrence sur non seulement le signe mais aussi le tableau de variations.

Indication 23 · Énoncé p. 33 (Une question du Bac S 2003)
Montrer que si $7|x^2+y^2$ alors $7|x$ et $7|y$.

Solution p. 57

Indication 24 · Énoncé p. 34 (Polynômes de Tchebychev camouflés)
Commencer par $n = 2, 3, ...$

Puis se rendre compte que l'on peut procéder par récurrence double.

Alternativement développer par brute force le binôme et regrouper les termes.

Solution p. 58

Indication 25 · Énoncé p. 34 (Un oral PC: Erdős-Surányi)
Remarquer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+4)^2 - (n+3)^2 - (n+2)^2 + (n+1)^2 = 4$ et procéder par récurrence d'ordre 4.

Solution p. 59

Indication 26 · Énoncé p. 34 (Existence par comptage)
Commencer par montrer qu'il existe p_1, p_2 deux entiers entre 0 et N distincts tels que

$$|\{p_1 x\} - \{p_2 x\}| < \frac{1}{N}.$$

Solution p. 60

Indication 27 · Énoncé p. 34 (Plusieurs façons de faire l'hérédité)
Pour assurer le «deux à deux distincts» imposer $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$.

Remarquer que $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$.

Pour l'hérédité, par exemple si $a_1 < \cdots < a_n$ conviennent alors

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times 1$$

ou bien

$$1 = \frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_n} \times 1$$

ou bien pour tout A,

$$\frac{1}{A} - \frac{1}{A+1} = \frac{1}{A(A+1)}.$$

Indication 28 · Énoncé p. 35 (Quelle récurrence II)

1. Montrer que $\mathbb{Q} \setminus \{-1, 0, 1\}$ est stable.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, en notant $u_n = \frac{p_n}{q_n}$ où $p_n \wedge q_n = 1$, on a $(|q_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Indication 29 · Énoncé p. 35 (Beaucoup de réels implique une proximité)
Par exemple les ordonner et faire la somme des $x_{k+1} - x_k$.

Ou bien faire un principe des tiroirs.

Indication 30 · Énoncé p. 35 (Existence sans savoir lequel)
Disjonction de cas selon le caractère rationnel ou non de $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$.

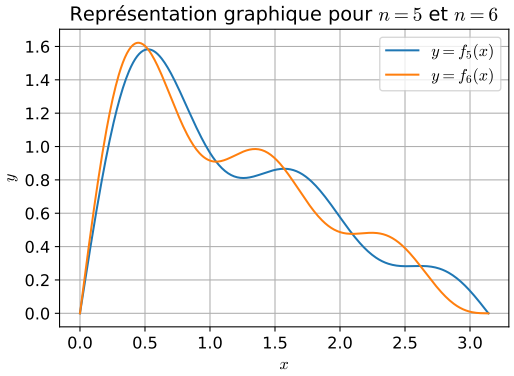
Solution p. 62

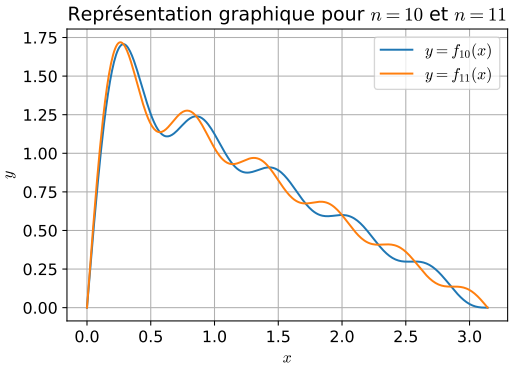
Indication 31 · Énoncé p. 35 (Un tout petit début de bootstrap)
Commencer par montrer que $\left(\frac{u_n}{\sqrt{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est borné.

Pour cela procéder par récurrence ou bien partir d'un encadrement moins précis et itérer par bootstrap.

Indication 32 · Énoncé p. 36 (Fejér-Jackson)
Avant de faire l'exercice, vérifier que vous êtes au point sur l'étude de fonctions et la trigonométrie.

Puis regarder les schémas suivants:





Pour éventuellement le traiter, montrer d'abord que pour tout $t \in]0,\pi[$ et $n \in \mathbb{N}^*$,

$$f_n'(t) = 0 \Longrightarrow f_n(t) \geq f_{n-1}(t).$$

Terminer par récurrence.

Solution p. 62

Indication 33 · Énoncé p. 36 (Négation)
Utiliser les règles de négation de manière automatique, en commençant par traduire pour les 2 et 4.

Solution p. 64

Indication 34 · Énoncé p. 36 (Découpage de ε I bis)

1. Un sens est direct, car quel que soit $\varepsilon > 0$, $y - \varepsilon < y$. Dans l'autre sens faire un schéma pour choisir un ε adapté.
2. Utiliser la contraposée de la question précédente pour une implication.

Indication 35 · Énoncé p. 37 (Attention aux quantificateurs I)
Le commentaire est que l'ordre des quantificateurs est essentiel !

Indication 36 · Énoncé p. 37 (Résolution d'équations)

1. Procéder par disjonction de cas.
2. Procéder par analyse-synthèse.

   Dans la phase d'analyse élever au carré après avoir distribué des deux côtés de l'égalité pour faire disparaître les racines.
3. Procéder par analyse-synthèse. Si $\frac{p}{q}$ est solution avec $\frac{p}{q}$ fraction irréductible, montrer que q divise 6 et p divise 10.

   Se ramener ainsi à un nombre fini de cas.

Par ailleurs ne pas hésiter à faire des schémas.

Indication 37 · Énoncé p. 37 (Traduction I)
Remarque culturelle (pas vraiment une indication): cette propriété s'appelle le caractère archimédien de $\mathbb{R}$.

Solution p. 65

Indication 38 · Énoncé p. 38 (Propositions formelles)
Pour chaque proposition il y a au moins trois manières de procéder:

- ▷ Par table de vérité
- ▷ Par calcul propositionnel
- ▷ Par rédaction mathématique

Solution p. 65

Indication 39 · Énoncé p. 38 (Attention aux quantificateurs II)
Traduire les propositions en énoncé « concret » peut aider

(i) L'ensemble est vide (pourquoi ?)
(ii) Tout élément admet un élément strictement plus grand (pouvant dépendre du premier)
(iii) Impossible (pourquoi ?)
(iv) Il existe deux éléments comparables distincts.
(v) Tout élément admet un élément strictement plus petit.
(vi) Impossible (pourquoi ?)

Indication 40 · Énoncé p. 38 (Découpage de ε II)
Commencer par traiter les exercices 4 et 34.

Indication 41 · Énoncé p. 39 (Disjonction exclusive en vrac)
Pour le deuxième point, utiliser par exemple la table de vérité précédente.

Indication 42 · Énoncé p. 39 (Un peu d'analyse)
Cet exercice est en fait un aperçu du cours sur les fonctions continues, la condition $\mathcal{L}$ est la «lipschitzité», la condition $\mathcal{U}$ l'«uniforme continuité» et la $\mathcal{C}$ la «continuité».

Pour $\mathcal{L} \Longrightarrow \mathcal{U}$, à $\varepsilon > 0$ fixé choisir un η explicite en fonction de ε et k.

Pour $\mathcal{U} \Longrightarrow \mathcal{C}$, remarquer qu'il s'agit d'une interversion toujours vraie (notion uniforme vs notion non uniforme).

Bonus: que dire des réciproques ?

Indication 43 · Énoncé p. 39 (NAND et NOR)
Commencer par exprimer $\neg$, le reste suit par les règles de calcul.

Solution p. 67

Indication 44 · Énoncé p. 40 (Encore des inégalités et de la logique)
La réciproque est immédiate.

Pour le sens direct procéder par exemple par contraposée.

Alternativement se ramener à $a = 0$ par soustraction.

Indication 45 · Énoncé p. 40 (Pseudocroissance)

1. Trouver un p en fonction de n qui convient.
2. Faire un schéma.
3. On reverra cette idée d'ÀPCR dans le chapitre de limites de suites, pour l'instant, remarquer que le max des rangs convient pour une conjonction.

Indication 46 · Énoncé p. 40 (Sinus est-il une fonction de cosinus ?)
Se demander si c'est le cas ou non car dans un cas il faudrait exhiber une telle fonction et dans l'autre montrer que ce n'est pas le cas (en prenant par exemple des valeurs particulières).

Solutions

Solution pour l'exercice 2 · Énoncé p. 26 · Indication p. 41 (Traductions II)

1. «f s'annule au moins une fois»

$$\boxed{\exists x \in \mathbb{R}, f(x) = 0}.$$

2. «f admet un maximum global»

$$\boxed{\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq f(y)}.$$

3. «f est bornée»

$$\boxed{\exists C \in \mathbb{R}_+, \forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq C}.$$

4. «f est périodique»

$$\boxed{\exists T \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in \mathbb{R}, f(x+T) = f(x)}.$$

5. «f s'annule au plus une fois»

$$\boxed{\exists a \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, (f(x) = 0 \Longrightarrow x = a)}.$$

ou alternativement

$$\boxed{\forall x_1 \in \mathbb{R}, \forall x_2 \in \mathbb{R}, (f(x_1) = 0 \text{ et } f(x_2) = 0) \Longrightarrow x_1 = x_2}.$$

6. «f est monotone»
Une option est de traduire «f est monotone» en «f est croissante ou f est décroissante» ce qui donne (attention aux quantificateurs universels qui sont **dans** les parenthèses).

$$\boxed{\begin{array}{c}(\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, (a \leq b) \Longrightarrow (f(a) \leq f(b))) \text{ ou} \\ (\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, (a \leq b) \Longrightarrow (f(a) \geq f(b)))\end{array}}.$$

Remarque: il y a évidemment d'autres écritures possibles, comme par exemple en quantifiant sur les ensembles de trois points rangés dans l'ordre croissant et sur le fait que leurs images sont ordonnées.

Solution pour l'exercice 6 · Énoncé p. 27 · Indication p. 41 (Propriété vraie ÀPCR)

1. Supposons $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{Q}(n)$ vrais ÀPCR.

Fixons $M \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq M$, $\mathcal{P}(n)$.

Alors en particulier, pour tout $n \geq M$, on a $\mathcal{P}(n)$ ou $\mathcal{Q}(n)$.

D'où $\boxed{\mathcal{P}(n) \text{ ou } \mathcal{Q}(n) \text{ est vrai ÀPCR}}$.

2. Supposons $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{Q}(n)$ vrais ÀPCR.

Fixons $M_{\mathcal{P}} \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq M_{\mathcal{P}}$, $\mathcal{P}(n)$.

Fixons $M_{\mathcal{Q}} \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq M_{\mathcal{Q}}$, $\mathcal{Q}(n)$.

Posons

$$M = \max(M_{\mathcal{P}}, M_{\mathcal{Q}}).$$

Alors (le maximum est un majorant) on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq M \Longrightarrow (n \geq M_{\mathcal{P}} \text{ et } n \geq M_{\mathcal{Q}}).$$

Soit $n \geq M$.

- ▷ Comme $n \geq M_{\mathcal{P}}$ on a $\mathcal{P}(n)$.
- ▷ Comme $n \geq M_{\mathcal{Q}}$ on a $\mathcal{Q}(n)$.

Et par conséquent $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{Q}(n)$.

On a donc bien montré $\boxed{\mathcal{P}(n) \text{ et } \mathcal{Q}(n) \text{ est vrai ÀPCR}}$.

Remarques:

- ▷ Pour la disjonction « ou » on observe qu'étant donné un rang pour chaque prédicat, n'importe quel rang plus grand qu'au moins un de ces rangs convient. Par exemple le minimum.
- ▷ Pour cette raison une disjonction quelconque de propriétés vraies ÀPCR est vraie ÀPCR: n'importe quel rang convenant pour l'une convient pour la disjonction.
- ▷ Pour la conjonction « et » on observe qu'étant donné un rang pour chaque prédicat, n'importe quel rang plus grand que tous ces rangs convient. Par exemple le maximum.
- ▷ Étant donné un nombre fini de prédicats $\mathcal{P}_1(n), ..., \mathcal{P}_N(n)$ vrais ÀPCR, si $M_1, ..., M_N$ sont des rangs correspondants, alors en prenant (par exemple) le rang $M = \max(M_1, ..., M_N)$ on observe que le prédicat $\mathcal{P}_1(n)$ et $\mathcal{P}_2(n)$ et $\cdots$ et $\mathcal{P}_N(n)$ est vrai ÀPCR.
- ▷ Pour un nombre quelconque de prédicats, ce n'est plus forcément le cas.

  Par exemple pour tout $k \in \mathbb{N}$ posons $\mathcal{P}_k(n) = «n \geq k»$. Alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_k(n)$ est vrai ÀPCR, et la conjonction de tous les $\mathcal{P}_k(n)$ ne l'est pas.
- ▷ Cette notion de propriété vraie ÀPCR sera revue dans tous les chapitres d'analyse.

Solution pour l'exercice 12 · Énoncé p. 29 · Indication p. 42 (Tiroirs)
Supposons par l'absurde qu'il n'existe pas de tiroir contenant au moins $k+1$ chaussettes.

On a donc (négation d'un quantificateur existentiel) que tout tiroir contient au plus k chaussettes.

Comme il y a ℓ tiroirs, on en déduit (somme d'inégalités) qu'il y a au plus $k \times \ell$ chaussettes.

Absurde.

On a donc bien montré qu'$\boxed{\text{il existe un tiroir contenant (au moins) } k+1 \text{ chaussettes.}}$

Ce principe est appelé **principe des tiroirs**. Il s'agit d'un « théorème d'existence » utile par exemple en combinatoire.

Solution pour l'exercice 13 · Énoncé p. 30 · Indication p. 42 (Quelques démonstrations)

1. Soit $n \in \mathbb{N}$.

On procède par contraposée.

Supposons n pair c'est à dire 2 divise n.

Alors 2 divise n^2 c'est à dire n^2 pair.

On a donc bien montré

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, (n^2 \text{ impair}) \Longrightarrow (n \text{ impair})}.$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$.

On procède par disjonction de cas.

- ▷ Si $x \geq 0$.

  Alors $\max(x, 0) = x$ et $\max(-x, 0) = 0$.

  Et on a bien

  $$x = x - 0.$$

- ▷ Si $x \leq 0$.

  Alors $\max(x, 0) = 0$ et $\max(-x, 0) = -x$.

  Et on a bien

  $$x = 0 - (-x).$$

Dans tous les cas $x = \max(x, 0) - \max(-x, 0)$.

On a donc bien montré que

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, x = \max(x, 0) - \max(-x, 0)}.$$

3. Posons $N = 48$ et $x_1, ..., x_N$ les N notes.

On veut montrer que

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x_k = 12 \Longrightarrow \exists k \in [\![1, N]\!], x_k \leq 12.$$

On procède par contraposée.

Supposons

$$\forall k \in [\![1, N]\!], x_k > 12.$$

Alors par somme d'inégalités on a

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x_k > 12.$$

Et en particulier on a

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x_k \neq 12.$$

Par contraposée on a donc

Si la moyenne de 48 notes est de 12 alors au moins l'une des notes est inférieure à 12.

4. Soit $x > -1$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ posons

$$\mathcal{P}_n : \qquad \text{«}(1+x)^n \geq 1+nx\text{»}$$

et montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que pour tout n, $\mathcal{P}_n$.

▷ **Initialisation**

Pour $n = 0$ on a

$$(1+x)^0 = 1 \geq 1 + 0x$$

donc $\mathcal{P}_0$.

▷ **Hérédité**

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Supposons $\mathcal{P}_n$ c'est à dire

$$(1+x)^n \geq 1+nx.$$

Alors comme $(1+x) > 0$, par produit **positif** d'inégalités on obtient

$$(1+x)^n(1+x) \geq (1+nx)(1+x)$$

c'est à dire en développant

$$(1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x + nx^2.$$

Comme un carré est toujours positif, $nx^2 \geq 0$ et de l'inégalité précédente on déduit qu'en particulier

$$(1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x + 0.$$

Donc $\mathcal{P}_{n+1}$.

▷ **Conclusion**

On a montré $\mathcal{P}_0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}_n \implies \mathcal{P}_{n+1}$. Donc par récurrence on a pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$(1+x)^n \geq 1+nx.$$

Comme cela est vrai pour tout $x > -1$ on a donc

$$\boxed{\forall x \in]-1, +\infty[, \forall n \in \mathbb{N}, (1+x)^n \geq 1+nx}.$$

5. Il y a plusieurs façons de procéder (par exemple procéder par analyse synthèse et considérer $v = \max\big(\{k \in \mathbb{N} \mid 2^k \text{ divise } n\}\big)$). On propose ici une preuve avec unicité et existence séparées et une récurrence forte pour l'existence.

▷ **Unicité**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit (v_1, q_1) et (v_2, q_2) deux couples vérifiant les conditions.

Alors

$$2^{v_1} q_1 = 2^{v_2} q_2.$$

En particulier 2^{v_1} divise $2^{v_2} q_2$. Comme q_2 est impair il est premier avec 2 et donc 2^{v_1} divise 2^{v_2}. Donc

$$v_1 \leq v_2.$$

De même, par symétrie,

$$v_2 \leq v_1.$$

Par conséquent

$$v_2 = v_1.$$

De $2^{v_1} q_1 = 2^{v_2} q_2$ comme $2^{v_1} = 2^{v_2} \neq 0$ on déduit que

$$q_1 = q_2.$$

D'où l'unicité.

▷ **Existence**

On procède par récurrence forte sur $n \in \mathbb{N}^*$.

▷ **Initialisation**

On a $n = 1 = 2^0 \times 1$ et 1 impair.

▷ **Hérédité**

Soit $n \geq 2$. Supposons la propriété vérifiée pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$.

On procède par disjonction de cas.

▷ Si n est impair on a

$$n = 2^0 \times n$$

et n impair.

▷ Si n est pair soit $m \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2m$.

Comme $n > 0$ on a $m < n$ et donc (entiers) $m \leq n - 1$.

Par conséquent par hypothèse de récurrence il existe $(v, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tel que q impair et $m = 2^v q$. (Fixons ce couple).

Alors

$$n = 2^{v+1} q$$

et q impair.

Dans tous les cas la propriété est vérifiée pour n.

▷ **Conclusion**

Par récurrence forte on a montré que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ il existe un couple $(v, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tel que q impair et $n = 2^v q$.

6. On procède par contraposée.

On constate tout d'abord que $2^0-1=0$ et $2^1-1=1$ ne sont pas premiers.

Supposons que $n\geq 2$ n'est pas premier (est composé).

Il existe alors $(a,b)\in\mathbb{N}^2$ tel que $n=ab$, $a\neq 1$ et $b\neq 1$.

On a alors (identité de Bernoulli ou juste somme géométrique)

$$\begin{aligned}2^n-1&=(2^a)^b-1\\&=(2^a)^b-1^b\\&=(2^a-1)\Big(1+2^a+(2^a)^2+\cdots+(2^a)^{b-1}\Big).\end{aligned}$$

Or comme $a\neq 1$, $2^a-1\neq 1$ et comme $b\geq 2$, $1+2^a+(2^a)^2+\cdots+(2^a)^{b-1}\neq 1$.

Par conséquent (comme $2^n-1\geq 2$) 2^n-1 n'est pas premier.

On a donc bien montré par contraposée,

Si 2^n-1 est premier alors n est premier.

Solution pour l'exercice 17 · Énoncé p. 31 · Indication p. 43 (Un exercice complet)
Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction périodique et monotone.

Quitte à considérer $-f$ on peut supposer que f est croissante.

Remarque: le «Quitte à considérer $-f$ on peut supposer que f est croissante» résume l'argument suivant:

- *On commence par montrer que si f est croissante et périodique alors f est constante.*
- *On considère ensuite f une fonction monotone et périodique.*
  - *Si f est croissante et périodique alors on a déjà montré que f est constante.*
  - *Si f est décroissante, alors la fonction $-f$ est croissante et périodique, donc par ce qui précède elle est constante. Donc f est aussi constante.*

Soit $T>0$ une période de f.

Remarque: statistiquement, certaines de vos preuves seront par l'absurde. On propose dans ce qui suit une preuve par l'absurde et une preuve directe, montrant que l'absurde n'était pas nécessaire ici.

- **Version 1: par l'absurde**

  Supposons par l'absurde que f n'est pas constante.

  Il existe donc $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tels que $x\neq y$ et $f(x)\neq f(y)$.

  Quitte à intervertir x et y on peut supposer que $x<y$.

  Comme f est croissante et que $f(x)\neq f(y)$, on a donc

  $$f(x)<f(y).$$

  Posons

$$n = \left\lfloor \frac{y-x}{T} \right\rfloor + 1$$

alors, en particulier

$$n > \left(\frac{y-x}{T} - 1 \right) + 1$$

et donc comme $T > 0$,

$$nT > y - x.$$

On a alors

$$\boxed{x + nT > y}.$$

Remarque: l'expression explicite de n n'a pas d'incidence sur la suite de la preuve, seule l'inégalité $x + nT > y$ est utilisée. Néanmoins, pour montrer qu'il existe un entier n tel que $x + nT > y$, le plus simple est d'exhiber un tel entier explicite (après un calcul au brouillon)

Par croissance de f on a alors

$$f(x + nT) \geq f(y).$$

Mais par T-périodicité de f on a aussi

$$f(x + nT) = f(x).$$

On aboutit donc à une contradiction.

Donc $\boxed{f \text{ est constante}}$.

▷ **Version 2: démonstration directe** (sans raisonnement par l'absurde)

Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tq $x < y$.

Comme f est croissante, on a

$$f(x) \leq f(y).$$

Posons

$$n = \left\lfloor \frac{y-x}{T} \right\rfloor + 1.$$

Alors (même calculs que précédemment)

$$x + nT > y.$$

Par conséquent, par T-périodicité de f et croissance de f,

$$f(x) = f(x + nT) \geq f(y).$$

Par conséquent $f(x) = f(y)$.

De même, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, si $x > y$, on a $y < x$ donc $f(y) = f(x)$, et pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ si $x = y$ on a évidemment $f(x) = f(y)$.

On a donc montré

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2, f(x)=f(y)$$

c'est à dire $\boxed{f \text{ est constante}}$.

Solution pour l'exercice 20 · Énoncé p. 32 · Indication p. 44 (Un peu de prise d'initiative)

▷ **Version 1: par récurrence forte**

On calcule les premiers termes de la suite:

- ▷ $u_0 = 1$
- ▷ $u_1 = u_0 = 1$
- ▷ $u_2 = u_0 + u_1 = 1 + 1 = 2$
- ▷ $u_3 = u_0 + u_1 + u_2 = 1 + 1 + 2 = 4$
- ▷ $u_4 = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 = 1 + 1 + 2 + 4 = 8$
- ▷ $u_5 = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 1 + 1 + 2 + 4 + 8 = 16$
- ▷ $u_6 = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 = 1 + 1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 32$

et on peut donc conjecturer que pour tout $n\in\mathbb{N}$

$$u_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n=0 \\ 2^{n-1} & \text{si } n\geq 1. \end{cases}$$

Démontrons maintenant cette conjecture.

Pour $n\in\mathbb{N}$ posons

$$\mathcal{P}_n : \qquad u_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n=0 \\ 2^{n-1} & \text{si } n\geq 1. \end{cases}$$

et montrons par récurrence forte sur $n\in\mathbb{N}$ que pour tout n, $\mathcal{P}_n$.

▷ **Initialisation**

Pour $n=0$ on a

$$u_0 = 1$$

donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.

▷ **Hérédité**

Soit $n\in\mathbb{N}$ et supposons que $\forall k\in[\![0,n]\!]$, la proposition $\mathcal{P}_k$ est vraie, c'est à dire que

$$\forall k\leq n,\quad u_k = \begin{cases} 1 & \text{si } k=0 \\ 2^{k-1} & \text{si } k\geq 1. \end{cases}.$$

Calculons alors u_{n+1}.

Par définition

$$u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + \sum_{k=1}^{n} u_k$$

et donc, par hypothèse de récurrence ($u_0=1$ et $u_k = 2^{k-1}$ pour $k\geq 1$),

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 1 + \sum_{k=1}^{n} 2^{k-1} \\ &= 1 + (2^n - 1) \\ &= 2^n = 2^{(n+1)-1} \end{aligned}$$

c'est à dire $\mathcal{P}_{n+1}$.

▷ **Conclusion**

On a montré $\mathcal{P}_0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, (\forall k \leq n, \mathcal{P}_k) \Longrightarrow \mathcal{P}_{n+1}$. Donc par récurrence forte on a pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\boxed{u_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n=0 \\ 2^{n-1} & \text{si } n \geq 1 \end{cases}}.$$

▷ **Version 2: par réécriture et récurrence simple**

On a $u_0 = 1$.

D'où $u_1 = u_0 = 1$.

Soit $n \geq 1$.

On a

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \sum_{k=0}^{n} u_k \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} u_k + u_n \\ &= u_n + u_n \\ &= 2u_n. \end{aligned}$$

Par conséquent la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est une suite géométrique de raison 2 et de premier terme $u_1 = 1$.

Ainsi,

$$\forall n \geq 1, u_n = 2^{n-1} \times 1.$$

On a donc bien

$$\boxed{u_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n=0 \\ 2^{n-1} & \text{si } n \geq 1 \end{cases}}.$$

Solution pour l'exercice 23 · Énoncé p. 33 · Indication p. 44 (Une question du Bac S 2003)
On observe que $x = y = z = 0$ est solution.

Montrons que c'est la seule.

Soit $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ une solution. Quitte à intervertir x et y on peut supposer $x \neq 0$, et quitte à remplacer x par $-x$ on peut supposer $x > 0$.

On peut écrire modulo 7

$$x^2 + y^2 \equiv 0 \bmod 7.$$

Supposons que $7 \nmid x$. Comme $7 \nmid x$ et que 7 est premier, x est inversible modulo 7.

En notant ξ un inverse de x modulo 7, c'est à dire un entier tel que

$$x\xi \equiv 1 \bmod 7$$

et en multipliant par ξ^2 on en déduit

$$(\xi y)^2 \equiv -1 \bmod 7.$$

Or la table des carrés modulo 7 est:

$x \bmod 7$	0	1	2	3	4	5	6
$x^2 \bmod 7$	0	1	4	2	2	4	1

et on aboutit donc à une contradiction.

Donc pour toute solution non nulle $7 \mid x$.

Si $7 \mid x$ alors $7 \mid y$ et donc en posant $x = 7\tilde{x}$ et $y = 7\tilde{y}$ on obtient

$$7\tilde{x}^2 + 7\tilde{y}^2 = z^2$$

donc on peut écrire $z = 7\tilde{z}$. On obtient alors

$$\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 = 7\tilde{z}^2.$$

On obtient donc une solution $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ avec $0 < \tilde{x} < x$.

Par principe de **descente infinie** il n'existe pas de solution non nulle.

Remarque: ici le point clé est que -1 n'est pas carré modulo le nombre premier 7. Un résultat très classique est que -1 est un carré modulo le nombre premier impair p ssi $p \equiv 1 \bmod 4$.

Solution pour l'exercice 24 · Énoncé p. 34 · Indication p. 44 (Polynômes de Tchebychev camouflés)
Montrons par récurrence double sur $n \in \mathbb{N}$ que

$$\forall n \in \mathbb{N}, z^n + \frac{1}{z^n} \in \mathbb{Z}.$$

▷ **Initialisation**

On a bien

$$z^0 + \frac{1}{z^0} = 1 + 1 = 2 \in \mathbb{Z}$$

et par hypothèse

$$z^1 + \frac{1}{z^1} = z + \frac{1}{z} \in \mathbb{Z}.$$

▷ **Hérédité**

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Supposons $z^n + \frac{1}{z^n} \in \mathbb{Z}$ et $z^{n+1} + \frac{1}{z^{n+1}} \in \mathbb{Z}$.

On a

$$\left(z^{n+1}+\frac{1}{z^{n+1}}\right)\left(z+\frac{1}{z}\right)=z^{n+2}+z^n+\frac{1}{z^n}+\frac{1}{z^{n+2}}.$$

Ce qui peut se réécrire

$$z^{n+2}+\frac{1}{z^{n+2}}=\underbrace{\left(z^{n+1}+\frac{1}{z^{n+1}}\right)}_{\in\mathbb{Z}}\underbrace{\left(z+\frac{1}{z}\right)}_{\in\mathbb{Z}}-\underbrace{\left(z^n+\frac{1}{z^n}\right)}_{\in\mathbb{Z}}.$$

Et comme $\mathbb{Z}$ est stable par produit et différence, on conclut que

$$z^{n+2}+\frac{1}{z^{n+2}}\in\mathbb{Z}.$$

▷ **Conclusion**

On a donc montré que $z^0+\frac{1}{z^0}\in\mathbb{Z}$ et $z^1+\frac{1}{z^1}\in\mathbb{Z}$ et que pour tout $n\in\mathbb{N}$, si $z^n+\frac{1}{z^n}\in\mathbb{Z}$ et $z^{n+1}+\frac{1}{z^{n+1}}\in\mathbb{Z}$ alors $z^{n+2}+\frac{1}{z^{n+2}}\in\mathbb{Z}$.

Par récurrence double on a donc

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}, z^n+\tfrac{1}{z^n}\in\mathbb{Z}}.$$

Remarque: on a en fait montré l'existence d'une suite de polynômes à coefficients entiers, $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}\in(\mathbb{Z}[X])^{\mathbb{N}}$ tels que

$$\forall n\in\mathbb{N}, z^n+\frac{1}{z^n}=P_n\left(z+\frac{1}{z}\right).$$

Ces polynômes vérifient la relation de récurrence : $P_0=2$, $P_1=X$ et

$$\forall n\in\mathbb{N}, P_{n+2}(X)=XP_{n+1}(X)-P_n(X).$$

Ils sont fortement liés aux polynômes de Tchebychev, $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définis par $T_0=1$, $T_1=X$ et

$$\forall n\in\mathbb{N}, T_{n+2}(X)=2XT_{n+1}(X)-T_n(X).$$

(Cf DM dédié aux polynômes de Tchebychev) Cela n'est pas une surprise car pour $\theta\in\mathbb{R}$ et $z=e^{i\theta}$ on a

$$\left(e^{i\theta}\right)^n+\frac{1}{\left(e^{i\theta}\right)^n}=2\cos(n\theta)$$

tandis que

$$T_n(\cos(\theta))=\cos(n\theta).$$

Solution pour l'exercice 25 · Énoncé p. 34 · Indication p. 44 (Un oral PC: Erdős-Surányi)
On constate tout d'abord que pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$(n+4)^2-(n+3)^2-(n+2)^2+(n+1)^2=4.$$

Ainsi pour tout $M\in\mathbb{N}$, si il existe $n\in\mathbb{N}$ et $(\varepsilon_k)_{k\in[\![0,n]\!]}\in\{-1,1\}^{n+1}$ tels que

$$M = \sum_{k=0}^{n} \varepsilon_k k^2$$

on a

$$M + 4 = \sum_{k=0}^{n+4} \tilde{\varepsilon_k} k^2$$

en posant

$$\begin{aligned} \forall k \in [\![0, n]\!], \tilde{\varepsilon_k} &= \varepsilon_k \\ \widetilde{\varepsilon_{n+1}} &= 1 \\ \widetilde{\varepsilon_{n+2}} &= -1 \\ \widetilde{\varepsilon_{n+3}} &= -1 \\ \widetilde{\varepsilon_{n+4}} &= 1. \end{aligned}$$

De plus

$$\begin{aligned} 0 &= 0 \\ 1 &= 1^2 \\ 2 &= -1^2 - 2^2 - 3^2 + 4^2 \\ 3 &= -1^2 + 2^2 \end{aligned}$$

et donc par **récurrence d'ordre 4** on peut bien écrire tout entier naturel de cette manière.

[À rédiger en détails]

Solution pour l'exercice 26 · Énoncé p. 34 · Indication p. 44 (Existence par comptage)
Tout d'abord pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\{t\} \in [0, 1[$.

On constate ensuite que

$$[0, 1[= \bigcup_{k=0}^{N-1} [\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N}[.$$

(Faire un schéma)

Il y a donc N intervalles de la forme $[\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N}[$ pour $k \in [\![0, N-1]\!]$ (les «tiroirs») et $N+1$ nombres $\{0\}, \{x\}, \{2x\}, ..., \{Nx\}$ (les «chaussettes») qui sont tous dans $[0, 1[$.

Par principe des tiroirs il existe donc $k \in [\![0, N-1]\!]$ et $p_1, p_2 \in [\![0, N]\!]$ tels que $p_1 \neq p_2$ et

$$\begin{aligned} \{p_1 x\} &\in [\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N}[\\ \{p_2 x\} &\in [\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N}[. \end{aligned}$$

En particulier on a

$$|\{p_1 x\} - \{p_2 x\}| < \frac{1}{N}.$$

En effet on a

$$\begin{aligned} \frac{k}{N} \leq \{p_1 x\} &< \frac{k+1}{N} \\ -\frac{k+1}{N} < -\{p_2 x\} &\leq -\frac{k}{N} \end{aligned}$$

et par conséquent

$$-\frac{1}{N} < \{p_1 x\} - \{p_2 x\} < \frac{1}{N}$$

et de même

$$-\frac{1}{N} < \{p_2 x\} - \{p_1 x\} < \frac{1}{N}.$$

Il existe donc $p_1, p_2 \in [\![0, N]\!]$ tels que $\boxed{p_1 \neq p_2}$ et

$$\boxed{|\{p_1 x\} - \{p_2 x\}| < \tfrac{1}{N}}.$$

(Fixons de tels entiers.)

On a donc, par définition de la partie fractionnaire,

$$|(p_1 x - \lfloor p_1 x \rfloor) - (p_2 x - \lfloor p_2 x \rfloor)| < \frac{1}{N}$$

ce qui peut se réécrire

$$|(p_1 - p_2)x - (\lfloor p_1 x \rfloor - \lfloor p_2 x \rfloor)| < \frac{1}{N}.$$

Quitte à les intervertir on peut supposer que $p_1 > p_2$, posons alors

$$q = p_1 - p_2.$$

Comme

$$\begin{aligned} 0 \leq p_1 \leq N \\ 0 \leq p_2 \leq N \end{aligned}$$

et $p_1 \neq p_2$ on a alors

$$\boxed{q \in [\![1, N]\!]}.$$

Et comme $q > 0$, de l'inégalité précédente on déduit que

$$\left| x - \frac{\lfloor p_1 x \rfloor - \lfloor p_2 x \rfloor}{p_1 - p_2} \right| < \frac{1}{|p_1 - p_2| N}$$

c'est à dire, en posant

$$\boxed{p = \lfloor p_1 x \rfloor - \lfloor p_2 x \rfloor} \in \mathbb{Z},$$

on a bien

$$\boxed{\left|x-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{qN}}.$$

Solution pour l'exercice 30 · Énoncé p. 35 · Indication p. 45 (Existence sans savoir lequel)
On a

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} &= \sqrt{2}^{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}\\ &= \sqrt{2}^{2}\\ &= 2.\end{aligned}$$

On sait de plus que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

On procède par disjonction de cas.

- Si $\sqrt{2}^{\sqrt{2}} \in \mathbb{Q}$.

  Alors avec $x=\sqrt{2}$ et $y=\sqrt{2}$ on a bien x, y irrationnels tels que $x^y \in \mathbb{Q}$.
- Si $\sqrt{2}^{\sqrt{2}} \notin \mathbb{Q}$.

  Alors avec $x=\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ et $y=\sqrt{2}$ on a bien x, y irrationnels tels que $x^y \in \mathbb{Q}$.

Dans tous les cas $\boxed{\text{il existe } x, y \text{ irrationnels tels que } x^y \text{ est rationnel}}$.

Solution pour l'exercice 32 · Énoncé p. 36 · Indication p. 45 (Fejér-Jackson)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in]0,\pi[$.

On a f_n dérivable (fonctions trigonométriques usuelles) et pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$f_n'(t) = \sum_{k=1}^{n} \cos(kt).$$

Comme $t \in]0,\pi[$ on a $e^{it} \neq 1$, et donc par somme géométrique et angle moitié

$$\begin{aligned}f_n'(t) &= \sum_{k=1}^{n} \cos(kt)\\ &= \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Re}\big(e^{ikt}\big)\\ &= \mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{n} e^{ikt}\right)\\ &= \mathrm{Re}\left(e^{it}\frac{1-e^{int}}{1-e^{it}}\right)\\ &= \mathrm{Re}\left(e^{i(\frac{n}{2}-\frac{1}{2}+1)t}\frac{-2i\sin\left(\frac{n}{2}t\right)}{-2i\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\right)\\ &= \frac{\cos\left(\frac{n+1}{2}t\right)\sin\left(\frac{n}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\end{aligned}$$

par conséquent

$$f_n'(t) = 0 \iff \left(\cos\left(\frac{n+1}{2}t\right) = 0 \text{ ou } \sin\left(\frac{n}{2}t\right) = 0\right)$$

c'est à dire

$$f_n'(t) = 0 \iff \left(\frac{n+1}{2}t \equiv \frac{\pi}{2}[\pi] \text{ ou } \frac{n}{2}t \equiv 0[\pi]\right)$$

ce qui équivaut à

$$f_n'(t) = 0 \iff (nt \equiv \pi - t[2\pi] \quad \text{ou} \quad nt \equiv 0[2\pi]).$$

Supposons $f_n'(t) = 0$.

On procède par disjonction de cas,

- Si $nt \equiv 0[2\pi]$ alors $\sin(nt) = 0$. Et en particulier $\sin(nt) \geq 0$.
- Si $nt \equiv \pi - t[2\pi]$ alors $\sin(nt) = \sin(\pi - t)$ et comme $\pi - t \in]0, \pi[$ on a $\sin(\pi - t) > 0$. Et en particulier $\sin(nt) \geq 0$.

Dans tous les cas $\boxed{\sin(nt) \geq 0}$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ notons désormais

$$\mathcal{H}_n : \forall t \in]0, \pi[, f_n(t) > 0.$$

- **Initialisation**

  Pour $n = 1$, on a pour tout $t \in]0, \pi[$, $f_1(t) = \sin(t) > 0$.

  D'où $\boxed{\mathcal{H}_1}$.
- **Hérédité**

  Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et supposons $\mathcal{H}_n$.

  La fonction f_{n+1} étant continue sur le segment $[0, \pi]$ elle est bornée et atteint ses bornes par le théorème des bornes atteintes.

  En particulier elle admet un minimum.

  Soit $\xi \in [0, \pi]$ tel que

  $$f_{n+1}(\xi) = \min_{t \in [0,\pi]} (f_{n+1}(t)).$$

  Supposons par l'absurde que le minimum est atteint en un point intérieur, c'est à dire qu'il existe $\xi \in]0, \pi[$ tel que

  $$f_{n+1}(\xi) = \min_{t \in [0,\pi]} (f_{n+1}(t)).$$

  Comme f_{n+1} est dérivable sur $[0, \pi]$ et admet un minimum en le point intérieur $\xi \in]0, \pi[$ on en déduit

  $$f_{n+1}'(\xi) = 0.$$

  Par le point précédent on a par conséquent

  $$\sin((n+1)\xi) \geq 0.$$

Et donc,

$$f_{n+1}(\xi) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(k\xi)}{k} + \frac{\sin((n+1)\xi)}{n+1} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(k\xi)}{k} = f_n(\xi).$$

Et par hypothèse de récurrence $f_n(\xi) > 0$.

Or

$$f_{n+1}(0) = f_{n+1}(\pi) = 0.$$

On aboutit donc à une contradiction.

Le minimum est donc atteint en 0 et π et uniquement en ces points.

En particulier on a bien

$$\forall t \in]0, \pi[, f_{n+1}(t) > 0$$

ce qui est bien $\boxed{\mathcal{H}_{n+1}}$.

▷ **Conclusion**

On a montré $\mathcal{H}_1$ et $(\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathcal{H}_n \Longrightarrow \mathcal{H}_{n+1})$, par récurrence on a donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in]0, \pi[, \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kt)}{k} > 0}.$$

Remarque On aurait en fait pu raffiner la preuve en dressant explicitement le tableau de variations de f_{n+1} et en observant (en reprenant les calculs du début) que si f_{n+1} admet un minimum local en t, alors $f_{n+1}(t) = f_n(t)$ tandis que si f_{n+1} admet un maximum local en t, alors $f_{n+1}(t) > f_n(t)$.

Remarque culturelle: f_n représente la somme partielle de la série de Fourier d'un signal triangulaire (cf Physique).

Solution pour l'exercice 33 · Énoncé p. 36 · Indication p. 46 (Négation)

1. En utilisant les règles de négation on obtient

$$\boxed{(\forall n \in \mathbb{N}, u_n \neq 0) \text{ et } (\exists n \in \mathbb{N}, u_n \leq 0)}.$$

2. La proposition «$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée» s'écrit $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$ et donc la négation est

$$\boxed{\forall M \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, u_n > M}.$$

3. En utilisant les règles de négation on obtient

$$\boxed{\forall N \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, (n \geq N \text{ et } u_n < 1)}.$$

4. La proposition «$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante» peut s'écrire $\forall n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}, u_n = u_m$ et la négation est donc

$$\boxed{\exists n \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N}, u_n \neq u_m}.$$

Alternativement, si on écrit «$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante» sous la forme $\exists C \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = C$, la négation est

$$\boxed{\forall C \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, u_n \neq C}.$$

Les deux propositions sont équivalentes.

5. En utilisant les règles de négation on obtient

$$\boxed{\exists \varepsilon > 0 \ \forall N \in \mathbb{N}^*, \exists p \geq N, \exists q \geq N, |u_p - u_q| > \varepsilon}.$$

Solution pour l'exercice 37 · Énoncé p. 37 · Indication p. 47 (Traduction I)
Il s'agit de la proposition $\boxed{\text{n°1}}$.

Solution pour l'exercice 38 · Énoncé p. 38 · Indication p. 47 (Propositions formelles)

1. Quelle que soit la valeur de vérité de la proposition $\mathcal{P}$, la proposition $\mathcal{P}$ et $\neg\mathcal{P}$ est toujours Fausse.

Donc

$$\boxed{(\mathcal{P} \text{ et } \neg\mathcal{P}) \Longrightarrow (\mathcal{P} \text{ ou } \neg\mathcal{P})}.$$

2. On a

$$\begin{aligned}
((\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{R}) \text{ et } (\mathcal{Q} \Longrightarrow \mathcal{R})) &\Longleftrightarrow ((\neg\mathcal{P} \text{ ou } \mathcal{R}) \text{ et } (\neg\mathcal{Q} \text{ ou } \mathcal{R})) && \text{(réécriture implication)}\\
&\Longleftrightarrow (\neg\mathcal{P} \text{ et } \neg\mathcal{Q}) \text{ ou } \mathcal{R} && \text{(distributivité de ou sur et)}\\
&\Longleftrightarrow (\neg(\mathcal{P} \text{ ou } \mathcal{Q})) \text{ ou } \mathcal{R} && \text{(négation d'une disjonction)}\\
&\Longleftrightarrow ((\mathcal{P} \text{ ou } \mathcal{Q}) \Longrightarrow \mathcal{R}) && \text{(réécriture implication)}
\end{aligned}$$

et donc au final on a bien

$$\boxed{((\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{R}) \text{ et } (\mathcal{Q} \Longrightarrow \mathcal{R})) \Longleftrightarrow ((\mathcal{P} \text{ ou } \mathcal{Q}) \Longrightarrow \mathcal{R})}.$$

Remarque: cette équivalence est à la base de la disjonction de cas.

3. Par la question précédente on a

$$((\neg\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}) \text{ et } (\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q})) \Longleftrightarrow ((\neg\mathcal{P} \text{ ou } \mathcal{P}) \Longrightarrow \mathcal{Q}).$$

De plus quelle que soit la valeur de vérité de $\mathcal{P}$, la proposition $\neg\mathcal{P}$ ou $\mathcal{P}$ est toujours Vraie.

Par conséquent on a $((\neg\mathcal{P} \text{ ou } \mathcal{P}) \Longrightarrow \mathcal{Q}) \Longrightarrow \mathcal{Q}$.

Et donc on a bien montré que

$$\boxed{((\neg\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}) \text{ et } (\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q})) \Longrightarrow \mathcal{Q}}.$$

Remarque: il s'agit du cas le plus classique de démonstration par disjonction de cas, où les deux cas sont les négations l'un de l'autre.

4. Pour varier proposons trois démonstrations différentes (il y a bien sûr d'autres façons de procéder).

▷ **Par calcul propositionnel**

On a

$$\begin{aligned}(\neg\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}) \text{ et } \neg\mathcal{Q} &\Longleftrightarrow (\neg(\neg\mathcal{P}) \text{ ou } \mathcal{Q}) \text{ et } \neg\mathcal{Q} && \text{(réécriture implication)}\\ &\Longleftrightarrow (\mathcal{P} \text{ ou } \mathcal{Q}) \text{ et } \neg\mathcal{Q} && \text{(double négation)}\\ &\Longleftrightarrow (\mathcal{P} \text{ et } \neg\mathcal{Q}) \text{ ou } (\mathcal{Q} \text{ et } \neg\mathcal{Q}) && \text{(distributivité de et sur ou)}\\ &\Longleftrightarrow \mathcal{P} \text{ et } \neg\mathcal{Q} && \text{(disjonction avec une propriété toujours fausse)}\end{aligned}$$

Et en particulier, comme $\mathcal{P}$ et $\neg\mathcal{Q} \Longrightarrow \mathcal{P}$ on a bien

$$\boxed{((\neg\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}) \text{ et } \neg\mathcal{Q}) \Longrightarrow \mathcal{P}}.$$

▷ **Par table de vérité**

On établit la table de vérité suivante

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\neg\mathcal{P}$	$\neg\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}$	$\neg\mathcal{Q}$	$(\neg\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q})$ et $\neg\mathcal{Q}$	$((\neg\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q})$ et $\neg\mathcal{Q}) \Longrightarrow \mathcal{P}$
V	V	F	V	F	F	V
V	F	F	V	V	V	V
F	V	V	V	F	F	V
F	F	V	F	V	F	V

et donc on a bien

$$\boxed{((\neg\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}) \text{ et } \neg\mathcal{Q}) \Longrightarrow \mathcal{P}}.$$

▷ **Par contraposée**

En ayant tout d'abord démontré le principe de contraposée et le modus ponens, on a par contraposée

$$(\neg\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}) \Longleftrightarrow (\neg\mathcal{Q} \Longrightarrow \mathcal{P})$$

et par conséquent

$$(\neg\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}) \text{ et } \neg\mathcal{Q} \Longleftrightarrow (\neg\mathcal{Q} \Longrightarrow \mathcal{P}) \text{ et } \neg\mathcal{Q}$$

d'où (modus ponens)

$$((\neg\mathcal{Q} \Longrightarrow \mathcal{P}) \text{ et } \neg\mathcal{Q}) \Longrightarrow \mathcal{P}$$

Remarque: il s'agit d'une écriture du principe du raisonnement par l'absurde.

5. Par disjonction de cas (cf questions précédentes) on a

$$((\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{R}) \text{ et } (\mathcal{Q} \Longrightarrow \mathcal{R})) \Longleftrightarrow ((\mathcal{P} \text{ ou } \mathcal{Q}) \Longrightarrow \mathcal{R}).$$

Par conséquent on a

$$\begin{aligned}((\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{R}) \text{ et } (\mathcal{Q} \Longrightarrow \mathcal{R}) \text{ et } (\mathcal{P} \text{ ou } \mathcal{Q})) \Longleftrightarrow ((\mathcal{P} \text{ ou } \mathcal{Q}) \Longrightarrow \mathcal{R}) \text{ et } (\mathcal{P} \text{ ou } \mathcal{Q}) &\quad \text{(disjonction de cas)}\\ \Longrightarrow \mathcal{R} &\quad \text{(modus ponens).}\end{aligned}$$

Et donc on a bien

$$\boxed{((\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{R}) \text{ et } (\mathcal{Q} \Longrightarrow \mathcal{R}) \text{ et } (\mathcal{P} \text{ ou } \mathcal{Q})) \Longrightarrow \mathcal{R}}.$$

Remarque: il s'agit d'une écriture du principe de disjonction de cas.

Solution pour l'exercice 43 · Énoncé p. 39 · Indication p. 48 (NAND et NOR)

1. On a pour toutes propositions $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$,

- ▷ $\neg\mathcal{P} \iff \mathcal{P} \mathbin{\overline{\wedge}} \mathcal{P}$ comme on peut le voir sur une table de vérité

$\mathcal{P}$	$\neg\mathcal{P}$	$\mathcal{P} \mathbin{\overline{\wedge}} \mathcal{P}$
V	F	F
F	V	V

- ▷ $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q} \iff (\mathcal{P} \mathbin{\overline{\wedge}} \mathcal{Q}) \mathbin{\overline{\wedge}} (\mathcal{P} \mathbin{\overline{\wedge}} \mathcal{Q})$ car $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q} \iff \neg(\mathcal{P} \mathbin{\overline{\wedge}} \mathcal{Q})$.
- ▷ $\mathcal{P}$ ou $\mathcal{Q} \iff (\mathcal{P} \mathbin{\overline{\wedge}} \mathcal{P}) \mathbin{\overline{\wedge}} (\mathcal{Q} \mathbin{\overline{\wedge}} \mathcal{Q})$ car $\mathcal{P}$ ou $\mathcal{Q} \iff \neg(\neg\mathcal{P}$ et $\neg\mathcal{Q})$.

On remarque l'importance des parenthèses, l'opérateur $\overline{\wedge}$ n'étant **pas** associatif.

2. De même pour toutes propositions $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$,

- ▷ $\neg\mathcal{P} \iff \mathcal{P} \mathbin{\overline{\vee}} \mathcal{P}$ comme on peut le voir sur une table de vérité

$\mathcal{P}$	$\neg\mathcal{P}$	$\mathcal{P} \mathbin{\overline{\vee}} \mathcal{P}$
V	F	F
F	V	V

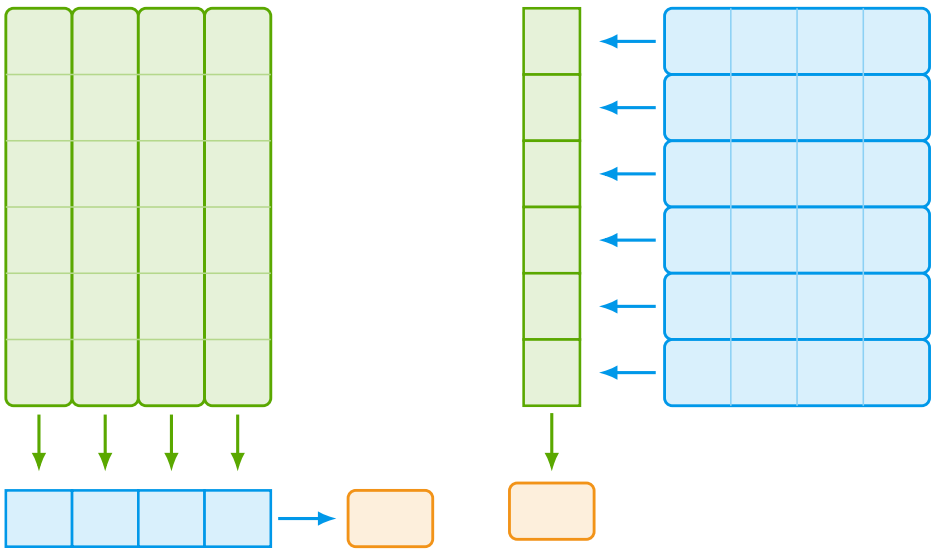
- ▷ $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q} \iff (\mathcal{P} \mathbin{\overline{\vee}} \mathcal{P}) \mathbin{\overline{\vee}} (\mathcal{Q} \mathbin{\overline{\vee}} \mathcal{Q})$ car $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q} \iff \neg(\neg\mathcal{P}$ ou $\neg\mathcal{Q})$.
- ▷ $\mathcal{P}$ ou $\mathcal{Q} \iff (\mathcal{P} \mathbin{\overline{\vee}} \mathcal{Q}) \mathbin{\overline{\vee}} (\mathcal{P} \mathbin{\overline{\vee}} \mathcal{Q})$ car $\mathcal{P}$ ou $\mathcal{Q} \iff \neg(\mathcal{P} \mathbin{\overline{\vee}} \mathcal{Q})$.

On remarque l'importance des parenthèses, l'opérateur $\overline{\vee}$ n'étant **pas** associatif.

Chapitre 3

Sommes

Énoncés 69
Indications 83
Solutions 89



$$\sum_{k=0}^{n} a_k b_k = a_n \sum_{j=0}^{n} b_j - \sum_{k=0}^{n} \left((a_k - a_{k-1}) \sum_{j=0}^{k-1} b_j \right)$$

Énoncés

Bien pratiquer le **cahier de calcul** !

Exercice 1 (◑★♠ Transformation d'Abel !)
Soit $n \in \mathbb{N}$ et soient $a_0, ..., a_{n+1}$ ainsi que $b_0, ..., b_{n+1}$ des réels.

1. Montrer que

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} a_k(b_{k+1} - b_k) = a_{n+1}b_{n+1} - a_0b_0 - \sum_{k=0}^{n}(a_{k+1} - a_k)b_{k+1}}.$$

2. Commenter.

Indication p. 83

Exercice 2 (◔★♣ Produit télescopique)
Soit $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, ..., a_{n+1}$ des nombres tous non nuls.

Montrer que

$$\prod_{k=0}^{n}\left(\frac{a_{k+1}}{a_k}\right) = \frac{a_{n+1}}{a_0}.$$

Indication p. 83

Exercice 3 (◔★ Produits courants et factorielle)
Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer à l'aide de la factorielle:

1. Le produit de tous les nombres pairs jusqu'à $2n$

$$P_n = \prod_{\substack{1 \leq k \leq 2n \\ k \text{ est pair}}} k.$$

2. Le produit de tous les nombres impairs jusqu'à $2n+1$

$$I_n = \prod_{\substack{1 \leq k \leq 2n+1 \\ k \text{ est impair}}} k.$$

Indication p. 83 · Solution p. 89

Exercice 4 (◔★ Une somme de beaucoup de petits termes peut être grande)
Expliciter une suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que

$$u_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

et

$$\sum_{k=0}^{n} u_k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

Indication p. 83

Exercice 5 (◔★♣ Lien entre sommes partielles et terme général)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ une suite.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

Exprimer pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n en fonction de S_n et S_{n-1}.

Indication p. 83

Exercice 6 (◔★♠ Équivalent de la série harmonique)
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

1. Montrer que pour tout $k \geq 2$,

$$\ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k} \leq \ln(k) - \ln(k-1).$$

2. En déduire que

$$\frac{1}{\ln(n)} H_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Indication p. 83

Exercice 7 (◑★ Signes alternés)
Soit $n \in \mathbb{N}$.

Calculer

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k k.$$

d'au moins **3** méthodes différentes.

Indication p. 83

Exercice 8 (◑★ Espérance géométrique)
Soit $x \in \mathbb{R}$.

Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}$ la valeur de

$$\sum_{k=0}^{n} k x^k.$$

Indication p. 84

Exercice 9 (◔★ Un cas particulier de la formule de Cavalieri ou calcul des queues)
Soit $n \in \mathbb{N}$ et $(a_0, ..., a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Montrer que

$$\sum_{k=0}^{n} k a_k = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=i+1}^{n} a_k.$$

Indication p. 84

Exercice 10 (◔★ Exemple de produits de termes convergeant vers 1)

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Montrer que

$$\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{n}.$$

En déduire que

$$\lim_{n\to+\infty} \prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k}\right) = 0.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Calculer

$$\prod_{k=2}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)$$

et en déduire que

$$\lim_{n\to+\infty} \prod_{k=2}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right) = +\infty.$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Montrer que

$$\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right) = \frac{n+1}{2n}.$$

En déduire que

$$\lim_{n\to+\infty} \prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right) = \frac{1}{2}.$$

4. Commenter.

Indication p. 84

Exercice 11 (◑★ Série harmonique en regroupant par puissance de deux)
Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

1. Montrer que pour tout $j \in \mathbb{N}$ on a

$$\sum_{k=2^j}^{2^{j+1}-1} \frac{1}{k} \geq \frac{1}{2}$$

2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$H_{2^n-1} \geq \frac{n}{2}$$

puis que

$$\lim_{n\to\infty} H_n = +\infty.$$

Indication p. 84

Exercice 12 (◔★ Somme des inverses des carrés)

1. Pour $n \in \mathbb{N}$ calculer

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}.$$

2. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 2.$$

3. Conclure qu'en posant $C_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$, la suite $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et

$$\lim_{n\to+\infty} C_n \leq 2$$

4. **Bonus** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \geq \frac{3n}{2n+1}.$$

Que peut-on en déduire sur la limite de la suite ?

Indication p. 84

Exercice 13 (◔★ Intégrales, gendarmes et télescopages)

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq 2\Big(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\Big) \leq \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

2. En déduire que

$$\sum_{k=1}^{40000} \frac{1}{\sqrt{k}} \in [398, 399].$$

3. Proposer un programme en `Python` calculant numériquement la valeur de cette somme.

Indication p. 85

Exercice 14 (◔★ Pot-pourri de sommes doubles)

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{C}$. Calculer les sommes suivantes:

1. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \min(i,j).$

2. $\displaystyle\sum_{0\leq i<j\leq n} q^{i+j}.$

3. $\displaystyle\sum_{0\leq i\leq j\leq n} \binom{j}{i}.$

4. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} \frac{i}{j}.$

5. $\displaystyle\sum_{\substack{1\leq i,j\leq n\\ i\neq j}} ij.$

6. $\displaystyle\sum_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}} |i-j|.$

Indication p. 85

Exercice 15 (◑★ À vous de trouver une méthode !)

Calculer

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{2025} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$

2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{2025} k2^k$

3. $1^2 - 3^2 + 5^2 - 7^2 + 9^2 - 11^2 + \cdots + 2021^2 - 2023^2 + 2025^2.$

Indication p. 85

Exercice 16 (◔★ Formule de Duhamel pour les suites)
Soient $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites à valeurs complexes.

On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = u_0 \in \mathbb{C}$ et pour $n \geq 0$

$$u_{n+1} = \alpha_n u_n + \beta_n.$$

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$u_n = \left(\prod_{k=0}^{n-1} \alpha_k\right) u_0 + \sum_{k=1}^{n} \beta_{k-1} \left(\prod_{j=k}^{n-1} \alpha_j\right).$$

Indication p. 85

Exercice 17 (◑★ Zeta et eta, ou encore une alternance)
Soit $s \in \mathbb{C}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose

$$Z_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^s}$$
$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k^s}.$$

Montrer que pour tout entier naturel n pair,

$$H_n = Z_n - 2^{1-s} Z_{\frac{n}{2}}.$$

Indication p. 85

Exercice 18 (◔☆ Produits usuels ?)

1. Soit $q \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$. Donner une forme fermée de

$$\prod_{k=0}^{n} q^k.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer à l'aide de la factorielle

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{5}{\sqrt{k}}.$$

Indication p. 85

Exercice 19 (◔★ Un encadrement de coefficients binomiaux)
Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\forall k \in [\![0, 2n]\!]$ on a

$$\binom{2n}{k} \leq \binom{2n}{n}.$$

En déduire que

$$\frac{4^n}{2n+1} \leq \binom{2n}{n} \leq 4^n.$$

Indication p. 86

Exercice 20 (◑★ Un joli exo d'analyse discrète du Dr. B)
Soient $n \in \mathbb{N}$ et $(u_0, ..., u_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$.

On définit la moyenne M et la variation totale V de $(u_0, ..., u_n)$ par

$$M = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} u_k,$$
$$V = \sum_{k=0}^{n-1} |u_{k+1} - u_k|.$$

Montrer que

$$\forall k \in [\![0, n]\!], |u_k| \leq |M| + V.$$

Indication p. 86

Exercice 21 (◔★ Quelques inégalités)
1. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $(x_1, ..., x_n) \in [0, 1]^n$.

$$\prod_{k=1}^{n} (1 - x_k) \geq 1 - \sum_{k=1}^{n} x_k$$

2. Soit $n \geq 2$. Montrer que

$$2^{n-1} \leq n! \leq n^{n-1}$$

Indication p. 86

Exercice 22 (◑★ Inégalité de Tchebychev)
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$ ainsi que $b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n$ des nombres réels.

1. Montrer que

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)(b_j - b_i) = n\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right).$$

2. En déduire que

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} a_k}{n} \frac{\sum_{k=1}^{n} b_k}{n} \leq \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k b_k}{n}.$$

Indication p. 86

Exercice 23 (◔★ Encore une inégalité)
Soient $n \in \mathbb{N}$ et $(a_1, ..., a_n) \in (0, +\infty)^n$.

Montrer d'au moins deux façons différentes

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}\right) \geq n^2.$$

Indication p. 86

Exercice 24 (◑★ Regroupement ou récurrence)
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}.$$

Indication p. 86

Exercice 25 (◔★ Peut se faire sans récurrence)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Montrer que

$$\prod_{k=2}^{n} \frac{k^3 - 1}{k^3 + 1} = \frac{2}{3} \frac{n^2 + n + 1}{n(n+1)}.$$

Indication p. 86

Exercice 26 (◔☆ Encore un télescopage)
Soit $n \in \mathbb{N}$.

Calculer

$$\sum_{k=0}^{n} k \times (k!).$$

Indication p. 87

Exercice 27 (◑☆ Une somme triple peu intéressante)
Soit $n \in \mathbb{N}$.

Calculer

$$\sum_{(i,j,k)\in[\![1,n]\!]^3} \min(i, \max(j,k)).$$

Indication p. 87

Exercice 28 (◑☆ Somme de sommes harmoniques)
Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=1}^{n} H_k = (n+1)H_n - n.$$

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=1}^{n} kH_k = \frac{n(n+1)}{2} H_n - \frac{n(n-1)}{4}.$$

Indication p. 87

Exercice 29 (◔☆ Somme alternée II)
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k k^2 = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} k$$

Indication p. 87

Exercice 30 (◔☆ Sommes et parties entières)
Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$\sum_{k=0}^{n} \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor.$$

Indication p. 87

Exercice 31 (◔☆ C'est juste l'inégalité triangulaire)
Soit $n \in \mathbb{N}$ et $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| \neq 1$. Montrer que

$$\left| \frac{1-z^n}{1-z} \right| \leq \frac{1-|z|^n}{1-|z|}.$$

Indication p. 87

Exercice 32 (◕☆ Découpage moins classique)
Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \left| \sum_{k=1}^{n} (-1)^{\lfloor \sqrt{k} \rfloor} \right| \leq \lfloor \sqrt{n} \rfloor + 2.$$

Indication p. 87

Exercice 33 (◑☆ Cette magie est unique)
Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^{\mathbb{N}}$ une suite de termes strictement positifs telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} (u_k)^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} u_k \right)^2.$$

Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $u_k = k$.

Indication p. 87

Exercice 34 (◔☆ Un zeste de produit trigonométrique)

1. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Rappeler la formule donnant $\sin(2\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$ et de $\sin(\theta)$.

2. Pour $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}]$ et $n \in \mathbb{N}$ on pose

$$P_n(\theta) = \prod_{k=0}^{n} \cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right).$$

À l'aide de la question précédente, simplifier $P_n(\theta)$.

Indication p. 87

Exercice 35 (◔☆ Encore une autre méthode pour calculer la somme des cubes)
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose

$$S_n = \sum_{1 \leq i,j \leq n} ij.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_{n+1} = S_n + 2 \times (n+1) \times \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)^2.$$

2. En déduire une nouvelle preuve de

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2.$$

Indication p. 87

Exercice 36 (●★ Module des sommes de Gauss)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $\omega = e^{i\frac{2\pi}{n}}$.

L'objectif de cet exercice est de calculer le module de

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{k^2} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{2k^2\pi}{n}}. \end{aligned}$$

1. Montrer que

$$|S_n|^2 = \sum_{(k,\ell)\in[\![0,n-1]\!]^2} \omega^{(k-\ell)(k+\ell)}.$$

2. En déduire que

$$|S_n|^2 = \sum_{r=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{r(2k-r)}.$$

3. En déduire que

$$|S_n|^2 = n \sum_{\substack{r\in[\![0,n-1]\!] \\ n \mid 2r}} \omega^{-r^2}.$$

4. Conclure, c'est à dire déterminer $|S_n|$ en fonction de n.

Indication p. 87 · Solution p. 89

Exercice 37 (●★ Inégalité de Kuzmin-Landau)
Soient $\lambda \in \left]0, \frac{1}{2}\right]$, $n \geq 2$ et $x_1, ..., x_n$ des réels tels que

$$\lambda \leq x_2 - x_1 \leq x_3 - x_2 \leq \cdots \leq x_n - x_{n-1} \leq 1 - \lambda.$$

L'objectif de cet exercice est de majorer la somme

$$\left| \sum_{k=1}^{n} e^{2i\pi x_k} \right|.$$

On définit la fonction cotan sur $]0, \pi[$ par

$$\begin{array}{rccc} \text{cotan} : &]0\pi[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}. \end{array}$$

1. Dresser le tableau de variation de la fonction cotan.

Dans la suite on pose, pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$,

$$\zeta_k = \frac{e^{2i\pi x_k}}{e^{2i\pi x_{k+1}} - e^{2i\pi x_k}}.$$

2. Montrer que pour tout $k \in [\![2, n-1]\!]$,

$$|\zeta_k - \zeta_{k-1}| = \frac{1}{2}(\text{cotan}(\pi(x_k - x_{k-1})) - \text{cotan}(\pi(x_{k+1} - x_k))).$$

3. Montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} e^{2i\pi x_k} = ((\zeta_{n-1} + 1)e^{2i\pi x_n} - \zeta_1 e^{2i\pi x_1}) - \sum_{k=2}^{n-1} e^{2i\pi x_k}(\zeta_k - \zeta_{k-1}).$$

4. Conclure que

$$\left| \sum_{k=1}^{n} e^{2i\pi x_k} \right| \leq \text{cotan}\left(\frac{\pi\lambda}{2}\right).$$

Indication p. 88 · Solution p. 91

Indications

Indication 1 · Énoncé p. 69 (Transformation d'Abel !)

1. Adapter la preuve des sommes télescopiques. Ou bien repérer une somme télescopique bien choisie.
2. De très nombreux commentaires sont possibles. Par exemple
   - ▷ Il s'agit d'une formule généralisant les sommes télescopiques
   - ▷ Il s'agit d'une version discrète de l'intégration par parties (à méditer)
   - ▷ Cette transformée va parfois être très utile (demandez à vos parrains/marraines)
   - ▷ etc.

Indication 2 · Énoncé p. 69 (Produit télescopique)
Procéder exactement de même que pour les sommes télescopiques (par exemple par récurrence ou bien par découpage et changement d'indice).

Indication 3 · Énoncé p. 69 (Produits courants et factorielle)

1. Remarquer que
$$P_n = \prod_{j=1}^{n} (2j)$$
2. Calculer $P_n \times I_n$ et utiliser la question précédente.

Solution p. 89

Indication 4 · Énoncé p. 70 (Une somme de beaucoup de petits termes peut être grande)
Il y a plein d'exemples !

Quitte à construire un exemple, choisir une suite qui se télescope.

Indication 5 · Énoncé p. 70 (Lien entre sommes partielles et terme général)
Exprimer S_n en fonction de S_{n-1} et u_n. On remarquera que $S_{-1} = 0$ (somme vide).

Indication 6 · Énoncé p. 70 (Équivalent de la série harmonique)

1. On peut par exemple utiliser que pour tout $x > -1$, $\ln(1+x) \leq x$ (étude de fonction).

   Ou bien (plus général), effectuer une « comparaison série-intégrale » c'est à dire comparer $\frac{1}{k}$ et $\frac{1}{k+1}$ à $\int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$ par décroissance de $t \mapsto \frac{1}{t}$.
2. Télescoper et simplifier.

Indication 7 · Énoncé p. 71 (Signes alternés)
Voici 8 méthodes différentes pour calculer cette somme.

- ▷ Une fois une expression explicite conjecturée, procéder par récurrence.
- ▷ On a pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$. Dériver l'égalité fonctionnelle et évaluer en -1.
- ▷ Regrouper les termes consécutifs deux par deux: $(-1+2)+(-3+4)+\cdots$ et distinguer selon la parité de n.

▷ Utiliser une transformée d'Abel.
▷ Calculer $\sum_{\substack{0\leq k\leq n\\ k \text{ pair}}} k$. En déduire $\sum_{\substack{0\leq k\leq n\\ k \text{ impair}}} k$.
▷ Trouver un télescopage adapté.
▷ Pour n impair, exprimer $(-1)^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k k$ en fonction de $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k k$ et n. Pour le cas pair il suffit de rajouter un terme.
▷ Écrire pour tout k, $k = \sum_{i=1}^{k} 1$ et intervertir la somme triangulaire.
▷ etc.

Indication 8 · Énoncé p. 71 (Espérance géométrique)
Plusieurs méthodes, qui nécessitent toutes de distinguer le cas $x = 1$.
▷ Utiliser une transformée d'Abel (exercice 1).
▷ Poser $f_n : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} x^k$ et étudier f_n'. Ou bien (ici cela revient au même) $z \mapsto f_n(e^z)$.
▷ Encore plus astucieux: remarquer que $S_n = S_{n-1} + nx^n$ et qu'un changement d'indice permet d'obtenir $S_n = xS_{n-1} + \sum_{k=0}^{n-1} x^{k+1}$.
▷ Utiliser la formule des queues 9.

Indication 9 · Énoncé p. 71 (Un cas particulier de la formule de Cavalieri ou calcul des queues)
Constater que $k = \sum_{i=0}^{k-1} 1$.

Cette formule est très utile en probabilité, on a par exemple étant donnée une variable aléatoire X telle que $X(\Omega) \subset [\![0, n]\!]$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= \sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(X = k)\\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=i+1}^{n} \mathbb{P}(X = k)\\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{P}(X > i).\end{aligned}$$

d'où le nom «formule des queues».

Indication 10 · Énoncé p. 72 (Exemple de produits de termes convergeant vers 1)
1. Pour tout $k \geq 2$, $1 - \frac{1}{k} = \frac{k-1}{k}$ et télescopage.
2. Pour tout $k \geq 2$, $1 + \frac{1}{k} = \frac{k+1}{k}$ et télescopage.
3. Pour tout $k \geq 2$, $1 - \frac{1}{k^2} = \left(1 - \frac{1}{k}\right)\left(1 + \frac{1}{k}\right)$.
4. On ne peut donc a priori rien dire d'un produit de termes tendant vers 1 !

Indication 11 · Énoncé p. 73 (Série harmonique en regroupant par puissance de deux)
1. Une somme est toujours plus grande que son plus petit terme fois le nombre de termes.
2. Regrouper par paquets entre deux puissances de deux consécutives.

Conclure par encadrement.

Indication 12 · Énoncé p. 73 (Somme des inverses des carrés)
1. Montrer que $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{\alpha}{k} + \frac{\beta}{k+1}$ pour des réels α, β bien choisis et télescoper.
2. Remarquer que pour tout $k \geq 2$, $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{(k-1)k}$. Faire le cas $k = 1$ à part.

3. La suite est croissante (pourquoi ?) et majorée.
4. Procéder par récurrence et en déduire un encadrement.

Indication 13 · Énoncé p. 74 (Intégrales, gendarmes et télescopages)
1. On peut multiplier par le conjugué ou calculer $\int_n^{n+1} \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ et faire un schéma.
2. Remarquer que si pour tout k, $a_{k+1} \leq b_k \leq a_k$ alors pour tout k $b_k \leq a_k \leq b_{k-1}$.

Puis télescoper.
3. Utiliser une boucle « for » pour calculer des sommes.

Indication 14 · Énoncé p. 74 (Pot-pourri de sommes doubles)
Pour chacune des questions, faire un schéma.

1. Ici le problème est symétrique. Remarquer que par exemple à i fixé on a $[\![1,n]\!] = [\![1,i-1]\!] \sqcup \{i\} \sqcup [\![i+1,n]\!]$.
2. Ici le problème est symétrique. Remarquer que pour tous i et j, $q^{i+j} = (q^i)(q^j)$ et faire apparaître un produit de sommes. Ne pas oublier la disjonction de cas $q = 1$.
3. Ici remarquer qu'à j fixé, la somme $\sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i}$ se calcule.
4. Remarquer qu'à j fixé la somme $\sum_{i=1}^{j} i$ se calcule et voir une simplification apparaissant comme par magie.
5. Calculer les sommes $\sum_{1\leq i,j\leq n} ij$ et $\sum_{\substack{1\leq i,j\leq n \\ i=j}} ij$.
6. Par exemple distinguer selon $i < j$, $i = j$ et $i > j$.

Indication 15 · Énoncé p. 74 (À vous de trouver une méthode !)
1. Somme télescopique ou logarithme de produit télescopique.
2. Par exemple une transformée d'Abel ou bien le calcul de $\sum_{k=0}^{n} kx^{k-1}$ pour tout x.
3. L'écrire sous forme de somme et faire comme le premier point, ou bien regrouper les termes 2 par 2.

Indication 16 · Énoncé p. 75 (Formule de Duhamel pour les suites)
Faire une récurrence ou un télescopage malin (adaptation de la variation de la constante).

Remarque: Cette formule n'a que peu d'intérêt pratique. Elle est le pendant discret de la très importante « formule de Duhamel » pour les équations différentielles.

Indication 17 · Énoncé p. 75 (Zeta et eta, ou encore une alternance)
Faire apparaître les termes pairs et impairs et exprimer les termes pairs à l'aide de $Z_{\frac{n}{2}}$.

On constatera que cette méthode peut être appliquée aux exercices 7 ou 29.

Indication 18 · Énoncé p. 75 (Produits usuels ?)
1. On a

$$\prod_{k=0}^{n} q^k = q^{\sum_{k=0}^{n} k} = \boxed{q^{\frac{n(n+1)}{2}}}.$$

2. On a

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{5}{\sqrt{k}} = 5^n \sqrt{\frac{1}{\prod_{k=1}^{n} k}}$$
$$= \boxed{\frac{5^n}{\sqrt{n!}}}$$

Indication 19 · Énoncé p. 76 (Un encadrement de coefficients binomiaux)
Par symétrie on peut se ramener à $k \in [\![0, n]\!]$.

Considérer par exemple le quotient entre $\binom{2n}{k}$ et $\binom{2n}{k+1}$.

Utiliser enfin que $\sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} = 2^N$.

Indication 20 · Énoncé p. 76 (Un joli exo d'analyse discrète du Dr. B)
Montrer par exemple que $|u_k - M| \leq V$.

Indication 21 · Énoncé p. 76 (Quelques inégalités)

1. Par exemple par récurrence.

2. Constater que pour tout $k \in [\![2, n]\!]$, $0 \leq 2 \leq k \leq n$.

Indication 22 · Énoncé p. 77 (Inégalité de Tchebychev)
Développer le produit à l'intérieur de la somme puis utiliser la linéarité.

Si nécessaire rajouter et enlever le cas $i = j$ dans le produit.

Indication 23 · Énoncé p. 77 (Encore une inégalité)
Encore une fois de nombreuses façons de procéder.

- Cauchy-Schwarz
- IAG et IAGH
- Développer et constater que si $i \neq j$, $\frac{a_i}{a_j} + \frac{a_j}{a_i} \geq 2$.
- Procéder par récurrence en utilisant l'IAG pour l'hérédité.

Indication 24 · Énoncé p. 77 (Regroupement ou récurrence)
Comme le résultat est donné on peut procéder par récurrence.

Alternativement en posant $S_0 = \sum_{\substack{k \in [\![1,2n]\!] \\ k \text{ pair}}} \frac{1}{k}$ et $S_1 = \sum_{\substack{k \in [\![1,2n]\!] \\ k \text{ impair}}} \frac{1}{k}$, exprimer les deux sommes en fonction de S_0 et S_1 (on obtient $S_1 - S_0$ et $S_0 + S_1 - 2S_0$).

Indication 25 · Énoncé p. 77 (Peut se faire sans récurrence)
Au pire faire une récurrence…

Pour faire sans identifier un télescopage:

- Soit en travaillant sur la fraction rationnelle $\frac{X^3-1}{X^3+1}$
- Soit en remarquant qu'une fois le résultat donné le télescopage peut se deviner !

Indication 26 · Énoncé p. 78 (Encore un télescopage)
Remarquer que pour tout k, $k \times (k!) = (k+1)! - k!$.

Indication 27 · Énoncé p. 78 (Une somme triple peu intéressante)
Procéder comme pour la somme $\sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \min(i,j)$. On obtient (sauf erreur de ma part)

$$\frac{n^2(n+1)(5n+1)}{12}.$$

Indication 28 · Énoncé p. 78 (Somme de sommes harmoniques)
En intervertissant la somme double et par linéarité il reste à sommer sur i des termes de la forme $\frac{1}{i}$, 1 et i (pour la seconde question).

Indication 29 · Énoncé p. 78 (Somme alternée II)
S'inspirer de l'exercice 7 ou 17.

Indication 30 · Énoncé p. 79 (Sommes et parties entières)
Grouper les termes deux par deux ou bien par pairs et impairs.

Indication 31 · Énoncé p. 79 (C'est juste l'inégalité triangulaire)
Inégalité triangulaire sur $\sum_{k=0}^{n-1} z^k$.

Indication 32 · Énoncé p. 79 (Découpage moins classique)
Découper par blocs de la forme $[\![m^2, (m+1)^2[\![$ et traiter « à la main » le bloc restant.

Indication 33 · Énoncé p. 79 (Cette magie est unique)
Procéder par récurrence forte sur $n \in \mathbb{N}$.

Pour l'hérédité développer et obtenir une équation du second degré sur u_{n+1}.

Indication 34 · Énoncé p. 80 (Un zeste de produit trigonométrique)

1. RAS
2. La formule précédente permet de voir $\cos(\theta)$ comme un quotient de sinus qui se télescopent.

Indication 35 · Énoncé p. 80 (Encore une autre méthode pour calculer la somme des cubes)

1. Faire un schéma d'un carré de taille $(n+1) \times (n+1)$ et le décomposer en un carré $n \times n$, deux bandes $1 \times n$ et $n \times 1$ et un carré 1×1.
2. Simplifier et télescoper.

Indication 36 · Énoncé p. 81 (Module des sommes de Gauss)

1. On rappelle que $|z|^2 = z\overline{z}$ et l'identité remarquable $k^2 - \ell^2 = (k-\ell)(k+\ell)$.
2. Faire un beau schéma.
3. Calculer $\sum_{k=0}^{n-1} (\omega^p)^k$ en fonction de p et n.
4. Pour vérifier votre résultat, il s'agit de

$$S_n = \begin{cases} (1+i)\sqrt{n} & \text{si} \quad n \equiv 0[4] \\ \sqrt{n} & \text{si} \quad n \equiv 1[4] \\ 0 & \text{si} \quad n \equiv 2[4] \\ i\sqrt{n} & \text{si} \quad n \equiv 3[4]. \end{cases}$$

Solution p. 89

Indication 37 · Énoncé p. 82 (Inégalité de Kuzmin-Landau)

1. Étude de fonction.
2. Angle moitié.
3. Transformée d'Abel.
4. Ne pas hésiter à faire un schéma, notamment pour les variations de sin.

Solution p. 91

Solutions

Solution pour l'exercice 3 · Énoncé p. 69 · Indication p. 83 (Produits courants et factorielle)
On a

$$\begin{aligned} P_n \times I_n &= \prod_{\substack{1\leq k\leq 2n \\ k \text{ est pair}}} k \times \prod_{\substack{1\leq k\leq 2n+1 \\ k \text{ est impair}}} k \\ &= \prod_{1\leq k\leq 2n+1} k \\ &= (2n+1)! \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} P_n &= \prod_{j=1}^{n}(2j) \\ &= 2^n \prod_{j=1}^{n} j \\ &= 2^n n! \end{aligned}$$

Du système

$$\begin{cases} P_n \times I_n = (2n+1)! \\ P_n = 2^n n! \end{cases}$$

on en déduit que

$$\boxed{\begin{cases} P_n = 2^n n! \\ I_n = \dfrac{(2n+1)!}{2^n n!} \end{cases}}.$$

Solution pour l'exercice 36 · Énoncé p. 81 · Indication p. 87 (Module des sommes de Gauss)

1. On a

$$\begin{aligned} |S_n|^2 &= S_n \overline{S_n} \\ &= \left(\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{k^2}\right)\left(\sum_{\ell=0}^{n-1} \omega^{-\ell^2}\right) \\ &= \sum_{(k,\ell)\in[\![0,n-1]\!]^2} \omega^{k^2-\ell^2} \end{aligned}$$

d'où

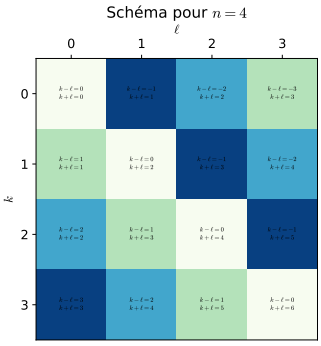
$$\boxed{|S_n|^2 = \textstyle\sum_{(k,\ell)\in[\![0,n-1]\!]^2} \omega^{(k-\ell)(k+\ell)}}.$$

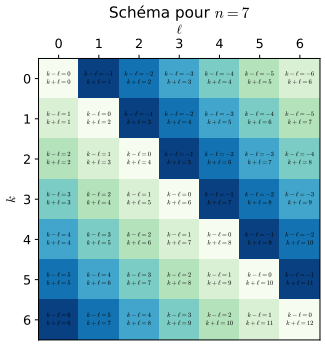
2. Comme $\omega^n = 1$, pour tout entier N, la valeur de ω^N ne dépend que de la classe d'équivalence de N modulo n (c'est à dire si $N_1 \equiv N_2[n]$ alors $\omega^{N_1} = \omega^{N_2}$).

On regroupe donc par exemple selon la classe d'équivalence de $k-\ell$ modulo n (ce qui revient à sommer sur les « diagonales »).

$$\sum_{(k,\ell)\in[\![0,n-1]\!]^2} \omega^{(k-\ell)(k+\ell)} = \sum_{r=0}^{n-1}\left(\sum_{\substack{(k,\ell)\in[\![0,n-1]\!]^2\\ k-\ell\equiv r[n]}} \omega^{(k-\ell)(k+\ell)}\right)$$
$$= \sum_{r=0}^{n-1}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\omega^{r(2k-r)}\right)$$

la dernière égalité ayant lieu car pour k,ℓ,r trois entiers, si $k-\ell\equiv r[n]$ alors $(k-\ell)(k+\ell)\equiv r(2k-r)[n]$ et donc $\omega^{(k-\ell)(k+\ell)}=\omega^{r(2k-r)}$.





On a donc bien

$$\boxed{|S_n|^2 = \textstyle\sum_{r=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1}\omega^{r(2k-r)}}.$$

3. On obtient alors

$$\sum_{r=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1}\omega^{r(2k-r)} = \sum_{r=0}^{n-1}\omega^{-r^2}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\omega^{2r}\right)^k$$

Or pour tout entier $p\in\mathbb{Z}$ on a (sommes géométriques)

- ▷ Si $n\mid p$, $\omega^p=1$ d'où

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(\omega^p\right)^k = n$$

- ▷ Si $n\nmid p$, $\omega^p\neq 1$ d'où

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(\omega^p\right)^k = \frac{1-\omega^{np}}{1-\omega^p} = 0$$

Par conséquent

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(\omega^{2r}\right)^k = n\delta_{n|2r} = \begin{cases} n & \text{si } n\mid 2r\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

et donc

$$\boxed{|S_n|^2 = n\sum_{\substack{r\in[\![0,n-1]\!]\\ n\mid 2r}}\omega^{-r^2}}.$$

4. On procède par disjonction de cas.

▷ Si n est impair alors l'unique entier $r \in [\![0, n-1]\!]$ tel que $n \mid 2r$ est 0 d'où $|S_n|^2 = n$.

▷ Si n est pair alors les deux seuls entiers $r \in [\![0, n-1]\!]$ tels que $n \mid 2r$ sont 0 et $\frac{n}{2}$. Posons $m = \frac{n}{2}$.

Procédons de nouveau à une disjonction de cas

▷ Si m est pair, alors $n \mid m^2$ d'où $\omega^{-m^2} = 1$. Avec la contribution de $r = 0$ on obtient $|S_n|^2 = n(1+1) = 2n$.

▷ Si m est impair, alors $m+1$ est pair d'où $n \mid m^2 + m$ d'où $-m^2 \equiv m[n]$. Par conséquent $\omega^{-m^2} = \omega^m = -1$. Avec la contribution de $r = 0$ on obtient $|S_n|^2 = n(1-1) = 0$.

On obtient finalement

$$\boxed{|S_n| = \begin{cases} \sqrt{n} & \text{si } n \equiv 1[2] \\ \sqrt{2n} & \text{si } n \equiv 0[4] \\ 0 & \text{si } n \equiv 2[4] \end{cases}}$$

Remarque: Gauss a obtenu (mais cela est beaucoup plus difficile que juste le module) une expression explicite pour S_n pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n = \begin{cases} (1+i)\sqrt{n} & \text{si } n \equiv 0[4] \\ \sqrt{n} & \text{si } n \equiv 1[4] \\ 0 & \text{si } n \equiv 2[4] \\ i\sqrt{n} & \text{si } n \equiv 3[4] \end{cases}$$

ces sommes étant très utiles, par exemple en arithmétique.

Solution pour l'exercice 37 · Énoncé p. 82 · Indication p. 88 (Inégalité de Kuzmin-Landau)

1. La fonction cotan est dérivable sur l'intervalle $]0, \pi[$ en tant que quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas. Soit $x \in]0, \pi[$. On a

$$\operatorname{cotan}'(x) = -\frac{1}{\sin^2(x)}$$

d'où le tableau de variations suivant :

x	0		π
$\operatorname{cotan}'(x)$		$-$	
cotan	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

2. Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. On a, par la formule de l'angle moitié,

$$\begin{aligned}\zeta_k &= \frac{1}{e^{2i\pi(x_{k+1}-x_k)}-1}\\ &= \frac{1}{e^{i\pi(x_{k+1}-x_k)}2i\sin(\pi(x_{k+1}-x_k))}\\ &= \frac{1}{2i}\frac{e^{-i\pi(x_{k+1}-x_k)}}{\sin(\pi(x_{k+1}-x_k))}\\ &= \frac{1}{2i}\frac{\cos(\pi(x_{k+1}-x_k))-i\sin(\pi(x_{k+1}-x_k))}{\sin(\pi(x_{k+1}-x_k))}\\ &= -\frac{i}{2}\operatorname{cotan}(\pi(x_{k+1}-x_k))-\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Soit $k\in[\![2,n-1]\!]$. On a

$$\begin{aligned}|\zeta_k-\zeta_{k-1}| &= \left|\frac{1}{2i}\operatorname{cotan}(\pi(x_{k+1}-x_k))-\frac{1}{2}-\frac{1}{2i}\operatorname{cotan}(\pi(x_k-x_{k-1}))+\frac{1}{2}\right|\\ &= \frac{1}{2}\left|\operatorname{cotan}(\pi(x_{k+1}-x_k))-\operatorname{cotan}(\pi(x_k-x_{k-1}))\right|.\end{aligned}$$

De plus, par la question 1, la fonction cotan est décroissante sur $]0,\pi[$, et $0<x_k-x_{k-1}\leq x_{k+1}-x_k<1$, on en déduit que

$$\operatorname{cotan}(\pi(x_{k+1}-x_k))\leq\operatorname{cotan}(\pi(x_k-x_{k-1})).$$

Finalement,

$$\forall k\in[\![2,n-1]\!],\ \boxed{|\zeta_k-\zeta_{k-1}|=\tfrac{1}{2}(\operatorname{cotan}(\pi(x_k-x_{k-1}))-\operatorname{cotan}(\pi(x_{k+1}-x_k)))}.$$

3. Par définition on a

$$\sum_{k=1}^{n}e^{2i\pi x_k}=\sum_{k=1}^{n-1}(e^{2i\pi x_{k+1}}-e^{2i\pi x_k})\zeta_k+e^{2i\pi x_n}$$

et par somme télescopique (méthode de la transformée d'Abel)

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1}(e^{2i\pi x_{k+1}}-e^{2i\pi x_k})\zeta_k &= \sum_{k=1}^{n-1}e^{2i\pi x_{k+1}}\zeta_k-\sum_{k=1}^{n-1}e^{2i\pi x_k}\zeta_k\\ &= \sum_{k=2}^{n}e^{2i\pi x_k}\zeta_{k-1}-\sum_{k=1}^{n-1}e^{2i\pi x_k}\zeta_k\\ &= \sum_{k=2}^{n-1}e^{2i\pi x_k}\zeta_{k-1}+e^{2i\pi x_n}\zeta_{n-1}-e^{2i\pi x_1}\zeta_1-\sum_{k=2}^{n-1}e^{2i\pi x_k}\zeta_k\\ &= e^{2i\pi x_n}\zeta_{n-1}-e^{2i\pi x_1}\zeta_1+\sum_{k=2}^{n-1}e^{2i\pi x_k}(\zeta_{k-1}-\zeta_k)\end{aligned}$$

d'où

$$\boxed{\textstyle\sum_{k=1}^{n}e^{2i\pi x_k}=((\zeta_{n-1}+1)e^{2i\pi x_n}-\zeta_1e^{2i\pi x_1})-\sum_{k=2}^{n-1}e^{2i\pi x_k}(\zeta_k-\zeta_{k-1})}.$$

4. Par l'inégalité triangulaire

$$\left|\sum_{k=1}^{n} e^{2i\pi x_k}\right| \leq \left|(\zeta_{n-1}+1)e^{2i\pi x_n}\right| + \left|\zeta_1 e^{2i\pi x_1}\right| + \sum_{k=2}^{n-1}\left|e^{2i\pi x_k}(\zeta_k-\zeta_{k-1})\right|$$
$$= |\zeta_{n-1}+1| + |\zeta_1| + \sum_{k=2}^{n-1}|\zeta_k-\zeta_{k-1}|.$$

De plus :

- ▹ D'après les calculs intermédiaires de la question 2, $|\zeta_1| = \left|\frac{e^{-i\pi(x_2-x_1)}}{2i\sin(\pi(x_2-x_1))}\right| = \frac{1}{2\sin(\pi(x_2-x_1))}$.
- ▹ De même, $|1+\zeta_{n-1}| = \frac{1}{2\sin(\pi(x_n-x_{n-1}))}$.
- ▹ D'après la question 2 et une somme télescopique

$$\sum_{k=2}^{n-1}|\zeta_k-\zeta_{k-1}| = \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n-1}(\operatorname{cotan}(\pi(x_k-x_{k-1})) - \operatorname{cotan}(\pi(x_{k+1}-x_k)))$$
$$= \frac{1}{2}\operatorname{cotan}(\pi(x_2-x_1)) - \frac{1}{2}\operatorname{cotan}(\pi(x_n-x_{n-1})).$$

D'où on déduit

$$\left|\sum_{k=1}^{n} e^{2i\pi x_k}\right| \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sin(\pi(x_2-x_1))} + \operatorname{cotan}(\pi(x_2-x_1))\right)$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sin(\pi(x_n-x_{n-1}))} - \operatorname{cotan}(\pi(x_n-x_{n-1}))\right).$$

Il reste à utiliser les encadrements $\lambda \leq x_2-x_1 \leq 1-\lambda$ et $\lambda \leq x_n-x_{n-1} \leq 1-\lambda$.

- ▹ La fonction cotan est décroissante sur $]0,\pi[$, par conséquent, comme $0 < \pi\lambda \leq \pi(x_2-x_1) < \pi$,

$$\operatorname{cotan}(\pi(x_2-x_1)) \leq \operatorname{cotan}(\pi\lambda)$$

et, de même, comme $0 < \pi(x_n-x_{n-1}) \leq \pi(1-\lambda) < \pi$,

$$-\operatorname{cotan}(\pi(x_n-x_{n-1})) \leq -\operatorname{cotan}(\pi(1-\lambda)) = -\operatorname{cotan}(\pi-\pi\lambda) = \operatorname{cotan}(\pi\lambda).$$

- ▹ On a $0 < \pi\lambda \leq \pi(x_2-x_1) \leq \pi-\pi\lambda < \pi$. En observant les variations de la fonction sin sur l'intervalle $]0,\pi[$, il vient que

$$\sin(\pi(x_2-x_1)) \geq \sin(\pi\lambda) > 0$$

car $\sin(\pi\lambda) = \sin(\pi-\pi\lambda)$. On a aussi $0 < \pi\lambda \leq \pi(x_n-x_{n-1}) \leq \pi-\pi\lambda < \pi$ donc, de la même façon,

$$\sin(\pi(x_n-x_{n-1})) \geq \sin(\pi\lambda) > 0.$$

Et donc

$$\left|\sum_{k=1}^{n} e^{2i\pi x_k}\right| \leq \frac{1}{\sin(\pi\lambda)} + \operatorname{cotan}(\pi\lambda).$$

Finalement, comme

$$\frac{1}{\sin(\pi\lambda)} + \operatorname{cotan}(\pi\lambda) = \frac{\cos(\pi\lambda)+1}{\sin(\pi\lambda)} = \frac{2\cos\left(\frac{\pi\lambda}{2}\right)^2}{2\sin\left(\frac{\pi\lambda}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi\lambda}{2}\right)}$$

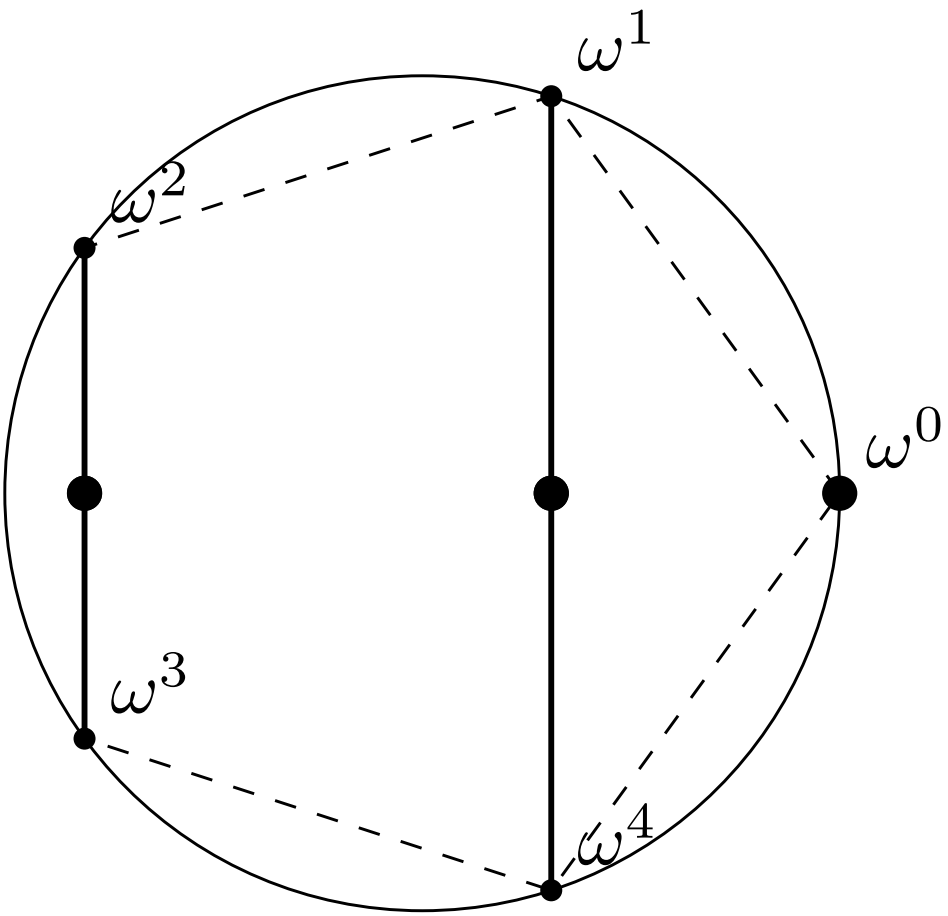
on conclut que

$$\boxed{\left|\sum_{k=1}^{n} e^{2i\pi x_k}\right| \leq \operatorname{cotan}\left(\frac{\pi\lambda}{2}\right)}.$$

Chapitre 4

Nombres Complexes

Énoncés 96
Indications 108
Solutions 114



$$|z_1 - z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 - \mathrm{Re}(z_1\overline{z_2})$$

Énoncés

Exercice 1 (◔★ Encore un trinôme pour la route)
Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

Déterminer l'ensemble des racines complexes du trinôme $X^2 - 2\cos(\theta)X + 1$.

Indication p. 108

Exercice 2 (◔★ Identité du parallélogramme)
Montrer que pour tous $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$,

$$2(|z_1|^2 + |z_2|^2) = |z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2.$$

Interpréter géométriquement cette égalité.

Indication p. 108 · Solution p. 114

Exercice 3 (◔★ Sommes usuelles)
Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $\varphi \in \mathbb{R}$.

1. Calculer pour $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta + \varphi).$$

2. Calculer pour $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(k\theta + \varphi).$$

Indication p. 108

Exercice 4 (◔★♣ Angle moitié et tangente)
Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. On pose $t = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$.

1. Montrer que
$$\frac{1+it}{1-it} = e^{i\theta}.$$
2. En déduire les formules de la tangente de l'angle moitié (c'est à dire les expressions de $\cos(\theta)$, $\sin(\theta)$ et $\tan(\theta)$ en fonction de t).
3. En déduire que pour $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, l'argument de z (pris dans $]-\pi, \pi[$) est
$$\arg(z) = 2\arctan\left(\frac{\mathrm{Im}(z)}{\mathrm{Re}(z) + |z|}\right).$$
4. Interpréter géométriquement ce résultat.

Indication p. 108

Exercice 5 (◔★ Autour de j)
On pose
$$j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$$

1. Calculer les formes exponentielles et algébriques de j, j^2, j^3, $\frac{1}{j}$ et $\bar{j}$ et les représenter dans le plan complexe.
2. Calculer $1 + j + j^2$.
3. Simplifier selon les valeurs de $k \in \mathbb{Z}$ le nombre complexe j^k.
4. Soit $(u, v) \in \mathbb{C}^2$. Simplifier le produit
$$(u+v)(u+jv)(u+j^2v)$$
5. Soit $(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{C}^3$.

   Résoudre le système
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = y_1 \\ x_1 + jx_2 + j^2x_3 = y_2 \\ x_1 + j^2x_2 + jx_3 = y_3. \end{cases}$$

Indication p. 108

Exercice 6 (◔★ Sommes et racines n-ièmes)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Calculer

$$\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega.$$

Interpréter géométriquement.

Indication p. 108

Exercice 7 (◔★♣ Cas d'égalité de l'inégalité triangulaire)
Soit $(z_k)_{k\in[\![1,n]\!]} \in \mathbb{C}^n$. Dans cet exercice on dira qu'ils ont un **argument commun** si il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $z_k = |z_k|\, e^{i\theta}$.

1. Redémontrer que $\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |z_k|$.

2. Montrer que **si** il existe un argument commun à $z_1, ..., z_n$ **alors** $\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| = \sum_{k=1}^{n} |z_k|$.

3. On suppose dans cette question que $\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| = \sum_{k=1}^{n} |z_k|$.

3.1. Que dire dans le cas où $\sum_{k=1}^{n} z_k = 0$?

On suppose désormais que ce n'est pas le cas.

3.2. Montrer qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que

$$\sum_{k=1}^{n} z_k e^{-i\theta} \in \mathbb{R}_+^*.$$

3.3. En déduire que, avec un tel choix de θ,

$$\sum_{k=1}^{n} \big(|z_k e^{-i\theta}| - \mathrm{Re}\big(z_k e^{-i\theta}\big)\big) = 0.$$

3.4. Conclure qu'il existe un argument commun à $z_1, ..., z_n$.

Indication p. 108

Exercice 8 (◑★ Encore Cauchy-Schwarz)
Soient $(z_1, ..., z_n) \in \mathbb{C}^n$ et $(\zeta_1, ..., \zeta_n) \in \mathbb{C}^n$. Montrer que

$$\mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{n} z_k \cdot \overline{\zeta_k}\right) \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |z_k|^2} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |\zeta_k|^2}.$$

Indication p. 108

Exercice 9 (◑★ Trois petits calculs)

1. Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Montrer que

$$\mathrm{Im}\left(z + \frac{1}{z}\right) = 0 \iff (|z| = 1 \ \text{ ou } \ \mathrm{Im}(z) = 0).$$

2. Soient $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ tels que $|a| < 1$ et $|b| < 1$.

Montrer que

$$\left|\frac{a-b}{1-\bar{a}b}\right| < 1.$$

3. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$.

Montrer que

$$\mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-z}\right) > \frac{1}{2} \iff |z| < 1.$$

Indication p. 108

Exercice 10 (◔☆ Produit et racines n-ièmes ?)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Calculer $\displaystyle\prod_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega$.

Indication p. 109

Exercice 11 (◔★ Cercle unité et arithmétique)
Soient a et b deux entiers naturels non nuls.

Montrer que

1. $\mathbb{U}_a \subset \mathbb{U}_b \Leftrightarrow a \mid b$.

2. $\mathbb{U}_a \cap \mathbb{U}_b = \mathbb{U}_{a \wedge b}$.

Indication p. 109

Exercice 12 (◑★ $\cos(\frac{2\pi}{5})$)
Expliciter la valeur de

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right).$$

Indication p. 109

Exercice 13 (◔★ Équations de cercles et de droites)
On dit qu'un ensemble $\mathcal{E}$ de points du plan admet comme *équation complexe* $P(z) = 0$ si $\mathcal{E}$ est l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant $P(z) = 0$.

1. Soit $\mathcal{C}$ un cercle. Montrer qu'il existe $\omega \in \mathbb{C}$ et $\gamma \in]-|\omega|^2, +\infty[$ tels que $\mathcal{C}$ admet comme équation complexe

$$z\overline{z} - \omega\overline{z} - \overline{\omega}z - \gamma = 0.$$

2. Soit $\mathcal{D}$ une droite. Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ et $\beta \in \mathbb{R}$ tels que $\mathcal{D}$ admet comme équation complexe

$$\alpha\overline{z} + \overline{\alpha}z + \beta = 0.$$

Indication p. 109

Exercice 14 (◔★ Somme nulle de trois nombres de même module)
Soient z_1, z_2, z_3 trois nombres complexes non nuls tels que

$$|z_1| = |z_2| = |z_3|$$
$$z_1 + z_2 + z_3 = 0.$$

Montrer qu'il existe $\xi \in \mathbb{C}^*$ tel que $\{z_1, z_2, z_3\} = \{\xi, \xi j, \xi j^2\}$ où $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

Indication p. 109

Exercice 15 (◑★ Fejér et Dirichlet)
Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$ on pose

$$D_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx}.$$

On fixe désormais $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$ tel que $x \not\equiv 0[2\pi]$.

1. Déterminer une expression fermée (c'est à dire sans symbole $\sum$) de $D_n(x)$.

On pose aussi

$$F_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} \left(1 - \frac{|k|}{n}\right) e^{ikx}.$$

2. Montrer que

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} D_k(x).$$

3. En déduire une expression fermée de $F_n(x)$ puis que $F_n(x) \in \mathbb{R}_+$.

Indication p. 109 · Solution p. 114

Exercice 16 (◔★ Somme de deux carrés)
On note

$$K = \{n \in \mathbb{N} \text{ t.q } \exists (a,b) \in \mathbb{N}^2, n = a^2 + b^2\}.$$

1. Traduire en français la définition de K.
2. Montrer que K est stable par produit, c'est à dire,
$$\forall (n,m) \in K^2, n \times m \in K.$$
3. **Bonus**: L'ensemble $\{n \in \mathbb{N} \text{ t.q } \exists (a,b,c) \in \mathbb{N}^3, n = a^2 + b^2 + c^2\}$ est-il stable par produit ?

Indication p. 109

Exercice 17 (◑★ Homographie et cercles/droites)
1. Montrer que l'image directe d'un cercle par une similitude directe est un cercle.
2. On définit une inversion f_0 par:
$$f_0 : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}\setminus\{0\} & \longrightarrow & \mathbb{C}\setminus\{0\} \\ z & \longmapsto & \dfrac{1}{z} \end{array}.$$
Montrer que l'image directe par f_0 d'un cercle ne contenant pas 0 est un cercle ne contenant pas 0, et que l'image d'une droite ne contenant pas 0 est une droite ne contenant pas 0.
3. Énoncer et démontrer une proposition similaire pour
$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}\setminus\left\{\frac{-d}{c}\right\} & \longrightarrow & \mathbb{C}\setminus\left\{\frac{a}{c}\right\} \\ z & \longmapsto & \dfrac{az+b}{cz+d} \end{array}$$
où $(a,b,c,d) \in \mathbb{C}^4$ sont tels que $ad - bc \neq 0$.
4. Que dire des cercles ou droites passant par $\frac{-d}{c}$ et de leur image par f ?

Indication p. 110

Exercice 18 (◔★ On se ramène aux racines)
Déterminer selon $n \in \mathbb{N}$, les solutions de l'équation

$$z^n = \overline{z}.$$

Indication p. 110

Exercice 19 (◔★ Symétries axiales)

1. Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

Montrer que

$$\begin{aligned} \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto e^{2i\theta}\overline{z} \end{aligned}$$

est une symétrie axiale (que l'on précisera).

2. Soient $\alpha \in \mathbb{U}$ et $\beta \in \mathbb{C}$ tels que

$$\alpha\overline{\beta} + \beta = 0.$$

Montrer

$$\begin{aligned} \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \alpha\overline{z} + \beta \end{aligned}$$

est une symétrie axiale.

Montrer que réciproquement toute symétrie axiale peut s'écrire sous cette forme.

3. Que dire de la composée de plusieurs symétries ?

Indication p. 110

Exercice 20 (◑★ Triangles équilatéraux)

Soient A, B, C trois points du plan, d'affixes respectives a, b et c.

Montrer que le triangle ABC est équilatéral ssi

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 0.$$

Indication p. 110

Exercice 21 (◔★ Un exemple du cours d'algèbre générale)

On pose $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et on définit

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}[j] &= \left\{a + bj, (a,b) \in \mathbb{Z}^2\right\} \\ \mathbb{Q}[j] &= \left\{a + bj, (a,b) \in \mathbb{Q}^2\right\} \end{aligned}$$

1. Montrer que $\mathbb{Z}[j]$ et $\mathbb{Q}[j]$ sont stables par somme et par produit.

2. Montrer que l'inverse de tout élément de $\mathbb{Q}[j]$ non nul est dans $\mathbb{Q}[j]$.

Indication p. 110

Exercice 22 (◕☆ Théorème de Napoléon)
Soient A, B, C trois points du plan non alignés, d'affixes respectives a, b et c.

On construit les points D, E et F tels que les triangles ABF, BCD et CAE soient équilatéraux et extérieurs au triangle ABC.

1. Faire un schéma.

On note G, H et I les centres des triangles BCD, CAE et ABF.

2. Montrer que GHI est un triangle équilatéral.

Indication p. 110

Exercice 23 (◑☆ Un point fixe de exp)
1. Montrer qu'il existe $b \in]0, \frac{\pi}{2}[$ tel que

$$\exp\left(\frac{b}{\tan(b)}\right)\sin(b) = b$$

2. Soit $b \in]0, \frac{\pi}{2}[$ vérifiant l'égalité précédente. On pose $a = \frac{b}{\tan(b)}$.

Montrer que le nombre complexe $z = a + ib$ vérifie

$$e^z = z.$$

Indication p. 111

Exercice 24 (◑☆ Sommes et racines n-ièmes II)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes:
1. $\sum_{\omega\in\mathbb{U}_n} (1+\omega)^n$.
2. $\sum_{\omega\in\mathbb{U}_n} |1-\omega|$.
3. $\sum_{\omega\in\mathbb{U}_n\setminus\{1\}} \frac{1}{1-\omega}$.

Indication p. 111

Exercice 25 (◕☆ Une intuition géométrico-mécanique)
Soit $n \geq 2$.

Déterminer

$$\left\{\sum_{k=1}^{n} e^{i\theta_k}, (\theta_1, ..., \theta_n) \in \mathbb{R}^n\right\}.$$

Indication p. 111

Exercice 26 (◑★ Puissance d'un point par rapport à un cercle)
Soient $\mathcal{C}$ un cercle et A un point du plan.

Soit $\mathcal{D}$ une droite passant par A.

1. Montrer que l'intersection de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{C}$ est constituée de 0, 1 ou 2 points.

On suppose désormais que l'intersection est non vide.

On note M et N les points d'intersection de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{C}$ (avec $M = N$ dans le cas où il y a un unique point).

2. Montrer que le produit des distances $AM \cdot AN$ ne dépend pas de la droite $\mathcal{D}$ choisie.

Indication p. 111 · Solution p. 116

Exercice 27 (◔☆ Vers le birapport)
Soit θ un angle tel que $\theta \not\equiv 0[\pi]$.

Montrer que l'ensemble des points d'affixe $z \in \mathbb{C}^*$ vérifiant

$$e^{-i\theta}\left(1 + \frac{1}{z}\right) \in \mathbb{R}$$

est un cercle passant par l'origine, privé de l'origine.

Indication p. 112 · Solution p. 118

Exercice 28 (◑★ Vers le birapport bis)
Soient A et B deux points distincts du plan.

Soit θ un angle tel que $\theta \not\equiv 0[\pi]$.

Déterminer le lieu des points M (distincts de A et B) tels que

$$\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) \equiv \theta[\pi].$$

Indication p. 112

Exercice 29 (◕★ Cocyclicité et birapport)
Soient A, B, C et D quatre points distincts d'affixes respectives a, b, c et d.

Montrer que A, B, C et D sont **cocycliques** (i.e il existe un cercle passant par ces quatre points) ou alignés ssi

$$\frac{\left(\frac{d-a}{d-b}\right)}{\left(\frac{c-a}{c-b}\right)} \in \mathbb{R}.$$

Indication p. 112

Exercice 30 (◕☆ Inégalité et théorème de Ptolémée)
Soient A, B, C, D quatre points distincts du plan, d'affixes respectives a, b, c, d.

1. Montrer que

$$AC \times BD \leq AB \times CD + AD \times BC.$$

2. Montrer que

$$AC \times BD = AB \times CD + BC \times AD$$

ssi A, B, C, D sont cocycliques ou alignés, dans l'ordre A, B, C, D.

Indication p. 112

Exercice 31 (◕☆ Un exercice à astuce)

1. Soit $z \in \mathbb{C}$.

Montrer qu'il existe $\omega \in \mathbb{U}_3$ tel que $\mathrm{Re}(z\omega) \geq \frac{1}{2}\,|z|$.

2. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $(z_1, ..., z_n) \in \mathbb{C}^n$.

Montrer qu'il existe $K \subset [\![1, n]\!]$ tel que

$$\left|\sum_{k\in K} z_k\right| \geq \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n}|z_k|.$$

Indication p. 112

Exercice 32 (◔☆ Une petite équation trigonométrique)
Trouver tous les $z \in \mathbb{C}$ tels que

$$\mathrm{Re}((1+i)z^3) = \mathrm{Im}\left(\sqrt{2}\bar{z}^3\right)$$

Indication p. 113

Exercice 33 (◔☆ La conjugaison n'est pas affine)
Existe-t-il $a, b \in \mathbb{C}$ tels que pour tout $z \in \mathbb{C}$ on ait $\overline{z} = az + b$?

Indication p. 113

Exercice 34 (◑☆ Un triangle inscrit caché)
Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que $\cos(\alpha) + \cos(\beta) + \cos(\gamma) = 0$ et $\sin(\alpha) + \sin(\beta) + \sin(\gamma) = 0$.

Montrer que $\cos(2\alpha) + \cos(2\beta) + \cos(2\gamma) = 0$.

Indication p. 113

Exercice 35 (◑☆ Une somme de certaines racines 7-ièmes)
Soit $\omega = e^{i\frac{2\pi}{7}}$.

On pose

$$Z = \omega + \omega^2 + \omega^4.$$

Déterminer Z.

Indication p. 113

Exercice 36 (◔☆ En plus du cahier de calculs: Mise sous forme algébrique)
Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants:

1. $\frac{2-i}{2+i}$
2. $\frac{1}{1+i} + \frac{1}{1-i}$
3. $\frac{i}{i+1}$
4. $\frac{\sqrt{2}i}{1+i\sqrt{3}}$
5. $(3+3i)^3$
6. $\frac{1}{-i} - i$
7. $(2-i)(1+2i)\left(\frac{1}{i-3} - \frac{1}{i+3}\right)$

Indication p. 113

Exercice 37 (◔☆ En plus du cahier de calculs: Mise sous forme exponentielle)
Mettre sous forme exponentielle les nombres complexes suivants:

1. i
2. -3
3. $\frac{1}{5-5i}$
4. $\left(-\sqrt{3}+i\right)^5$
5. $e^{i\frac{\pi}{3}}+e^{i\frac{\pi}{6}}$
6. $\frac{1+i}{\sqrt{6}+\sqrt{2}i}$
7. $\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}+\sqrt{2-\sqrt{2}}i\right)^2$

Indication p. 113

Indications

Indication 1 · Énoncé p. 96 (Encore un trinôme pour la route)
$e^{\pm i\theta}$

Indication 2 · Énoncé p. 96 (Identité du parallélogramme)
Utiliser Al-Kashi.

Solution p. 114

Indication 3 · Énoncé p. 96 (Sommes usuelles)
Les fonctions trigonométriques sont des parties réelles ou imaginaires d'exponentielle complexe.

Indication 4 · Énoncé p. 97 (Angle moitié et tangente)

1. Par exemple écrire $t = \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}$ et simplifier la fraction.
2. Prendre les parties réelles et imaginaires.
3. Passer de t à z.
4. Formule de l'angle au centre/angle inscrit.

Indication 5 · Énoncé p. 97 (Autour de j)
Voir aussi le DM sur les formules de Cardan.

Indication 6 · Énoncé p. 98 (Sommes et racines n-ièmes)
Paramétrer les racines de l'unité comme les $e^{\frac{2ik\pi}{n}}$.

Barycentre d'un polygone régulier est le centre du cercle circonscrit.

Indication 7 · Énoncé p. 98 (Cas d'égalité de l'inégalité triangulaire)

1. Cf cours.
2. Factoriser par $e^{i\theta}$.
3. **3.1.** Égalité.
   3.2. Cela revient à montrer que $\left(\sum_{k=1}^{n} z_k\right)e^{-i\theta} \in \mathbb{R}_+^*$.
   3.3. Propriété d'un nombre réel positif.
   3.4. Somme de réels positifs est nulle ssi …

Indication 8 · Énoncé p. 98 (Encore Cauchy-Schwarz)
Reprendre une des preuves de Cauchy-Schwarz réel en remplaçant la valeur absolue au carré $|\cdot|^2$ par le module au carré $|\cdot|^2$.

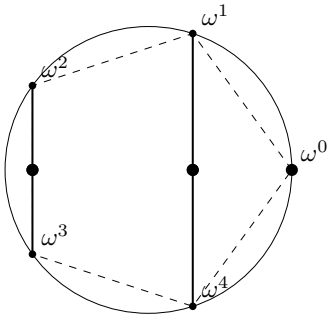
Indication 9 · Énoncé p. 99 (Trois petits calculs)
Pour chacun des calculs choisir entre forme complexe, exponentielle ou algébrique.

Indication 10 · Énoncé p. 99 (Produit et racines n-ièmes ?)
Paramétrer les racines de l'unité comme les $e^{\frac{2ik\pi}{n}}$.

Indication 11 · Énoncé p. 99 (Cercle unité et arithmétique)
Écrire au choix $z \in \mathbb{U}_n \Leftrightarrow z^n = 1$ ou $z \in \mathbb{U}_n \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, z = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$.

Indication 12 · Énoncé p. 99 ($\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$)
Il y a de nombreuses façons de procéder:

- ▹ Polynômes de Tchebychev
- ▹ Centre du pentagone projeté



- ▹ Polynôme palindromique
- ▹ Etc.

Dans tous les cas montrer que $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ est racine du trinôme

$$4X^2 + 2X - 1.$$

Indication 13 · Énoncé p. 100 (Équations de cercles et de droites)

1. Un cercle de centre Ω et de rayon R est l'ensemble des points à distance R de Ω.
2. On peut caractériser une droite à l'aide d'un point et d'un vecteur directeur ou bien d'un point et un vecteur normal.

Indication 14 · Énoncé p. 100 (Somme nulle de trois nombres de même module)
Se ramener à $z_1 = 1$.

Ensuite par exemple les parties réelles et imaginaires.

Indication 15 · Énoncé p. 100 (Fejér et Dirichlet)

1. Somme d'une suite géométrique.
2. Somme double ou Abel.
3. Somme d'une suite géométrique.

Solution p. 114

Indication 16 · Énoncé p. 101 (Somme de deux carrés)

1. Tout est dans le titre.
2. Le module du produit est le produit des modules.

3. 15

Indication 17 · Énoncé p. 101 (Homographie et cercles/droites)
Se rappeler l'équation d'un cercle.

Pour le dernier point, au lieu de faire de nombreux calculs, interpréter f comme une composée de similitudes directes et de f_0.

Indication 18 · Énoncé p. 101 (On se ramène aux racines)
Forme exponentielle (après avoir traité $z = 0$).

Indication 19 · Énoncé p. 102 (Symétries axiales)
1. C'est la symétrie par rapport à l'axe faisant un angle θ par rapport à l'horizontale et passant par l'origine.
2. Faire comme les similitudes directes.
3. Distinguer selon la parité du nombre de symétries (et dans le cas pair distinguer le cas particulier de la translation).

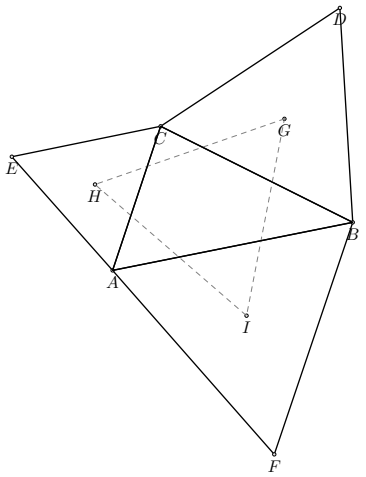
Indication 20 · Énoncé p. 102 (Triangles équilatéraux)
On peut commencer par se ramener à $a = 1$.

On peut même par translation, rotation et dilatation se ramener à $(a, b) = (1, j)$.

On remarque que si les trois points sont confondus, c'est bien un triangle équilatéral.

Indication 21 · Énoncé p. 102 (Un exemple du cours d'algèbre générale)
1. Pour le produit remarque que $j^2 = -1 - j$.
2. On rappelle que pour tout z non nul $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$.

Indication 22 · Énoncé p. 103 (Théorème de Napoléon)
1. On obtient le schéma ci-dessous.



2. Commencer par faire l'exercice 20.

Montrer que si z_1 et z_2 sont deux affixes, alors les deux affixes correspondant à un troisième sommet de triangle équilatéral sont $\frac{z_1+z_2}{2} \pm i\sqrt{3}\frac{z_1-z_2}{2}$.

Terminer les calculs.

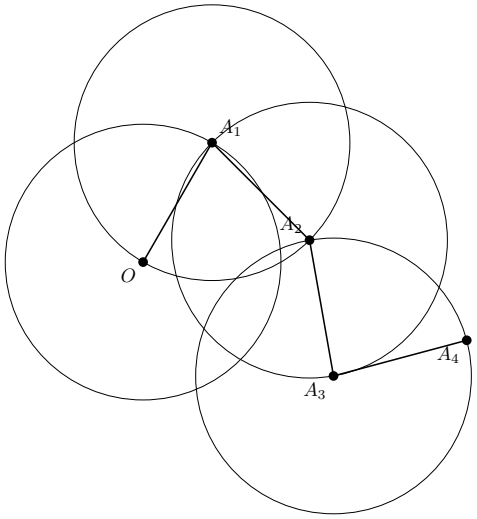
Indication 23 · Énoncé p. 103 (Un point fixe de exp)
Par exemple étude de fonction.

Indication 24 · Énoncé p. 103 (Sommes et racines n-ièmes II)

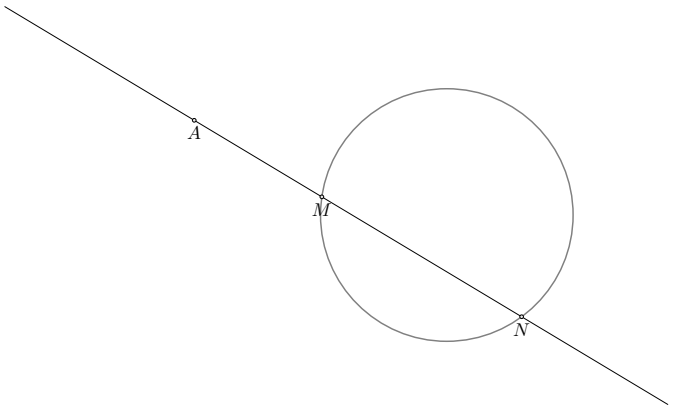
1. Par exemple développer et somme double.
2. Par exemple angle moitié.
3. Par exemple décomposer $\frac{X-1}{X^n-1}$. Alternativement c'est un réel, et chaque terme est de partie réelle $\frac{1}{2}$.

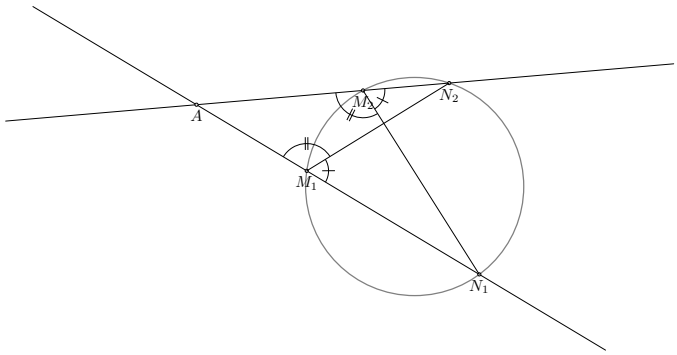
Indication 25 · Énoncé p. 103 (Une intuition géométrico-mécanique)
Il s'agit d'un disque (cf schéma ci-dessous).

Dans un sens l'inégalité triangulaire, dans l'autre faire le cas $n = 2$ et une récurrence.



Indication 26 · Énoncé p. 104 (Puissance d'un point par rapport à un cercle)
On commence évidemment, comme pour tout exercice de géométrie, par **faire un schéma !**





1. Par exemple établir une équation du second degré.
2. Par exemple remarquer que pour l'équation du second degré précédente, on peut se ramener à rechercher le produit des racines.

   Alternativement, utiliser le théorème de Thalès, c'est à dire des triangles semblables.

Solution p. 116

Indication 27 · Énoncé p. 104 (Vers le birapport)
Paramétrer par ce réel.

Ou bien constater que $z \in \mathbb{R}$ ssi $z = \overline{z}$.

Dans tous les cas il peut être intéressant de traiter l'exercice 13.

Solution p. 118

Indication 28 · Énoncé p. 104 (Vers le birapport bis)
Comme tout problème de géométrie: faire un schéma, bien choisir un repère. Puis ici juste calculer un argument.

Indication 29 · Énoncé p. 105 (Cocyclicité et birapport)
Par exemple commencer par montrer que A, B, C et D sont cocycliques ou alignés ssi

$$\widehat{ACB} \equiv \widehat{ADB} \ [\pi].$$

Indication 30 · Énoncé p. 105 (Inégalité et théorème de Ptolémée)
1. Remarquer que

$$(b-a)(d-c) + (c-b)(d-a) = (d-b)(c-a).$$

2. Faire d'abord l'exercice 29.

Indication 31 · Énoncé p. 105 (Un exercice à astuce)
1. Par exemple interpréter géométriquement.
2. Découper $[\![1, n]\!]$ en trois parties à l'aide de la question précédente.

Prendre celle maximisant la somme des modules.

Indication 32 · Énoncé p. 105 (Une petite équation trigonométrique)
Forme exponentielle (après avoir traité $z = 0$).

Indication 33 · Énoncé p. 106 (La conjugaison n'est pas affine)
Non. Il faut maintenant le montrer.

Indication 34 · Énoncé p. 106 (Un triangle inscrit caché)
Interpréter comme $e^{i\alpha} + e^{i\beta} + e^{i\gamma} = 0$.

Indication 35 · Énoncé p. 106 (Une somme de certaines racines 7-ièmes)
On pourra déterminer $Z + \bar{Z}$ et $Z\bar{Z}$.

Indication 36 · Énoncé p. 106 (En plus du cahier de calculs: Mise sous forme algébrique)
RAS. Parfois un passage par forme exponentielle peut être plus rapide, parfois pas.

Indication 37 · Énoncé p. 107 (En plus du cahier de calculs: Mise sous forme exponentielle)
RAS. Ne pas oublier que le module est positif, et ne pas hésiter à faire des schémas.

Solutions

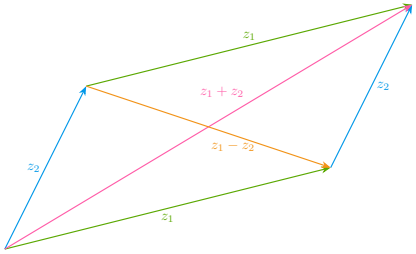
Solution pour l'exercice 2 · Énoncé p. 96 · Indication p. 108 (Identité du parallélogramme)
Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

On a par Al-Kashi

$$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2 = |z_1|^2+|z_2|^2+2\,\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2})+|z_1|^2+|z_2|^2-2\,\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2})$$

et donc

$$\boxed{2(|z_1|^2+|z_2|^2) = |z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2}.$$



L'interprétation géométrique est la suivante: «la somme des carrés des longueurs des diagonales d'un parallélogramme est égale à la somme des carrés des longueurs de ses côtés».

Solution pour l'exercice 15 · Énoncé p. 100 · Indication p. 109 (Fejér et Dirichlet)

1. Comme $e^{ix} \neq 1$, on a par somme d'une suite géométrique

$$\begin{aligned} D_n(x) &= \sum_{k=-n}^{n} \left(e^{ix}\right)^k \\ &= e^{-inx}\frac{1-e^{(2n+1)ix}}{1-e^{ix}} \\ &= \frac{e^{-inx}-e^{i(n+1)x}}{1-e^{ix}} \\ &= \frac{-2i\sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right)e^{i\frac{x}{2}}}{-2i\sin\left(\frac{x}{2}\right)e^{i\frac{x}{2}}} \end{aligned}$$

c'est à dire

$$\boxed{D_n(x) = \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}}.$$

2. Il s'agit d'inverser une « somme triangulaire » mais avec un triangle qui n'est pas rectangle.

Dans le doute on peut par exemple se ramener à l'utilisation de symboles de Kronecker.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1} D_k(x) &= \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{\ell=-k}^{k} e^{i\ell x}\\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{\ell=-n}^{n} \delta_{-k\leq\ell\leq k} e^{i\ell x}\\ &= \sum_{\ell=-n}^{n}\sum_{k=0}^{n-1} \delta_{-k\leq\ell\leq k} e^{i\ell x}\\ &= \sum_{\ell=-n}^{n} e^{i\ell x}\sum_{k=0}^{n-1} \delta_{-k\leq\ell\leq k}\\ &= \sum_{\ell=-n}^{n} e^{i\ell x}\sum_{k=0}^{n-1} \delta_{|\ell|\leq k}\\ &= \sum_{\ell=-n}^{n} e^{i\ell x}(n-|\ell|)\end{aligned}$$

et par conséquent on a bien

$$\boxed{\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} D_k(x) = \sum_{\ell=-n}^{n}\left(1-\frac{|\ell|}{n}\right)e^{i\ell x}}.$$

3. Ainsi, par les deux questions précédentes

$$\begin{aligned}F_n(x) &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} D_k(x)\\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\sin\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\\ &= \frac{1}{n}\frac{1}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\operatorname{Im}\left(\sum_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{x}{2}}\left(e^{ix}\right)^k\right)\\ &= \frac{1}{n}\frac{1}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\operatorname{Im}\left(e^{i\frac{x}{2}}\frac{1-e^{inx}}{1-e^{ix}}\right)\\ &= \frac{1}{n}\frac{1}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\operatorname{Im}\left(e^{i\frac{x}{2}}\frac{-2ie^{i\frac{nx}{2}}\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{-2ie^{i\frac{x}{2}}\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right)\\ &= \frac{1}{n}\frac{1}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\operatorname{Im}\left(e^{i\frac{nx}{2}}\frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right)\\ &= \frac{1}{n}\left(\frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right)^2\end{aligned}$$

et donc,

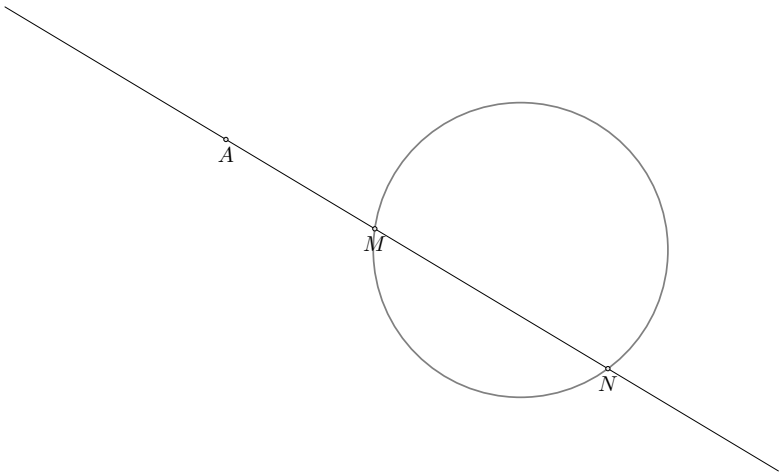
$$\boxed{F_n(x) = \frac{1}{n}\left(\frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right)^2}$$

et comme le carré d'un nombre réel est un réel positif, on a bien $\boxed{F_n(x)\in\mathbb{R}_+}$.

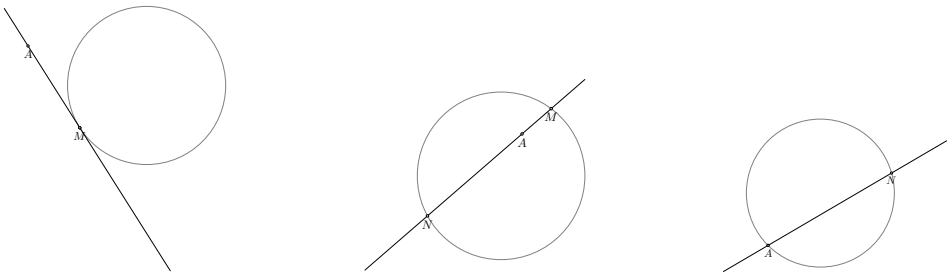
Remarque culturelle: D_n s'appelle le noyau de Dirichlet et F_n le noyau de Fejér, qui comme on le voit est une moyenne « triangulaire » des noyaux de Dirichlet.

Une propriété essentielle du noyau de Fejér est sa **positivité**, que l'on vient de trouver. Voir par exemple les cours de séries de Fourier que vous suivrez dans quelques années.

Solution pour l'exercice 26 · Énoncé p. 104 · Indication p. 111 (Puissance d'un point par rapport à un cercle)
Comme il s'agit d'un exercice de géométrie, on commence évidemment par faire un schéma générique:



Sachant que d'autres cas sont possibles, mais que pour un schéma mieux vaut choisir une configuration générique.



1. On choisit un repère d'origine le centre du cercle $\mathcal{C}$.

Remarque: on pourrait aussi choisir comme unité de longueur le rayon du cercle et même choisir le repère pour obtenir par exemple A sur l'axe réel.

Notons R le rayon de $\mathcal{C}$ et α l'affixe du point A.

Une représentation *cartésienne* de $\mathcal{C}$ est alors

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |z|^2 = R^2\}$$

et étant donné $\omega \in \mathbb{U}$ représentant l'affixe d'un vecteur directeur normalisé de la droite $\mathcal{D}$, une représentation *paramétrique* de $\mathcal{D}$ est

$$\{\alpha + t\omega, t \in \mathbb{R}\}.$$

On cherche donc les $t \in \mathbb{R}$ tels que

$$|\alpha + t\omega|^2 = R^2$$

c'est à dire

$$t^2 + 2t\,\mathrm{Re}(\alpha\overline{\omega}) + |\alpha|^2 - R^2 = 0.$$

Il s'agit d'une équation du second degré, de discriminant

$$\Delta = 4\mathrm{Re}(\alpha\overline{\omega})^2 - 4(|\alpha|^2 - R^2).$$

On a donc

- si $\Delta < 0$, alors l'intersection est vide,
- si $\Delta > 0$, alors l'intersection est constituée de deux points,
- si $\Delta = 0$, alors l'intersection est constituée d'un point.

2. On se place donc dans le cas où le discriminant est positif.

On garde de plus les mêmes notations qu'à la question précédente.

Soient t_1 et t_2 les deux racines (éventuellement confondues) de $X^2 + 2\,\mathrm{Re}(\alpha\overline{\omega})X + |\alpha|^2 - R^2$.

Alors, par la question précédente, les affixes des points d'intersection sont $\alpha + t_1\omega$ et $\alpha + t_2\omega$.

Les distances AM et AN sont alors $|\alpha - (\alpha + t_1\omega)|$ et $|\alpha - (\alpha + t_2\omega)|$ c'est à dire $|t_1|$ et $|t_2|$.

Par conséquent on a

$$AM \cdot AN = |t_1 t_2|$$

et donc par relations coefficients racines

$$\boxed{AM \cdot AN = \big||\alpha|^2 - R^2\big|}$$

qui ne dépend que de $\mathcal{C}$ et de A, et ne dépend pas de $\mathcal{D}$.

Remarque: on peut même montrer que le produit des distances algébriques est constant, et cette quantité, nommée puissance de A par rapport au cercle $\mathcal{C}$ est très utile en géométrie.

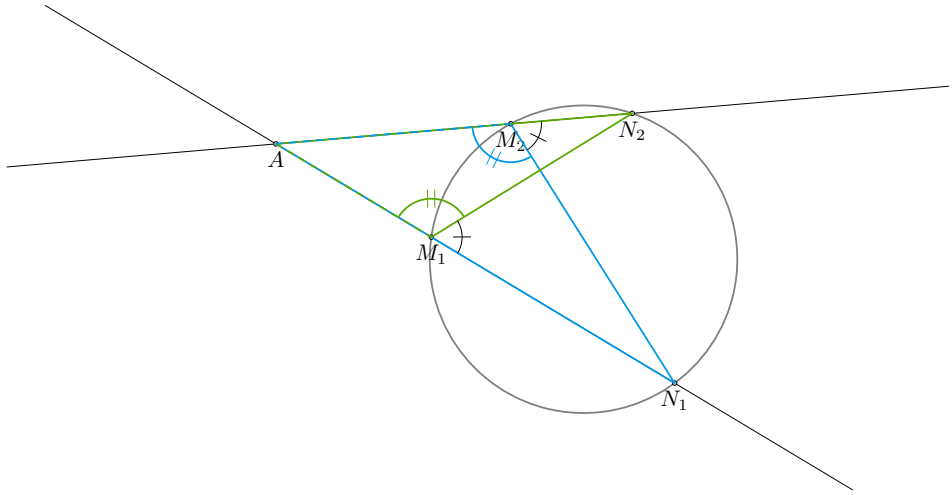
Remarque: une variante est de remarquer (cas particulier de l'angle moitié) que les angles $N_1\widehat{M_2}N_2$ et $N_1\widehat{M_1}N_2$ sont égaux et par conséquent les angles $A\widehat{M_2}N_1$ et $A\widehat{M_1}N_2$ sont aussi égaux.

Par conséquent les triangles AM_2N_1 et AM_1N_2 sont semblables (car deux angles égaux) et par conséquent on a

$$\frac{AM_2}{AN_1} = \frac{AM_1}{AN_2}$$

d'où l'égalité entre $AM_2 \cdot AN_2$ et $AM_1 \cdot AN_1$.

(Preuve à rédiger en détails et ne pas oublier de traiter aussi le cas de tangence).



Solution pour l'exercice 27 · Énoncé p. 104 · Indication p. 112 (Vers le birapport)
Soit $z \in \mathbb{C}^*$.

On a la chaîne d'équivalences (en multipliant par $z\overline{z} \neq 0$):

$$\begin{aligned}
e^{-i\theta}\left(1+\frac{1}{z}\right) \in \mathbb{R} &\Leftrightarrow e^{-i\theta}\left(1+\frac{1}{z}\right) = \overline{e^{-i\theta}\left(1+\frac{1}{z}\right)} \\
&\Leftrightarrow e^{-i\theta} + e^{-i\theta}\frac{1}{z} = e^{i\theta} + e^{i\theta}\frac{1}{\overline{z}} \\
&\Leftrightarrow |z|^2\ e^{-i\theta} + e^{-i\theta}\overline{z} = |z|^2\ e^{i\theta} + e^{i\theta} z \\
&\Leftrightarrow \left(e^{-i\theta} - e^{i\theta}\right)\ |z|^2 + \left(e^{-i\theta}\overline{z} - e^{i\theta} z\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow -2i\sin(\theta)\left(|z|^2 - \left(\frac{e^{-i\theta}}{2i\sin(\theta)}\overline{z} + \overline{\frac{e^{-i\theta}}{2i\sin(\theta)}} z\right)\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow |z|^2 - 2\,\mathrm{Re}\left(\frac{-ie^{-i\theta}}{2\sin(\theta)}\overline{z}\right) + \left|\frac{-ie^{-i\theta}}{2\sin(\theta)}\right|^2 = \left|\frac{-ie^{-i\theta}}{2\sin(\theta)}\right|^2 \\
&\Leftrightarrow \left|z - \frac{-ie^{-i\theta}}{2\sin(\theta)}\right|^2 = \frac{1}{(2\sin(\theta))^2}
\end{aligned}$$

et on obtient bien l'équation d'un $\boxed{\text{cercle}}$ (de centre $\frac{-ie^{-i\theta}}{2\sin(\theta)} = -\frac{1}{2} - \frac{i\cos(\theta)}{2\sin(\theta)}$ et de rayon $\frac{1}{2|\sin(\theta)|}$) privé de l'origine.

Ce cercle passe bien par l'origine : le module du centre est égal au rayon.

Chapitre 5

Binôme et Trigonométrie

Énoncés 120
Indications 127
Solutions 131

1								
1	1							
1	2	1						
1	3	3	1					
1	4	6	4	1				
1	5	10	10	5	1			
1	6	15	20	15	6	1		
1	7	21	35	35	21	7	1	
1	8	28	56	70	56	28	8	1

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\ \sin(\theta) = \dfrac{2t}{1+t^2} \end{cases}$$

Énoncés

Avant tout, travailler les chapitres idoines du **cahier de calcul**.

Exercice 1 (◔★♣ Les fondamentaux)
Soit $n \in \mathbb{N}$.

Montrer chacune des formules suivantes d'au moins trois manières différentes.

1. (symétrie)

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

2. (somme)

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

3. (formule de la capitaine)

$$\forall k \in [\![1, n]\!], k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}.$$

Indication p. 127

Exercice 2 (◔★ Calculs de sommes)
Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer les sommes suivantes:

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}.$

2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{2}{k+1}\binom{n}{k}.$

3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k}.$

Indication p. 127

Exercice 3 (◔★ Formule de Vandermonde)
Soient $(n, m, r) \in \mathbb{N}^3$.

Montrer que

$$\sum_{k=0}^{r} \binom{n}{k}\binom{m}{r-k} = \binom{n+m}{r}.$$

Indication p. 127

Exercice 4 (◔★ Une des sommes)
Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer les sommes suivantes

1. $$\sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \text{ pair}}} \binom{n}{k}.$$

2. $$\sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \equiv 1[3]}} \binom{n}{k}.$$

Indication p. 127

Exercice 5 (◔★ Le fameux $\cos(\varphi)$)
Soit $\omega > 0$ et $\varphi \in \mathbb{R}$. On pose $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Calculer

$$\frac{1}{T}\int_0^T \cos(\omega t)\cos(\omega t + \varphi)\,\mathrm{d}t.$$

Indication p. 127 · Solution p. 131

Exercice 6 (◔★♠ Somme sur une colonne)
Soit $p \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$\forall n \geq p,\ \sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$$

Indication p. 127

Exercice 7 (◔★♠ Formule des capitaines)
Soient p, k, n trois entiers naturels tels que $p \leq k \leq n$. Montrer que

$$\binom{k}{p}\binom{n}{k} = \binom{n}{p}\binom{n-p}{k-p}.$$

Indication p. 128

Exercice 8 (◑★♠ Formules d'inversions)
Soient $(a_0, ..., a_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ et $(b_0, ..., b_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$.

Montrer que

▷ **Première formule d'inversion de Pascal**

$$\left(\forall i \in [\![0,n]\!], a_i = \sum_{j=0}^{n} \binom{i}{j} b_j\right) \Leftrightarrow \left(\forall i \in [\![0,n]\!], b_i = \sum_{j=0}^{n} (-1)^{j-i} \binom{i}{j} a_j\right)$$

▷ **Seconde formule d'inversion de Pascal**

$$\left(\forall i \in [\![0,n]\!], a_i = \sum_{j=0}^{n} \binom{j}{i} b_j\right) \Leftrightarrow \left(\forall i \in [\![0,n]\!], b_i = \sum_{j=0}^{n} (-1)^{j-i} \binom{j}{i} a_j\right)$$

Indication p. 128

Exercice 9 (◔★ Vers Fourier)
Soit $\omega > 0$. On pose $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Soient n et m deux entiers naturels.

Calculer

$$\int_0^T \sin(n\omega t)\sin(m\omega t)\,\mathrm{d}t.$$

Indication p. 128

Exercice 10 (◔★ Somme des carrés des coefficients binomiaux)
Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

Indication p. 128

Exercice 11 (◔★ Somme de cosinus au carré)
Soit $\omega \not\equiv 0[\pi]$, $\varphi \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

Calculer

$$\sum_{k=0}^{n} (\cos(k\omega + \varphi)^2)$$

Indication p. 128

Exercice 12 (◔★ On mélange les deux)
Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

Calculer

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\sin(k\theta))^3.$$

Indication p. 128

Exercice 13 (◔★ Encadrement du sinus)

1. Montrer que
$$\forall x \geq 0, \sin(x) \leq x.$$
2. Montrer que
$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \sin(x) \geq \frac{2}{\pi} x.$$
3. Représenter graphiquement les deux inégalités précédentes.

Indication p. 128

Exercice 14 (◔★ Linéarisation)
Linéariser les expressions suivantes

1. $\cos(\theta)^3$
2. $\sin(\theta)^3$
3. $\cos(\theta)^4 \sin(\theta)^2$
4. $\cos(\theta)^5 \sin(\theta)$

Indication p. 128

Exercice 15 (◔★ Petites équations)
Résoudre les équations et inéquations suivantes (d'inconnues $x \in \mathbb{R}$)

1. $\cos(x)\sin(x) > \frac{\sqrt{3}}{4}$.
2. $\cos(x) + \sin(x) \leq 1$.
3. $\cos(x)^3 + \sin(x)^3 = 1$.
4. $\sin(x) + \sin(2x) + \sin(3x) = 0$.

Indication p. 129 · Solution p. 131

Exercice 16 (◔☆ Généralisation des petites équations)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation
$$\sin(x) + \sin(2x) + \cdots + \sin(nx) = 0$$
d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
2. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation
$$\cos(x)^n + \sin(x)^n = 1$$
d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Indication p. 129

Exercice 17 (◔★ Fermat pour $n = 2$)
Montrer qu'il existe une infinité de solutions à l'équation
$$r^2 + s^2 = 1$$
d'inconnue $(r, s) \in \mathbb{Q}^2$.

Indication p. 129 · Solution p. 133

Exercice 18 (◔★ Valeur explicite)
Déterminer la valeur de
$$\tan\left(\frac{\pi}{8}\right).$$

Indication p. 129 · Solution p. 134

Exercice 19 (◔★ Somme sur les diagonales descendantes)
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $p \in \mathbb{N}$
$$\sum_{k=0}^{p} \binom{n+k}{k} = \binom{n+p+1}{p}.$$
et représenter graphiquement cette égalité.

Indication p. 129 · Solution p. 135

Exercice 20 (◑★ Somme sur les diagonales montantes)
On définit la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$F_0 = 0$$
$$F_1 = 1$$
$$\forall n \in \mathbb{N}, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n-k}{k} = F_{n+1}$$

et représenter graphiquement cette égalité.

Indication p. 129

Exercice 21 (◑★ Polynômes de Tchebychev de seconde espèce)
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un et unique polynôme de degré $n-1$, noté U_{n-1}, tel que

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \sin(n\theta) = U_{n-1}(\cos(\theta))\sin(\theta).$$

Indication p. 130

Exercice 22 (◔★ Une somme alternée)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$\forall p \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{n}{k} = (-1)^p \binom{n-1}{p}.$$

Indication p. 130

Exercice 23 (◔★ Sommes usuelles II)
Soit θ un angle tel que $\cos(\theta) \neq 0$ et $n \in \mathbb{N}$.

Calculer la somme

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\cos(k\theta)}{(\cos(\theta))^k}.$$

Indication p. 130

Exercice 24 (◔★ Somme d'inverses de coefficients binomiaux et télescopage)
Calculer pour tout $n \geq 3$,

$$\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{\binom{k}{3}}.$$

Indication p. 130

Indications

Indication 1 · Énoncé p. 120 (Les fondamentaux)
Chacune des quatre définitions possibles des coefficients donne un angle d'approche (sauf éventuellement la formule explicite):

- ▷ Combinatoire
- ▷ Polynomial
- ▷ Récurrence et Pascal
- ▷ Explicite

1. On a par exemple:
- ▷ Sélectionner k objets parmi n revient à choisir les $n-k$ «qu'on ne sélectionne pas».
- ▷ Pour tout x non nul $(1+x)^n = x^n(x^{-1}+1)^n$.
- ▷ Poser une hypothèse de récurrence sur n: «$\forall k \in [\![0,n]\!]$ … ».
- ▷ On a aussi $k!(n-k)! = (n-k)!k!$

2. On a par exemple:
- ▷ Choisir un groupe revient à choisir la taille du groupe puis le groupe.
- ▷ $1+1=2$
- ▷ Une récurrence en prenant soin des termes de bords (revient à redémontrer l'implication Pascal vers Newton).
- ▷ La formule explicite n'est pas forcément une bonne idée.

3. On a par exemple:
- ▷ Choisir une équipe avec une capitaine.
- ▷ $((1+X)^n)' = n(1+X)^{n-1}$
- ▷ Comme pour les autres récurrences faire un schéma pour se convaincre que tout marche bien.
- ▷ Ici la formule explicite fonctionne.

Indication 2 · Énoncé p. 120 (Calculs de sommes)
Utiliser au choix la formule de la capitaine ou bien dériver $(1+X)^n$.

Indication 3 · Énoncé p. 120 (Formule de Vandermonde)
Par double comptage ou bien développer $(1+X)^n(1+X)^m$.

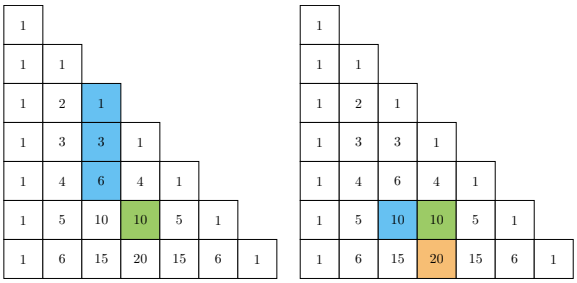
Indication 4 · Énoncé p. 121 (Une des sommes)
1. $1-1*0$
2. Méditer sur les suites 3-périodiques et les racines 3-ièmes de l'unité.

Indication 5 · Énoncé p. 121 (Le fameux $\cos(\varphi)$)
Linéariser !

Solution p. 131

Indication 6 · Énoncé p. 121 (Somme sur une colonne)
Encore une fois, chaque définition donne une méthode de démonstration:

▷ Un schéma montre que la récurrence par Pascal est directe.
▷ Choisir un ensemble de $p+1$ éléments en commençant par choisir le plus grand élément.
▷ Calculer la somme $\sum_{k=0}^{n}(1+X)^k$.



Indication 7 · Énoncé p. 121 (Formule des capitaines)
▷ La récurrence fonctionne mais nécessite un schéma
▷ Choisir une équipe de k élèves dont p capitaines.
▷ Constater que $((1+X)^n)^{(p)} = n(n-1)\cdots(n-p+1)(1+X)^{n-p}$.
▷ Il s'agit d'un des rares cas où la formule explicite fonctionne.

Indication 8 · Énoncé p. 122 (Formules d'inversions)
Au choix interpréter comme des translations de polynômes ou bien calculer la somme

$$\sum_{j=0}^{n}(-1)^{j-i}\binom{i}{j}\sum_{k=0}^{n}\binom{j}{k}b_k.$$

Indication 9 · Énoncé p. 122 (Vers Fourier)
Linéariser.

Indication 10 · Énoncé p. 122 (Somme des carrés des coefficients binomiaux)
Constater que pour tout k,

$$\binom{n}{k}^2 = \binom{n}{k}\binom{n}{n-k}.$$

Indication 11 · Énoncé p. 122 (Somme de cosinus au carré)
Linéariser.

Indication 12 · Énoncé p. 123 (On mélange les deux)
Linéariser.

Indication 13 · Énoncé p. 123 (Encadrement du sinus)
Au pire, faire une étude de fonction.

Indication 14 · Énoncé p. 123 (Linéarisation)
On obtient:
1. $\cos(\theta)^3 = \frac{\cos(3\theta)+3\cos(\theta)}{4}$

2. $\sin(\theta)^3 = \frac{-\sin(3\theta)+3\sin(\theta)}{4}$
3. $\cos(\theta)^4\sin(\theta)^2 = \frac{-\cos(6\theta)-2\cos(4\theta)+\cos(2\theta)+2}{32}$
4. $\cos(\theta)^5\sin(\theta) = \frac{\sin(6\theta)+4\sin(4\theta)+5\sin(2\theta)}{32}$

Indication 15 · Énoncé p. 123 (Petites équations)
Ne pas oublier de faire des schémas de cercles trigonométriques.

Solution p. 131

Indication 16 · Énoncé p. 124 (Généralisation des petites équations)
1. Somme géométrique.
2. Distinguer $n = 1$, $n = 2$ et $n > 2$.

Indication 17 · Énoncé p. 124 (Fermat pour $n = 2$)
Il s'agit de paramétrer le cercle unité par un paramétrage rationnel.

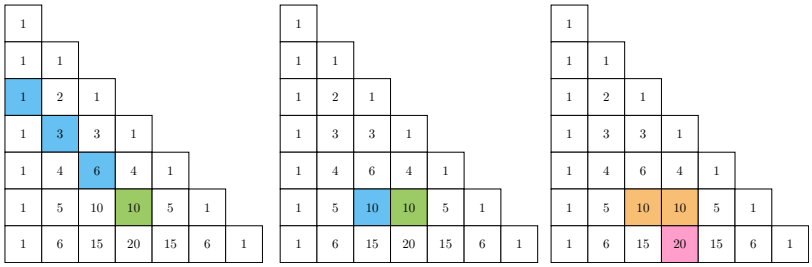
Solution p. 133

Indication 18 · Énoncé p. 124 (Valeur explicite)
Utiliser les formules d'angle double.

Solution p. 134

Indication 19 · Énoncé p. 124 (Somme sur les diagonales descendantes)
Procéder par une récurrence bien choisie (et donc en utilisant la formule de Pascal comme dans toute récurrence sur les coefficients binomiaux).

Pour s'aider dans la récurrence on pourra remarquer que cette dernière revient au schéma ci-dessous.



Solution p. 135

Indication 20 · Énoncé p. 125 (Somme sur les diagonales montantes)
Procéder par une récurrence double.

Indication 21 · Énoncé p. 125 (Polynômes de Tchebychev de seconde espèce)
Procéder exactement comme pour les polynômes de Tchebychev de première espèce.

Indication 22 · Énoncé p. 125 (Une somme alternée)
Faire un schéma et procéder par récurrence.

Indication 23 · Énoncé p. 125 (Sommes usuelles II)
Pour tout k,

$$\frac{\cos(k\theta)}{(\cos(\theta))^k} = \mathrm{Re}\left(\left(\frac{e^{i\theta}}{\cos(\theta)}\right)^k\right).$$

Indication 24 · Énoncé p. 126 (Somme d'inverses de coefficients binomiaux et télescopage)
Commencer par exemple pour $p = 2$ et $p = 3$.

Remarquer un télescopage et le généraliser.

Solutions

Solution pour l'exercice 5 · Énoncé p. 121 · Indication p. 127 (Le fameux $\cos(\varphi)$)
On commence par **linéariser**.

On a pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\cos(\omega t)\cos(\omega t+\varphi) &= \frac{\left(e^{i\omega t}+e^{-i\omega t}\right)}{2}\frac{\left(e^{i(\omega t+\varphi)}+e^{-i(\omega t+\varphi)}\right)}{2}\\ &= \frac{e^{i(2\omega t+\varphi)}+e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}+e^{-i(2\omega t+\varphi)}}{4}\\ &= \frac{1}{2}\cos(2\omega t+\varphi)+\frac{1}{2}\cos(\varphi)\end{aligned}$$

Remarque: ici il aurait été légèrement plus rapide d'utiliser la formule de produit $\cos(a)\times\cos(b)=\frac{1}{2}(\cos(a+b)+\cos(a-b))$.

Par conséquent, en intégrant, et comme $\omega T = 2\pi$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{T}\int_0^T \cos(\omega t)\cos(\omega t+\varphi)\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{2T}\int_0^T \cos(2\omega t+\varphi)\,\mathrm{d}t+\frac{1}{2T}\int_0^T\cos(\varphi)\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{2T}\left[\frac{\sin(2\omega t+\varphi)}{2\omega}\right]_0^T+\frac{1}{2T}T\cos(\varphi)\\ &= \frac{1}{4T\omega}\underbrace{(\sin(2\omega T+\varphi)-\sin(\varphi))}_{=0}+\frac{1}{2}\cos(\varphi)\end{aligned}$$

d'où on a bien

$$\boxed{\frac{1}{T}\int_0^T \cos(\omega t)\cos(\omega t+\varphi)\,\mathrm{d}t = \frac{\cos(\varphi)}{2}}.$$

Solution pour l'exercice 15 · Énoncé p. 123 · Indication p. 129 (Petites équations)
Il est très fortement conseillé de **faire des schémas de cercles trigonométriques**.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}\cos(x)\sin(x) > \frac{\sqrt{3}}{4} &\Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin(2x) > \frac{\sqrt{3}}{4}\\ &\Leftrightarrow \sin(2x) > \frac{\sqrt{3}}{2}\\ &\Leftrightarrow \sin(2x) > \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\\ &\Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{Z}, 2x \in \left]\frac{\pi}{3}+2k\pi, \left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)+2k\pi\right[\\ &\Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{Z}, x \in \left]\frac{\pi}{6}+k\pi, \frac{\pi}{3}+k\pi\right[\end{aligned}$$

et donc l'ensemble des solutions est

$$\boxed{\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left(\frac{\pi}{6}+k\pi,\frac{\pi}{3}+k\pi\right)}.$$

2. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}\cos(x)+\sin(x)\leq 1 &\Leftrightarrow \sqrt{1^2+1^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1^2+1^2}}\cos(x)+\frac{1}{\sqrt{1^2+1^2}}\sin(x)\right)\leq 1\\ &\Leftrightarrow \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos(x)+\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin(x)\right)\leq 1\\ &\Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\leq 1\\ &\Leftrightarrow \cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\leq\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\\ &\Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{Z}, x-\frac{\pi}{4}\in\left[\frac{\pi}{4}+2k\pi,\left(2\pi-\frac{\pi}{4}\right)+2k\pi\right]\\ &\Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{Z}, x\in\left[\frac{\pi}{2}+2k\pi,2\pi+2k\pi\right]\end{aligned}$$

et donc l'ensemble des solutions est

$$\boxed{\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left[\frac{\pi}{2}+2k\pi,2\pi+2k\pi\right]}.$$

3. Pour tout $x\in\mathbb{R}$ on a

$$\cos(x)^3+\sin(x)^3=1$$

ssi

$$\cos(x)^3+\sin(x)^3=\cos(x)^2+\sin(x)^2$$

c'est à dire

$$\cos(x)^2(1-\cos(x))+\sin(x)^2(1-\sin(x))=0.$$

Or pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\cos(x)^2(1-\cos(x))\geq 0$ et $\sin(x)^2(1-\sin(x))\geq 0$, et comme une somme de termes positifs est nulle ssi tous les termes sont nuls on en déduit que x est solution ssi

$$\cos(x)^2(1-\cos(x))=0 \text{ et } \sin(x)^2(1-\sin(x))=0$$

c'est à dire

$$\left(x\equiv\frac{\pi}{2}[\pi] \text{ ou } x\equiv 0[2\pi]\right) \text{ et } \left(x\equiv 0[\pi] \text{ ou } x\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]\right)$$

ce qui par distributivité de «et» sur «ou», puis en simplifiant donne

$$x\equiv 0[2\pi] \text{ ou } x\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi].$$

L'ensemble des solutions est donc

$$\boxed{\{2k\pi,k\in\mathbb{Z}\}\cup\left\{\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}}.$$

Remarque: De manière exactement semblable on peut résoudre pour tout $n \geq 3$ l'équation $\cos(x)^n + \sin(x)^n = 1$. Les cas $n = 0, 1, 2$ se traitant chacun à part.

4. Il y a de nombreuses façons de procéder.

On peut par exemple reconnaître une **somme usuelle**.

- ▹ Si $x \equiv 0[2\pi]$ alors $\sin(x) + \sin(2x) + \sin(3x) = 0$.
- ▹ Sinon, $e^{ix} \neq 1$, et donc par somme géométrique

$$\begin{aligned} 0 + \sin(x) + \sin(2x) + \sin(3x) &= \mathrm{Im}\Big(1 + e^{ix} + \left(e^{ix}\right)^2 + \left(e^{ix}\right)^3\Big) \\ &= \mathrm{Im}\left(\frac{e^{4ix} - 1}{e^{ix} - 1}\right) \\ &= \mathrm{Im}\left(\frac{e^{2ix} 2i\sin(2x)}{e^{i\frac{x}{2}} 2i\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right) \\ &= \sin\left(\frac{3}{2}x\right)\frac{\sin(2x)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \end{aligned}$$

et par conséquent la somme est nulle ssi

$$\sin\left(\frac{3}{2}x\right) = 0 \ \text{ ou } \ \sin(2x) = 0$$

c'est à dire

$$\frac{3}{2}x \equiv 0[\pi] \ \text{ ou } \ 2x \equiv 0[\pi]$$

ou encore

$$x \equiv 0\left[2\frac{\pi}{3}\right] \ \text{ ou } \ x \equiv 0\left[\frac{\pi}{2}\right].$$

On conclut donc que x est solution ssi

$$\boxed{x \equiv 0[2\pi] \ \text{ ou } \ x \equiv 0\left[\tfrac{2\pi}{3}\right] \ \text{ ou } \ x \equiv 0\left[\tfrac{\pi}{2}\right]}$$

ce qui peut se réécrire

$$x \equiv 0 \ \text{ ou } \ \frac{\pi}{2} \ \text{ ou } \ \frac{2\pi}{3} \ \text{ ou } \ \pi \ \text{ ou } \ \frac{4\pi}{3} \ \text{ ou } \ \frac{3\pi}{2}[2\pi]$$

Solution pour l'exercice 17 · Énoncé p. 124 · Indication p. 129 (Fermat pour $n = 2$)
D'après la formule de la tangente de l'angle moitié, comme $\theta \mapsto \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$ est bijective de $]-\pi, \pi[$ vers $\mathbb{R}$, la fonction

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\to \mathbb{U} \setminus \{-1\} \\ t &\mapsto \frac{1 - t^2}{1 + t^2} + i\frac{2t}{1 + t^2} \end{aligned}$$

est bijective (on parle de paramétrisation du cercle unité).

Il suffit donc de trouver $t \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{1-t^2}{1+t^2}$ et $\frac{2t}{1+t^2}$ soient rationnels. Par exemple tous les $t \in \mathbb{Q}$ conviennent.

D'où il existe une infinité de solutions rationnelles.

Remarque: on a donc montré que pour tout $(p,q,d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$ on a

$$\left(d(q^2-p^2)\right)^2 + (d(2pq))^2 = \left(d(q^2+p^2)\right)^2$$

et on a donc exhibé une infinité de solutions à l'équation diophantienne

$$a^2 + b^2 = c^2$$

d'inconnue $(a,b,c) \in \mathbb{Z}^3$.

On pourrait en fait montrer que l'on obtient ainsi toutes les solutions.

Solution pour l'exercice 18 · Énoncé p. 124 · Indication p. 129 (Valeur explicite)
On utilise une formule de duplication.

Par exemple, comme $\frac{\pi}{8} \neq \frac{\pi}{4}\left[\frac{\pi}{2}\right]$, on a, en posant

$$t = \tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$$

par les formules de la tangente de l'angle moitié,

$$1 = \tan\left(2 \times \frac{\pi}{8}\right) = \frac{2t}{1-t^2}$$

c'est à dire

$$2t = 1 \times (1-t^2)$$

ce qui est exactement l'équation du second degré

$$t^2 + 2t - 1 = 0$$

de discriminant $2^2 + 4 = 8 > 0$ et de racines réelles

$$\frac{-2 \pm \sqrt{8}}{2} = -1 \pm \sqrt{2}.$$

Or $1 < \sqrt{2}$ et comme $\frac{\pi}{8} \in [0, \frac{\pi}{2}[$, $t \geq 0$.

Donc

$$\boxed{\tan\left(\tfrac{\pi}{8}\right) = \sqrt{2} - 1}.$$

Une variante (équivalente) est de remarquer que

$$\begin{aligned}\tan\left(\frac{\pi}{8}\right) &= \frac{\frac{e^{i\frac{\pi}{8}}-e^{-i\frac{\pi}{8}}}{2i}}{\frac{e^{i\frac{\pi}{8}}+e^{-i\frac{\pi}{8}}}{2}} \\ &= -i\frac{e^{i\frac{\pi}{8}}-e^{-i\frac{\pi}{8}}}{e^{i\frac{\pi}{8}}+e^{-i\frac{\pi}{8}}} \\ &= -i\frac{\left(e^{i\frac{\pi}{8}}-e^{-i\frac{\pi}{8}}\right)^2}{\left(e^{i\frac{\pi}{8}}+e^{-i\frac{\pi}{8}}\right)\left(e^{i\frac{\pi}{8}}-e^{-i\frac{\pi}{8}}\right)} \\ &= -i\frac{e^{i\frac{\pi}{4}}-2+e^{-i\frac{\pi}{4}}}{e^{i\frac{\pi}{4}}-e^{-i\frac{\pi}{4}}} \\ &= -i\frac{2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-2}{2i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)} \\ &= \boxed{\sqrt{2}-1}.\end{aligned}$$

Solution pour l'exercice 19 · Énoncé p. 124 · Indication p. 129 (Somme sur les diagonales descendantes)
La représentation graphique est la suivante

1						
1	1					
1	2	1				
1	3	3	1			
1	4	6	4	1		
1	5	10	10	5	1	
1	6	15	20	15	6	1

Soit $n \in \mathbb{N}$ (fixé).

Montrons par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$ que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{p}\binom{n+k}{k} = \binom{n+p+1}{p}$.

▷ **Initialisation**

On a

$$\sum_{k=0}^{0}\binom{n+k}{k} = \binom{n}{0} = 1 = \binom{n+1}{0}.$$

D'où le résultat pour $p = 0$.

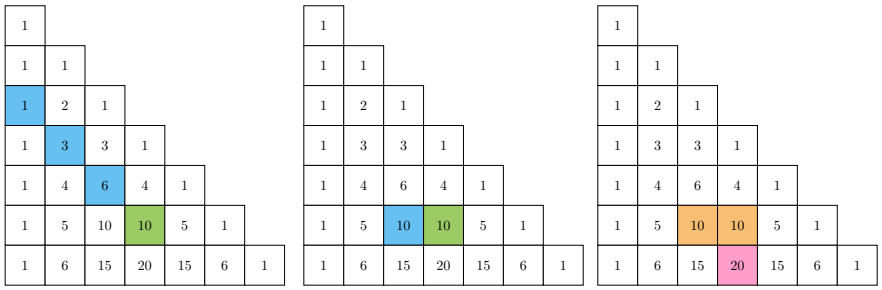
▷ **Hérédité**

Soit $p \in \mathbb{N}$. Supposons que

$$\sum_{k=0}^{p}\binom{n+k}{k} = \binom{n+p+1}{p}.$$

Alors, par définition d'une somme, par hypothèse de récurrence et par la formule de Pascal, on a

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{p+1}\binom{n+k}{k} &= \sum_{k=0}^{p}\binom{n+k}{k} + \binom{n+p+1}{p+1}\\ &= \binom{n+p+1}{p} + \binom{n+p+1}{p+1}\\ &= \binom{n+p+2}{p+1}\end{aligned}$$



ce qui est bien le résultat au rang $p+1$.

▷ **Conclusion**

Par récurrence on a bien

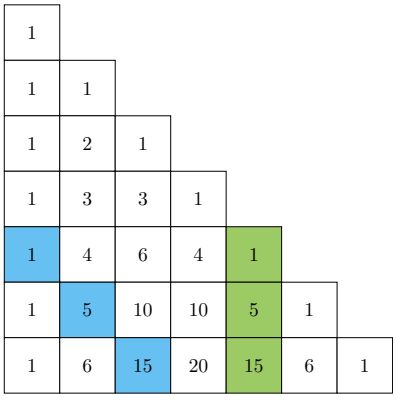
$$\forall p \in \mathbb{N}, \boxed{\sum_{k=0}^{p}\binom{n+k}{k} = \binom{n+p+1}{p}}.$$

Variante

On peut aussi remarquer que pour $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}$ on a

$$\sum_{k=0}^{p}\binom{n+k}{k} = \sum_{k=0}^{p}\binom{n+k}{n}$$

et conclure à l'aide de la somme sur une colonne l'exercice 6.



Variante

On peut aussi remarquer que pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}^*$, par formule de Pascal

$$\binom{n+k}{k} = \binom{n+k+1}{k} - \binom{n+k}{k-1}$$

et conclure par télescopage:

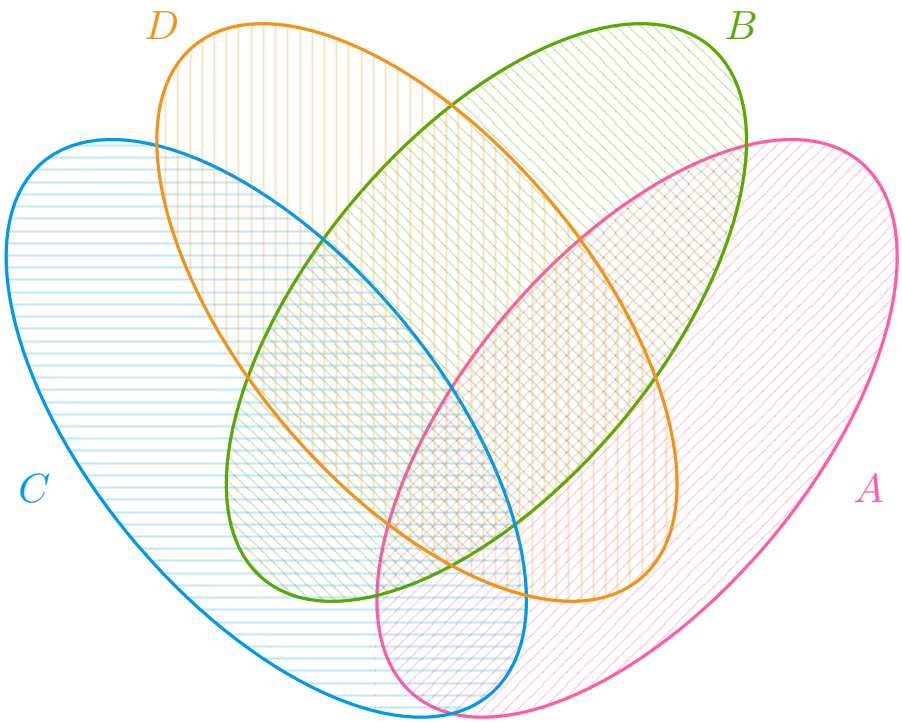
$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{p}\binom{n+k}{k} &= \binom{n}{0} + \sum_{k=1}^{p}\left(\binom{n+k+1}{k} - \binom{n+k}{k-1}\right)\\ &= 1 + \sum_{k=1}^{p}\left(\binom{n+(k+1)}{(k+1)-1} - \binom{n+(k)}{(k)-1}\right)\\ &= 1 + \left(\binom{n+(p+1)}{(p+1)-1} - \binom{n+1}{0}\right)\\ &= \boxed{\binom{n+p+1}{p}}.\end{aligned}$$

1						
1	1					
1	2	1				
1	3	3	1			
1	4	6	4	1		
1	5	10	10	5	1	
1	6	15	20	15	6	1

Chapitre 6

Ensembles et Applications

Énoncés 139
Indications 158
Solutions 165



$$\begin{array}{rcl} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \{0,1\}^E \\ A & \longmapsto & \left(\begin{array}{rcl} E & \to & \{0,1\} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 1 & \text{si} & x \in A \\ 0 & \text{sinon.} & \end{cases} \end{array}\right) \end{array}$$

Énoncés

On rappelle que les notations $f^{\rightarrow}$ pour l'application image directe et $f^{\leftarrow}$ pour l'application image réciproque sont des notations **locales** et **provisoires**.

Exercice 1 (◔★♣ Fonction indicatrice et opérations)
Soit E un ensemble. Pour $A \in \mathcal{P}(E)$ on rappelle que la *fonction indicatrice de* A, notée $\mathbb{1}_A$ est l'application

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_A : E &\to \{0,1\} \\ x &\mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A. \end{cases} \end{aligned}$$

1. Soient A et B des sous-ensembles de E. Montrer que $A \subset B$ **ssi** $\forall x \in E, \mathbb{1}_A(x) \leq \mathbb{1}_B(x)$.
2. Soient A et B des sous-ensembles de E. Exprimer les fonctions suivantes en fonction de $\mathbb{1}_A$ et de $\mathbb{1}_B$:
   - ▷ $\mathbb{1}_{E\setminus A}$,
   - ▷ $\mathbb{1}_{A\cap B}$,
   - ▷ $\mathbb{1}_{A\cup B}$.
3. Redémontrer les règles du calcul ensembliste à l'aide de fonctions indicatrices.

Indication p. 158 · Solution p. 165

Exercice 2 (◔★♣ Fonction indicatrice et identité)
Soit E un ensemble.

Montrer que

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(E) &\to \{0,1\}^E \\ A &\mapsto \mathbb{1}_A \end{aligned}$$

est bijective.

Indication p. 158 · Solution p. 168

Exercice 3 (◔★♣ Composée et image directe/réciproque)
Soient E, F, G trois ensembles. Soit $f \in \mathcal{F}(E,F)$ et $g \in \mathcal{F}(F,G)$.

1. Montrer que
$$(g \circ f)^{\rightarrow} = g^{\rightarrow} \circ f^{\rightarrow}.$$
2. Montrer que
$$(g \circ f)^{\leftarrow} = f^{\leftarrow} \circ g^{\leftarrow}.$$

Indication p. 158

Exercice 4 (◔★♣ Composée et réciproque)
Soient E, F, G trois ensembles. Soit $f \in \mathcal{F}(E,F)$ et $g \in \mathcal{F}(F,G)$. On suppose que f et g sont bijectives.

Montrer que $g \circ f$ est bijective et que

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

Indication p. 158

Exercice 5 (◔★♣ Injectivité/surjectivité et composée)
1. Montrer que la composée de deux fonctions injectives est injective.
2. Montrer que la composée de deux fonctions surjectives est surjective.
3. Que dire de la composée de deux fonctions bijectives ?

Indication p. 158

Exercice 6 (◔★ Épimorphisme et monomorphisme)
Soient E et F des ensembles et $f \in \mathcal{F}(E,F)$.

- ▷ On dit que f est un *épimorphisme* (d'ensembles) ssi pour tout ensemble G et toutes applications $g_1, g_2 \in \mathcal{F}(F,G)$ on a
$$g_1 \circ f = g_2 \circ f \Rightarrow g_1 = g_2.$$
- ▷ On dit que f est un *monomorphisme* (d'ensembles) ssi pour tout ensemble G et toutes applications $g_1, g_2 \in \mathcal{F}(G,E)$ on a
$$f \circ g_1 = f \circ g_2 \Rightarrow g_1 = g_2.$$

Montrer que
1. Une application est un épimorphisme (d'ensembles) **ssi** elle est surjective.
2. Une application est un monomorphisme (d'ensembles) **ssi** elle est injective.

Indication p. 158

Exercice 7 (◔★♣ Un des deux)
Soient E, F, G des ensembles, $f \in \mathcal{F}(E,F)$ et $g \in \mathcal{F}(F,G)$.

1. Montrer que **si** $g \circ f$ est injective **alors** f est injective.
2. Montrer que **si** $g \circ f$ est surjective **alors** g est surjective.
3. Donner des contre-exemples à toutes les autres implications.

Indication p. 158

Exercice 8 (◔★ Inversibilité à gauche et à droite)
Soient E, F des ensembles (E non vide) et $f \in \mathcal{F}(E,F)$.

1. Montrer que f est injective **ssi** il existe $g \in \mathcal{F}(F,E)$ tel que $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ (on dit alors que f est *inversible à gauche* ou que f est une *section*).
2. Montrer que f est surjective **ssi** il existe $g \in \mathcal{F}(F,E)$ tel que $f \circ g = \mathrm{Id}_F$ (on dit alors que f est *inversible à droite* ou que f est une *rétraction*).

Indication p. 158

Exercice 9 (◔★ Aller-retour)
Soient E, F des ensembles et $f \in \mathcal{F}(E,F)$.

1. Montrer
$$(\forall A \in \mathcal{P}(E), f^{\leftarrow}(f^{\rightarrow}(A)) = A) \Leftrightarrow (f \text{ est injective}).$$
2. Montrer
$$(\forall B \in \mathcal{P}(F), f^{\rightarrow}(f^{\leftarrow}(B)) = B) \Leftrightarrow (f \text{ est surjective}).$$

Indication p. 159

Exercice 10 (◔★ De recouvrement disjoint à partition)
Soit E un ensemble.

Soit $(A_i)_{i\in I}$ un recouvrement disjoint de E.

Expliquer succinctement pourquoi il existe un unique ensemble $\tilde{I}$ tel que $(A_i)_{i\in\tilde{I}}$ est une partition de E.

Indication p. 159

Exercice 11 (◔★ Traces d'un recouvrement disjoint)
Soit E un ensemble et $(A_i)_{i\in I}$ un recouvrement disjoint de E.

Soit $B \subset E$.

Montrer que $(B \cap A_i)_{i\in I}$ est un recouvrement disjoint de B.

Faire un schéma.

Indication p. 159 · Solution p. 169

Exercice 12 (◔★ Différence symétrique)
Soit E un ensemble.

Pour $(A,B) \in \mathcal{P}(E)^2$, on appelle la *différence symétrique* de A et B, noté $A\Delta B$, le sous-ensemble de E

$$A\Delta B = (A \cup B) \cap (E \setminus (A \cap B)).$$

1. Représenter sur un schéma la définition précédente.
2. Soit $(A,B) \in \mathcal{P}(E)^2$. Exprimer $\mathbb{1}_{(A\Delta B)}$ en fonction de $\mathbb{1}_A$ et de $\mathbb{1}_B$.
3. Montrer les propriétés suivantes
- $\forall (A,B) \in \mathcal{P}(E)^2, \quad A\Delta B = B\Delta A$.
- $\forall A \in \mathcal{P}(E)$,
  - $A\Delta A = \varnothing$
  - $A\Delta\left(\overline{A}\right) = E$
  - $A\Delta\varnothing = A$
  - $A\Delta E = \overline{A}$
- $\forall (A,B,C) \in \mathcal{P}(E)^3, \quad A\Delta(B\Delta C) = (A\Delta B)\Delta C$.

Indication p. 159

Exercice 13 (◔★ Images directes et réciproques d'union et d'intersections)
Soient E, F des ensembles, $f \in \mathcal{F}(E,F)$, $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties de E et $\left(B_j\right)_{j\in J}$ une famille de parties de F.

1. Montrer que

$$f^{\leftarrow}\left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) = \bigcup_{j\in J} f^{\leftarrow}(B_j)$$

et que

$$f^{\leftarrow}\left(\bigcap_{j\in J} B_j\right) = \bigcap_{j\in J} f^{\leftarrow}(B_j).$$

2. Montrer que

$$f^{\rightarrow}\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} f^{\rightarrow}(A_i)$$

et que

$$f^{\rightarrow}\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \subset \bigcap_{i\in I} f^{\rightarrow}(A_i).$$

Indication p. 159

Exercice 14 (◔★ Un petit contre-exemple infini)
On considère les fonctions

$$f : \begin{array}{l} \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \\ n \longmapsto n+1 \end{array}$$

et pour $a \in \mathbb{N}$

$$g_a : \begin{array}{l} \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \\ n \longmapsto \begin{cases} n-1 & \text{si } n \geq 1 \\ a & \text{sinon.} \end{cases} \end{array}$$

1. Étudier l'injectivité et surjectivité éventuelles de f et de g_a pour $a \in \mathbb{N}$.
2. Déterminer $g_a \circ f$ et $f \circ g_a$ pour $a \in \mathbb{N}$.
3. Commenter.

Indication p. 159

Exercice 15 (◔★ Un petit exercice formel)
Soit E un ensemble.

Soient A et B des sous-ensembles de E.

On suppose qu'il existe $C \in \mathcal{P}(E)$ tel que $A \cap C = B \cap C$ et $A \cup C = B \cup C$.

Montrer que $A = B$.

Indication p. 159

Exercice 16 (◑★ Injectivité surjectivité images directes et réciproques)
Soient E, F des ensembles et $f \in \mathcal{F}(E, F)$.

1. Montrer les équivalences suivantes
$$f \text{ injective} \Leftrightarrow f^{\rightarrow} \text{ injective} \Leftrightarrow f^{\leftarrow} \text{ surjective}.$$
2. Montrer les équivalences suivantes
$$f \text{ surjective} \Leftrightarrow f^{\rightarrow} \text{ surjective} \Leftrightarrow f^{\leftarrow} \text{ injective}.$$

Indication p. 160

Exercice 17 (◔★ Un théorème de Cantor)
Soit E un ensemble.

L'objectif de cet exercice est de montrer qu'il n'existe **pas** de surjection de E vers $\mathcal{P}(E)$.

Soit f une application de E vers $\mathcal{P}(E)$.

En considérant $A = \{x \in E \mid x \notin f(x)\}$ montrer que f n'est pas surjective.

Indication p. 160

Exercice 18 (◔★ $\liminf \leq \limsup$)
Soit E un ensemble. Soit $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une famille de sous-ensembles de E.

Montrer que

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\left(\bigcap_{k\in[\![n,+\infty[\![} A_k\right) \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}}\left(\bigcup_{k\in[\![n,+\infty[\![} A_k\right).$$

Indication p. 160

Exercice 19 (◔☆ Ensembles transitifs)
Un ensemble E est dit *transitif* **ssi**

$$\forall x \in E,\ x \subset E.$$

1. Montrer que $\varnothing$ est transitif.
2. Soit A un ensemble transitif. Montrer que $A \cup \{A\}$ est transitif.
3. Soit A un ensemble transitif. Montrer que $\mathcal{P}(A)$ est transitif.

Indication p. 160

Exercice 20 (◔★ Application de double trace)
Soit E un ensemble et $(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2$.

On considère l'application φ définie par

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(A)\times\mathcal{P}(B) \\ X & \longmapsto & (X\cap A, X\cap B)\end{array}$$

1. Montrer que φ est injective **ssi** $A \cup B = E$.
2. Montrer que φ est surjective **ssi** $A \cap B = \varnothing$.

Indication p. 160

Exercice 21 (◔★ Cas particulier d'images directest d'intersections)
Soient E, F des ensembles, $f \in \mathcal{F}(E,F)$ et $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties de E (avec I non vide).

1. Donner un exemple où $f^{\rightarrow}\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \neq \bigcap_{i\in I} f^{\rightarrow}(A_i)$.
2. Montrer que si f est injective alors $f^{\rightarrow}\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I} f^{\rightarrow}(A_i)$.
3. Montrer que si pour toutes parties A_1 et A_2 de E on a $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$ alors f est injective.

Indication p. 160

Exercice 22 (◑★ Construction de factorisations)
Soient E, F, G des ensembles (G non vide) et $f \in \mathcal{F}(E,G)$.

1. Soit $g \in \mathcal{F}(F,G)$. Montrer
$$(\exists h \in \mathcal{F}(E,F), f = g \circ h) \Leftrightarrow f^{\rightarrow}(E) \subset g^{\rightarrow}(F).$$
2. Soit $g \in \mathcal{F}(E,F)$. Montrer
$$(\exists h \in \mathcal{F}(F,G), f = h \circ g) \Leftrightarrow \forall x \in E, g^{\leftarrow}(\{g(x)\}) \subset f^{\leftarrow}(\{f(x)\}).$$

Indication p. 160

Exercice 23 (◔★ Curryfication)
Soient E, F et G trois ensembles.

Expliciter une bijection entre $\mathcal{F}(E, \mathcal{F}(F,G))$ et $\mathcal{F}(E \times F, G)$.

Commenter.

Indication p. 160 · Solution p. 169

Exercice 24 (◔★ Sera appliqué à $\mathcal{C}^k$ et $\mathcal{D}^k$)
Soit F un ensemble.

Soient $(C_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(D_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ deux familles de parties de F

- ▷ La famille $(C_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante, c'est à dire
$$\forall k \in \mathbb{N}, C_{k+1} \subset C_k.$$
- ▷ La famille $(D_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante, c'est à dire
$$\forall k \in \mathbb{N}^*, D_{k+1} \subset D_k.$$
- ▷ On a l'inclusion
$$\forall k \in \mathbb{N}^*, C_k \subset D_k.$$

On note
$$C_\infty = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} C_k,$$
$$D_\infty = \bigcap_{k\in\mathbb{N}^*} D_k.$$

Montrer que
$$C_\infty \subset D_\infty.$$

Indication p. 161

Exercice 25 (◔★ Propriétés universelles diluées)
Soient E, F, G trois ensembles.

1. Expliciter une bijection entre $\mathcal{F}(G,E) \times \mathcal{F}(G,F)$ et $\mathcal{F}(G, E\times F)$.
2. On suppose $E \cap F = \varnothing$. Expliciter une bijection entre $\mathcal{F}(E,G) \times \mathcal{F}(F,G)$ et $\mathcal{F}(E \sqcup F, G)$.
3. Commenter.

Indication p. 161

Exercice 26 (◔★ Deux équations ensemblistes)
Soit E un ensemble, A et B des sous-ensembles de E.

1. On considère l'équation

$$X \cup A = B \tag{1}$$

d'inconnue $X \in \mathcal{P}(E)$.

1.1. Montrer que (1) admet des solutions **ssi** $A \subset B$.

1.2. Montrer que, cette condition étant vérifiée, l'ensemble des solutions est alors

$$\{(B \setminus A) \cup T, T \in \mathcal{P}(A)\}.$$

2. On considère l'équation

$$X \cap A = B \tag{2}$$

d'inconnue $X \in \mathcal{P}(E)$.

2.1. Montrer que (2) admet des solutions **ssi** $A \supset B$.

2.2. Montrer que, cette condition étant vérifiée, l'ensemble des solutions est alors

$$\left\{B \cup T, T \in \mathcal{P}\left(\overline{A}\right)\right\}.$$

Indication p. 161 · Solution p. 169

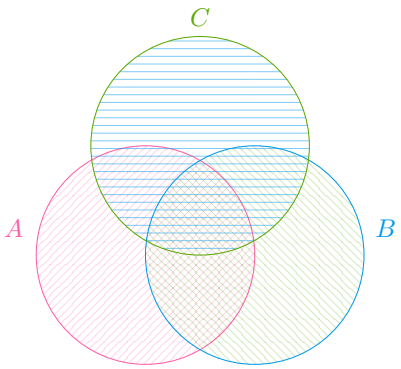
Exercice 27 (◔★ Ensemble des parties et opérations)
Soit E un ensemble.

Soient A et B des sous-ensembles de E.

- ▷ Montrer que $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.
- ▷ Montrer que $\mathcal{P}(A \cup B) \supset \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$. A-t-on égalité ?
- ▷ A-t-on $\mathcal{P}(A \times B) \supset \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$?

Indication p. 161

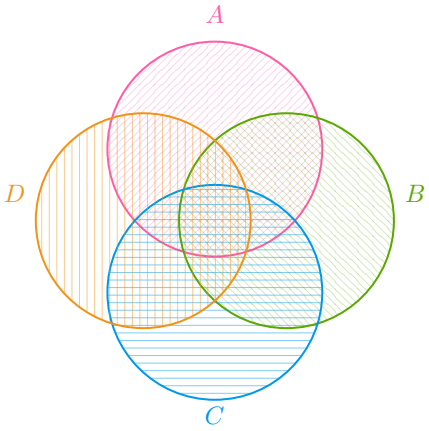
Exercice 28 (◔★ Attention aux diagrammes de Venn)
Soit E un ensemble.

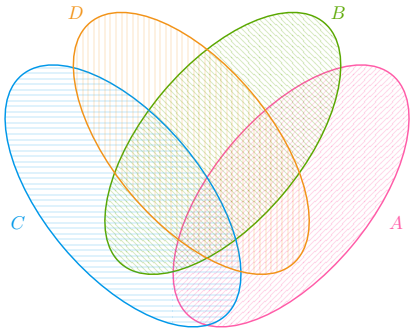


1. Soient A, B, C des parties de E.

   Étant donné $x \in E$, combien y a-t-il de disjonctions de cas pour l'appartenance de x à A, à B et à C ?
2. Recopier le schéma à droite sur votre feuille et annoter ce schéma pour représenter tous les différents cas.
3. Soient A, B, C, D des parties de E.

   Étant donné $x \in E$, combien y a-t-il de disjonctions de cas pour l'appartenance de x à A, à B, à C et à D ?
4. Recopier les schémas ci-dessous sur votre feuille et annoter ces schémas pour représenter tous les différents cas.





5. Commenter.

Indication p. 161

Exercice 29 (◔☆ Un petit tour)
Soit E un ensemble.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A_1, ..., A_n) \in \mathcal{P}(E)^n$.

Montrer que

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k = \left(\bigcup_{k=1}^{n-1} (A_k \setminus A_{k+1}) \right) \cup (A_n \setminus A_1) \cup \bigcap_{k=1}^{n} A_k.$$

Indication p. 161

Exercice 30 (◔★ Image directe et réciproques de complémentaires)
Soient E, F des ensembles et $f \in \mathcal{F}(E, F)$.

1. Montrer que,

$$\forall B \in \mathcal{P}(F), f^{\leftarrow}(F \setminus B) = E \setminus f^{\leftarrow}(B).$$

2. Montrer que,

$$(\forall\ A \in \mathcal{P}(E), f^{\rightarrow}(E \setminus A) \subset F \setminus f^{\rightarrow}(A)) \Leftrightarrow f \text{ injective .}$$

3. Montrer que,

$$(\forall\ A \in \mathcal{P}(E), f^{\rightarrow}(E \setminus A) \supset F \setminus f^{\rightarrow}(A)) \Leftrightarrow f \text{ surjective .}$$

Indication p. 161

Exercice 31 (◑★ Tiré en arrière et poussé en avant, le début)
Soient E_1, E_2 et F trois ensembles, et $f \in \mathcal{F}(E_1, E_2)$.

On note $f^* \in \mathcal{F}(\mathcal{F}(E_2, F), \mathcal{F}(E_1, F))$ l'application

$$\begin{aligned} f^* : \mathcal{F}(E_2, F) &\to \mathcal{F}(E_1, F) \\ \varphi &\mapsto \varphi \circ f \end{aligned}$$

et $f_* \in \mathcal{F}(\mathcal{F}(F, E_1), \mathcal{F}(F, E_2))$ l'application

$$\begin{aligned} f_* : \mathcal{F}(F, E_1) &\to \mathcal{F}(F, E_2) \\ \varphi &\mapsto f \circ \varphi \end{aligned}$$

1. Montrer que **si** f est surjective **alors** f^* est injective.
2. Montrer que **si** f est injective **alors** f_* est injective.
3. Montrer que **si** f est injective **alors** f^* est surjective.
4. Montrer que **si** f est surjective **alors** f_* est surjective.

Indication p. 161

Exercice 32 (◔★ Applications de restrictions et recollements)
Soit E un ensemble, et A, B deux parties de E.

Soit F un ensemble ayant au moins 2 éléments.

On considère l'application

$$\begin{aligned}\Phi : F^E &\to F^A \times F^B \\ f &\mapsto \left(f_{|A}, f_{|B}\right).\end{aligned}$$

1. Montrer que Φ est surjective **ssi** $A \cap B = \varnothing$.
2. Montrer que Φ est injective **ssi** $A \cup B = E$.

Indication p. 161

Exercice 33 (◔☆ Écriture d'ensembles)
Dans chacun des cas suivants écrire « formellement » les ensembles suivants:

1. L'ensemble des rationnels.
2. L'ensemble des nombres complexes imaginaires purs.
3. L'ensemble des racines n-ièmes de l'unité (pour $n \in \mathbb{N}^*$).
4. L'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ paires.
5. L'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ périodiques.

Indication p. 162

Exercice 34 (◔☆ Exemples d'applications)
Pour chacune des applications suivantes, déterminer si elle est injective, si elle est surjective, si elle est bijective.

1. $\begin{aligned}f_1 : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2\end{aligned}$
2. $\begin{aligned}f_2 : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}_+ \\ x &\mapsto x^2\end{aligned}$
3. $\begin{aligned}f_3 : \mathbb{R}_+ &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2\end{aligned}$
4. $\begin{aligned}f_4 : \mathbb{R}_+ &\to \mathbb{R}_+ \\ x &\mapsto x^2\end{aligned}$
5. $\begin{aligned}f_5 : \mathbb{R}_-^* &\to \mathbb{R}^* \\ x &\mapsto x^2\end{aligned}$
6. $\begin{aligned}f_6 : [-1,1] &\to [0,2] \\ x &\mapsto x^2\end{aligned}$

Indication p. 162

Exercice 35 (◔☆ Exemples de partitions)
Les familles suivantes sont-elles des recouvrements disjoints (resp. des partitions) de $\mathbb{N}$?

1. $(\{n\})_{n\in\mathbb{N}}$
2. $(\{n \in \mathbb{N} \mid p \text{ divise } n\})_{\substack{p\in\mathbb{N} \\ p \text{ premier}}}$
3. $(\llbracket n, 2n \rrbracket)_{n\in\mathbb{N}}$
4. $\left(\llbracket 0, 2^k \rrbracket\right)_{\substack{k\in\mathbb{N} \\ k \text{ est un carré}}}$

Exercice 36 (◑☆ Propriété universelle du produit $\prod$)
Soient E, F deux ensembles.

Exhiber un ensemble H et des applications $\pi_E \in \mathcal{F}(H, E)$, $\pi_F \in \mathcal{F}(H, F)$ tels que pour tout ensemble G et applications $f_E \in \mathcal{F}(G, E)$, $f_F \in \mathcal{F}(G, F)$ il existe une et unique application $u \in \mathcal{F}(G, H)$ telle que $f_E = \pi_E \circ u$ et $f_F = \pi_F \circ u$.

Commenter.

Indication p. 162

Exercice 37 (◑☆ Propriété universelle de l'union disjointe $\coprod$)
Soient E, F deux ensembles disjoints.

Exhiber un ensemble H et des applications $\iota_E \in \mathcal{F}(E, H)$, $\iota_F \in \mathcal{F}(F, H)$ tels que pour tout ensemble G et applications $f_E \in \mathcal{F}(E, G)$, $f_F \in \mathcal{F}(F, G)$ il existe une et unique application $u \in \mathcal{F}(H, G)$ telle que $f_E = u \circ \iota_E$ et $f_F = u \circ \iota_F$.

Commenter.

Indication p. 162

Exercice 38 (◔☆ Fonctions de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{N}$ sous contraintes)

1. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ surjectives et strictement croissantes.
2. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ injectives telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n) \leq n$.

Indication p. 162

Exercice 39 (◔☆ Une chaîne d'équivalence parmi d'autres)
Soient E, F des ensembles, $f \in \mathcal{F}(E,F)$.

Montrer l'équivalence entre

(i) $\forall A \in \mathcal{P}(E), f^{\leftarrow}(f^{\rightarrow}(A)) = A$
(ii) $\forall (A,B) \in (\mathcal{P}(E))^2, f^{\rightarrow}(A \cap B) = f^{\rightarrow}(A) \cap f^{\rightarrow}(B)$
(iii) $\forall (A,B) \in (\mathcal{P}(E))^2$ t.q $A \cap B = \varnothing, f^{\rightarrow}(A \cap B) = f^{\rightarrow}(A) \cap f^{\rightarrow}(B)$
(iv) $\forall (A,B) \in (\mathcal{P}(E))^2$ t.q $A \subset B, f^{\rightarrow}(B \setminus A) = f^{\rightarrow}(B) \setminus f^{\rightarrow}(A)$.

Indication p. 162

Exercice 40 (◑☆ Applications en vrac d'exercices précédents)
Soit E un ensemble.

1. Soient $f, g \in \mathcal{F}(E,E)$ tels que $g \circ f \circ g$ est bijective. Montrer que f et g sont bijectives.
2. Soit $f \in \mathcal{F}(E,E)$ telle que $f \circ f = f$.
  2.1. Donner un exemple où f n'est ni injective ni surjective.
  2.2. Montrer que si f est injective ou surjective alors $f = \mathrm{Id}_E$.
3. Soit $f \in \mathcal{F}(E,E)$ et $n, m \in \mathbb{N}$ tels que $n \neq m$.

  On suppose que $\underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}} = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{m \text{ fois}}$.

  Montrer que f est surjective ssi f est injective.
4. Soient $f, g, h \in \mathcal{F}(E,E)$ telles que $f \circ g$ et $g \circ h$ sont bijectives. Montrer que f,g et h sont bijectives.

Indication p. 162

Exercice 41 (◔☆ Juste appliquer la définition)
Déterminer $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\varnothing)))$.

Indication p. 163 · Solution p. 171

Exercice 42 (◔☆ Un des exercices les plus inintéressants)
Soit E un ensemble.

Soient A et B deux parties de E.

Montrer que si $\mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(B)$ alors $A \subset B$.

Indication p. 163

Exercice 43 (◔☆ Injectivité et union croissante)
Soient E, F des ensembles, $f \in \mathcal{F}(E,F)$ et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille de parties de E *croissante* c'est à dire telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, A_n \subset A_{n+1}.$$

On pose

$$A_\infty = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n.$$

Montrer que

$$f_{|A_\infty} \text{ injective } \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, f_{|A_n} \text{ injective .}$$

Indication p. 163

Exercice 44 (◔☆ Aller-retour bis)
Soient E, F des ensembles, $f \in \mathcal{F}(E,F)$.

1. Soit A une partie de E. Montrer que

$$f^{\leftarrow}(f^{\rightarrow}(A)) \supset A$$

et que

$$f^{\leftarrow}(f^{\rightarrow}(f^{\leftarrow}(f^{\rightarrow}(A)))) = f^{\leftarrow}(f^{\rightarrow}(A)).$$

2. Soit B une partie de F. Montrer que

$$f^{\rightarrow}(f^{\leftarrow}(B)) = f^{\rightarrow}(E) \cap B.$$

Indication p. 163

Exercice 45 (◑☆ Un peu de localité)

1. Soient E et F deux ensembles et $f \in F^E$.

On suppose que

$$\forall x \in E, \exists g \in E^F, g(f(x)) = x,$$
$$\forall y \in F, \exists g \in E^F, f(g(y)) = y.$$

Que dire de f ?

2. Soit E un ensemble et $f \in E^E$.

On suppose que

$$\forall x \in E, \exists n \in \mathbb{N}^*, \underbrace{(f \circ f \circ \cdots \circ f)}_{n \text{ fois}}(x) = x.$$

Montrer que f est bijective.

Indication p. 163

Exercice 46 (◔★ Encore des composées d'injections et de surjections)
Soient E, F, G des ensembles, $f \in \mathcal{F}(E, F)$, $g \in \mathcal{F}(F, G)$.

1. Montrer que **si** $g \circ f$ injective et f surjective **alors** g est injective.

2. Montrer que **si** $g \circ f$ surjective et g injective **alors** f est surjective.

Indication p. 163

Exercice 47 (◕☆ Quelques exemples de dénombrabilité)

1. Exhiber une bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$.

2. Exhiber une bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N}^2$.

3. Montrer qu'il n'existe pas de bijection entre $\mathbb{N}$ et $2^{\mathbb{N}}$.

4. Montrer qu'il existe une bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Q}$.

Indication p. 163

Exercice 48 (◔☆ Calculs ensemblistes en vrac)
Soit E un ensemble.

1. Soient A, B, C des parties de E telles que $A \cup B \subset A \cup C$ et $A \cap B \subset A \cap C$.

   Montrer que $B \subset C$.
2. Soient A, B, C, D des parties de E telles que $A \subset C$, $B \subset D$, $C \cap D = \varnothing$ et $A \cup B = C \cup D$.

   Montrer que $A = C$ et $B = D$.
3. Soient A, B, C des parties de E.

   Montrer que $(A \cup B) \setminus (A \cup C) \subset A \cup (B \setminus C)$.

Indication p. 163

Exercice 49 (◔☆ Produit cartésien, union et intersection)
Soient E et F deux ensembles.

Soient A_1, A_2 et B_1, B_2 des sous-ensembles de E et F respectivement.

Montrer que

- $(A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2) = (A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2)$,
- $(A_1 \cup A_2) \times (B_1 \cup B_2) = (A_1 \times B_1) \cup (A_1 \times B_2) \cup (A_2 \times B_1) \cup (A_2 \times B_2)$.

Faire un schéma.

Indication p. 164

Exercice 50 (◔☆ Peut-on simplifier les produits cartésiens ?)
Soient A et B des ensembles.

Montrer que pour tout ensemble X non vide, on a

$$A \times X = B \times X \Leftrightarrow A = B.$$

Indication p. 164 · Solution p. 172

Exercice 51 (◔☆ Un exercice pas si tordu)
Soit E un ensemble et A, B deux parties de E.

Montrer que

$$(\forall (a,b) \in A \times B, (a \in B \text{ ou } b \in A)) \Leftrightarrow ((\forall a \in A, a \in B) \text{ ou } (\forall b \in B, b \in A)).$$

Indication p. 164 · Solution p. 172

Exercice 52 (◑☆ Mini-problème: introduction à la finesse d'une partition)
Soit E un ensemble. On note $\text{Part}(E)$ l'ensemble des partitions de E.

Étant données $\alpha = (A_i)_{i\in I}$ et $\beta = \left(B_j\right)_{j\in J}$ des partitions de E, on dit que α est *plus fine* que β ssi

$$\forall i \in I, \exists j \in J, A_i \subset B_j.$$

On note alors $\alpha \prec \beta$.

1. Soient $\alpha = (A_i)_{i\in I}$ et $\beta = \left(B_j\right)_{j\in J}$ des partitions de E. Montrer que $\alpha \prec \beta$ ssi

$$\forall j \in J, \exists I_j \in \mathcal{P}(I), (A_i)_{i\in I_j} \text{ est une partition de } B_j.$$

2. Faire un schéma illustrant cette notion.

3. On s'intéresse à certaines propriétés de la relation $\prec$.

3.1. Montrer que pour tout $\alpha \in \text{Part}(E)$,

$$\alpha \prec \alpha.$$

3.2. Montrer que pour tous α, β, $\gamma \in \text{Part}(E)$,

$$(\alpha \prec \beta \text{ et } \beta \prec \gamma) \Rightarrow \alpha \prec \gamma.$$

3.3. Soient α, β des partitions. Que dire si $\alpha \prec \beta$ et $\beta \prec \alpha$? Commenter.

4. Expliciter

4.1. Une partition ω telle que pour toute partition α, on a $\alpha \prec \omega$.

4.2. Une partition ε telle que pour toute partition α, on a $\varepsilon \prec \alpha$.

5. Soient α et β des partitions. Montrer qu'il existe une partition γ telle que

$$(\gamma \prec \alpha \text{ et } \gamma \prec \beta) \text{ et } (\forall \delta \in \text{Part}(E), (\delta \prec \alpha \text{ et } \delta \prec \beta) \Rightarrow \delta \prec \gamma)$$

6. Commenter.

Indication p. 164

Exercice 53 (◕☆ Mini problème: La cinquième preuve du livre)
Pour $(a,b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{Z}$ on note

$$A_{a,b} = \{an + b, n \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{Z}.$$

Pour $U \subset \mathbb{Z}$ une partie de $\mathbb{Z}$ on dit que U est **ouverte** ssi

$$\forall x \in U, \exists (a,b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{Z}, x \in A_{a,b} \text{ et } A_{a,b} \subset U.$$

1. Montrer que toute union (quelconque) de parties ouvertes est ouverte.
2. Montrer que toute intersection finie de parties ouvertes est ouverte.

Pour $F \subset \mathbb{Z}$ une partie de $\mathbb{Z}$ on dit que F est **fermée** ssi $\overline{F}$ est ouverte.

1. Montrer que toute intersection (quelconque) de parties fermées est fermée et que toute union finie de parties fermées est fermée.
2. Montrer que pour tout $(a,b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{Z}$, $A_{a,b}$ est fermée.
3. En remarquant que

$$\mathbb{Z} \setminus \{-1,1\} = \bigcup_{p \text{ premier}} A_{p,0}$$

conclure qu'il existe une infinité de nombres premiers.

Indication p. 164

Indications

Indication 1 · Énoncé p. 139 (Fonction indicatrice et opérations)

1. Double implication et disjonction de cas.
2. Au pire disjonction de cas. Par règles opératoires on peut s'épargner quelques disjonctions de cas.
3. On connaît l'associativité, commutativité et distributivité des $+$ et $\times$ usuels. Et par le premier point $A = B$ ssi pour tout $x \in E$, $\mathbb{1}_A(x) = \mathbb{1}_B(x)$.

Solution p. 165

Indication 2 · Énoncé p. 139 (Fonction indicatrice et identité)
Injective et surjective ou plus simplement bijection réciproque.

Solution p. 168

Indication 3 · Énoncé p. 139 (Composée et image directe/réciproque)
Rédaction automatique.

Indication 4 · Énoncé p. 140 (Composée et réciproque)
Faire le calcul par associativité de $\circ$.

Indication 5 · Énoncé p. 140 (Injectivité/surjectivité et composée)
Rédaction automatique.

Pour les schémas on pourra procéder négativement.

Indication 6 · Énoncé p. 140 (Épimorphisme et monomorphisme)

1. Dans un sens procéder par contraposée, et à l'aide d'un élément non atteint par f construire g_1 et g_2. Dans l'autre constater que g_1 et g_2 coïncident sur l'image de f.
2. Dans un sens considérer pour x_1 et x_2 fixés des applications $G \to \{x_1\}$ et $G \to \{x_2\}$ pour un G non vide. Dans l'autre sens écrire la définition de l'injectivité.

Indication 7 · Énoncé p. 140 (Un des deux)
Au choix:

- ▷ Procéder par **rédaction automatique**.
- ▷ Procéder par contraposée.
- ▷ Utiliser l'exercice 6.

On pourra faire des schémas pour les contre-exemples.

Indication 8 · Énoncé p. 141 (Inversibilité à gauche et à droite)
Procéder par double implication à chaque fois.

Pour le sens direct du deuxième point on pourra admettre que l'on peut choisir un élément dans un ensemble **non vide** (à méditer).

Méditer aussi le lien avec l'exercice 6

Indication 9 · Énoncé p. 141 (Aller-retour)

1. Procéder par exemple par double implication.

   Pour le sens direct considérer le cas particulier des singletons.

   Pour le sens réciproque, un sens est toujours vrai. Utiliser l'injectivité pour l'autre.
2. Procéder par exemple par double implication.

   Pour le sens direct considérer le cas particulier de l'ensemble tout entier.

   Pour le sens réciproque, un sens est toujours vrai. Utiliser la surjectivité pour l'autre.

Indication 10 · Énoncé p. 141 (De recouvrement disjoint à partition)
Prendre $\tilde{I} = \{i \in I \mid A_i \neq \varnothing\}$.

Indication 11 · Énoncé p. 141 (Traces d'un recouvrement disjoint)
Rédaction automatique.

Solution p. 169

Indication 12 · Énoncé p. 142 (Différence symétrique)
Pour plus de simplicité utiliser les fonctions indicatrices pour la dernière question.

Indication 13 · Énoncé p. 142 (Images directes et réciproques d'union et d'intersections)

1. Ici on peut procéder par équivalence en « dépliant et repliant » l'appartenance à un des ensembles.
2. Faire de même. Remarquer que pour le dernier point on a $(\exists y \forall x, \mathcal{P}(x,y)) \Rightarrow (\forall x \exists y, \mathcal{P}(x,y))$ mais pas nécessairement la réciproque (problématique d'uniformité).

Indication 14 · Énoncé p. 143 (Un petit contre-exemple infini)
On peut commenter que (dans le cas E infini, on verra que dans le cas fini les résultats sont différents)

- ▹ il existe des applications de E vers E injectives non surjectives ainsi que surjectives et non injectives,
- ▹ que l'existence d'un inverse à gauche n'implique pas l'existence d'un inverse à droite,
- ▹ qu'il n'y a pas unicité des éventuels inverses à gauche.

Indication 15 · Énoncé p. 143 (Un petit exercice formel)
On peut commencer par faire un schéma.

Ensuite par exemple remarquer que par symétrie il suffit de montrer $A \subset B$. Prendre $x \in A$ et effectuer une disjonction de cas selon l'appartenance éventuelle de x à C.

Alternativement à l'aide du schéma considérer $((A \cup C) \setminus C) \cup (A \cap C)$.

Indication 16 · Énoncé p. 143 (Injectivité surjectivité images directes et réciproques)
Par exemple montrer que les deux autres propositions sont équivalentes à f injective.

Indication 17 · Énoncé p. 144 (Un théorème de Cantor)
Montrer par l'absurde que $A \notin f^{\rightarrow}(E)$.

Indication 18 · Énoncé p. 144 ($\liminf \leq \limsup$)
Déplier et replier les définitions.

Alternativement réussir à interpréter les objets, et remarquer que «à partir d'un certain rang» implique «une infinité de fois».

Indication 19 · Énoncé p. 144 (Ensembles transitifs)
Ne pas se laisser perturber par la définition et utiliser les définitions.

Indication 20 · Énoncé p. 144 (Application de double trace)
Faire des schémas.

1. Dans un sens par exemple constater que pour tout $x \in E$, $\varphi(\{x\}) \neq (\varnothing, \varnothing)$. Dans l'autre reconstruire X à partir de $X \cap A$ et $X \cap B$.
2. Dans un sens constater que l'on peut atteindre $(A, \varnothing)$ (ainsi que $(\varnothing, B)$). Dans l'autre sens pour construire explicitement un antécédent.

Indication 21 · Énoncé p. 145 (Cas particulier d'images directest d'intersections)

1. Faire un schéma.
2. Que dire si pour tout $i \in I$ il existe $x_i \in A_i$ tel que $y = f(x_i)$ et si f est injective ?
3. Prendre des singletons.

Indication 22 · Énoncé p. 145 (Construction de factorisations)
Commencer par constater qu'il s'agit de l'exercice 8. Ne pas hésiter à **faire des schémas**.

1. Un sens est immédiat. Dans l'autre sens construire explicitement h en choisissant un élément.
2. Un sens est immédiat. Dans l'autre sens on peut constater que la propriété est équivalente à

$$\forall (x_1, x_2) \in E^2, g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow f(x_1) = f(x_2).$$

Construire explicitement h en vérifiant la bonne définition.

Indication 23 · Énoncé p. 145 (Curryfication)
Méditer sur cette suite de symboles: $x \mapsto (y \mapsto f(x, y))$.

On constate qu'on a donc avec les notations de l'exercice 25, $\left(G^F\right)^E \simeq G^{E \times F}$.

Solution p. 169

Indication 24 · Énoncé p. 146 (Sera appliqué à $\mathcal{C}^k$ et $\mathcal{D}^k$)
Déplier les définitions.

Indication 25 · Énoncé p. 146 (Propriétés universelles diluées)

1. Mettre les images en couple. Ne pas oublier de montrer qu'il s'agit d'une bijection.
2. Disjoncter selon les antécédents. Ne pas oublier de montrer qu'il s'agit d'une bijection.
3. On pourrait utiliser ainsi les unions et produits cartésiens.

   Plus prosaïquement on peut commenter qu'on a donc (en notant $A \simeq B$ si il existe une bijection entre A et B)

$$E^G \times F^G \simeq (E \times F)^G \quad \text{et} \quad G^E \times G^F \simeq G^{E \sqcup F}.$$

Indication 26 · Énoncé p. 147 (Deux équations ensemblistes)
Faire un schéma et le regarder.

Solution p. 169

Indication 27 · Énoncé p. 147 (Ensemble des parties et opérations)
Faire un schéma, attention au type des objets.

Indication 28 · Énoncé p. 148 (Attention aux diagrammes de Venn)
Pour n ensembles on a 2^n cas possibles.

Constater que le schéma avec des cercles manque des cas ! Il peut donc mener à des intuitions fausses.

Indication 29 · Énoncé p. 149 (Un petit tour)
Par exemple par récurrence.

Indication 30 · Énoncé p. 149 (Image directe et réciproques de complémentaires)

1. Par exemple « déplier et replier » les définitions.
2. Procéder par double implication. Dans un sens considérer des singletons. Dans l'autre sens travailler sur les éléments.
3. Procéder par double implication. Dans un sens considérer l'ensemble vide. Dans l'autre sens travailler sur les éléments.

Indication 31 · Énoncé p. 149 (Tiré en arrière et poussé en avant, le début)
Ne pas avoir peur des définitions et remarquer le lien avec d'autres exercices du TD.

Indication 32 · Énoncé p. 150 (Applications de restrictions et recollements)

1. Dans un sens déterminer un antécédent de deux constantes différentes. Dans l'autre sens construire un antécédent par disjonction.
2. Dans un sens que dire de la constante égale à 1 et de $\mathbb{1}_{A \cup B}$. Dans l'autre reconstituer f à partir de $f_{|A}$ et $f_{|B}$.

Indication 33 · Énoncé p. 150 (Écriture d'ensembles)
Choisir entre extension et compréhension, le plus simple est probablement: extension, les deux, les deux, compréhension, compréhension.

Indication 34 · Énoncé p. 150 (Exemples d'applications)
Commencer par, dans chacun des cas, faire un petit schéma.

D'où l'importance des ensembles de départ et d'arrivée ! Les réponses sont (il faut les démontrer, avec une preuve, et donc parfois un contre-exemple)

1. Ni injective ni surjective.
2. Surjective non injective.
3. Injective non surjective.
4. Bijective.
5. Injective non surjective.
6. Ni injective ni surjective.

Indication 36 · Énoncé p. 151 (Propriété universelle du produit $\prod$)
Par exemple $H = E \times F$ muni des projections canoniques convient (à démontrer).

Beaucoup de commentaires possibles: faire un schéma, essayer de montrer que (H, π_E, π_F) est unique à bijection près, et donc qu'on a défini par un « langage catégorique » les produits.

Indication 37 · Énoncé p. 151 (Propriété universelle de l'union disjointe $\coprod$)
Par exemple $H = E \sqcup F$ muni des injections canoniques convient (à démontrer).

Beaucoup de commentaires possibles: faire un schéma, essayer de montrer que (H, ι_E, ι_F) est unique à bijection près, et donc qu'on a défini par un « langage catégorique » les unions disjointes.

On observe que le produit $\prod$ et l'union disjointe $\coprod$ sont des notions duales !

Indication 38 · Énoncé p. 151 (Fonctions de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{N}$ sous contraintes)
Par récurrence il n'y a que $\mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$.

Indication 39 · Énoncé p. 152 (Une chaîne d'équivalence parmi d'autres)
Tout cela équivaut à l'injectivité.

Procéder par chaîne d'implications.

Indication 40 · Énoncé p. 152 (Applications en vrac d'exercices précédents)
1. Par l'exercice 5 en décomposant $g \circ f \circ g$ des deux façons, g est injective et surjective. Puis $f = g^{-1} \circ (g \circ f \circ g) \circ g^{-1}$ est bijective comme composée de bijections.
2. Prendre par exemple une projection comme contre-exemple. Si f injective, simplifier par l'exercice 6 la relation $f \circ f = f \circ \mathrm{Id}_E$. De même pour surjective.
3. De même simplifier à gauche ou à droite puis conclure.
4. Constater que g est bijective. Composer $f \circ g$ et $g \circ h$ par g^{-1}.

Indication 41 · Énoncé p. 152 (Juste appliquer la définition)
Juste prendre son temps et appliquer la définition.

Solution p. 171

Indication 42 · Énoncé p. 152 (Un des exercices les plus inintéressants)
Remarquer que $A \in \mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(B)$.

Indication 43 · Énoncé p. 153 (Injectivité et union croissante)
Dans un sens la restriction d'une injection est une injection.

Dans l'autre sens montrer que si $x, y \in A_\infty$ alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $x, y \in A_N$.

Indication 44 · Énoncé p. 153 (Aller-retour bis)
Faire des schémas.

Ensuite rédaction automatique.

Indication 45 · Énoncé p. 154 (Un peu de localité)

1. Le premier point ne dit rien (à part une non vacuité): en effet on peut toujours construire à x une telle fonction (par exemple la constante égale à x).

   Le second point permet de montrer que f est surjective.
2. On a la surjectivité. On peut récupérer l'injectivité en prenant par exemple n_x et n_y.

Indication 46 · Énoncé p. 154 (Encore des composées d'injections et de surjections)

1. Écrire la définition.
2. Idem.

Indication 47 · Énoncé p. 154 (Quelques exemples de dénombrabilité)
Ne pas oublier de vérifier qu'il s'agit bien de bijections.

1. Par exemple, $n \mapsto (-1)^n \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$.
2. Par exemple $(n, p) \mapsto 2^p(2n+1)$ (puis $\mathbb{N}^*$ vers $\mathbb{N}$).
3. Remarquer que par fonction indicatrice $2^{\mathbb{N}}$ est en bijection avec $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Faire l'exercice 17.
4. Plusieurs méthodes.

   Exhiber deux injections $\mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ et $\mathbb{Q} \to \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ et utiliser le théorème de Cantor-Bernstein, cf DM Bonus.

   Ou bien regarder le premier DM Bonus.

Indication 48 · Énoncé p. 155 (Calculs ensemblistes en vrac)
Faire des schémas.

Ensuite soit procéder en travaillant avec des éléments ou bien directement par calculs ensemblistes.

Indication 49 · Énoncé p. 155 (Produit cartésien, union et intersection)
Rédaction automatique.

Pour le schéma faire le cas $E = F = \mathbb{R}$ où les ensembles sont des intervalles.

Indication 50 · Énoncé p. 155 (Peut-on simplifier les produits cartésiens ?)
Encore une rédaction automatique.

Solution p. 172

Indication 51 · Énoncé p. 155 (Un exercice pas si tordu)
Commencer par le sens $\Longleftarrow$.

Pour le sens $\Rightarrow$, faire une rédaction automatique, soit en montrant un ou soit par contraposée.

Solution p. 172

Indication 52 · Énoncé p. 156 (Mini-problème: introduction à la finesse d'une partition)

1. Par double implication. On pourra commencer par traiter l'exercice 11.
2. /
3. Vérifier les axiomes. Pour le dernier point, il s'agit de la différence entre famille et ensemble.
4. $\omega = (E)$ et $\varepsilon = (\{x\})_{x\in E}$
5. Faire un schéma et méditer sur les $A_i \cap B_j$.
6. On obtient donc une relation d'ordre avec une notion de minimum.

Indication 53 · Énoncé p. 157 (Mini problème: La cinquième preuve du livre)

1. Rédaction automatique.
2. Il « suffit » de faire pour 2 et conclure par récurrence.

   Remarquer que pour tout $\tilde{b} \in A_{a,b}$, $A_{a,b} = A_{a,\tilde{b}}$.

   Pour U_1 et U_2 deux ouverts remarquer que si $U_1 \cap U_2 \neq \varnothing$ alors il existe $\tilde{b} \in U_1 \cap U_2$.

   Prendre ensuite tout multiple commun des deux raisons.
3. Passage au complémentaire des propriétés sur les ouverts.
4. Écrire $\overline{A_{a,b}}$ comme l'union de $a-1$ ouverts.
5. Si l'ensemble des nombres premiers est fini, alors $\{-1,1\}$ est le complémentaire d'une union finie de fermés, donc ouvert.

   Mais il est non vide fini.

Solutions

Solution pour l'exercice 1 · Énoncé p. 139 · Indication p. 158 (Fonction indicatrice et opérations)

1. On procède par double implication.

▷ $\Rightarrow$ Supposons $A \subset B$.

Soit $x \in E$.

On procède par disjonction de cas.

▷ Si $x \in A$, alors $\mathbb{1}_A(x) = 1$. De plus comme $A \subset B$ on a aussi $x \in B$ et donc $\mathbb{1}_B(x) = 1$. Donc $\mathbb{1}_A(x) \leq \mathbb{1}_B(x)$.
▷ Si $x \notin A$, alors $\mathbb{1}_A(x) = 0$. De plus $\mathbb{1}_B(x) \in \{0, 1\}$. Donc $\mathbb{1}_A(x) \leq \mathbb{1}_B(x)$.

Dans tous les cas

$$\forall x \in E, \mathbb{1}_A(x) \leq \mathbb{1}_B(x).$$

▷ Supposons maintenant que $\forall x \in E, \mathbb{1}_A(x) \leq \mathbb{1}_B(x)$.

Soit $x \in A$.

Alors $\mathbb{1}_A(x) = 1$. Donc $1 \leq \mathbb{1}_B(x)$ et $\mathbb{1}_B(x) \in \{0, 1\}$. Donc $\mathbb{1}_B(x) = 1$, c'est à dire $x \in B$.

On a donc $A \subset B$.

On a donc bien montré que $\boxed{A \subset B \textbf{ ssi } \forall x \in E, \mathbb{1}_A(x) \leq \mathbb{1}_B(x)}$.

2. ▷ On a

$$\boxed{\mathbb{1}_{E\setminus A} = 1 - \mathbb{1}_A}$$

c'est à dire

$$\forall x \in E, \mathbb{1}_{E\setminus A}(x) = 1 - \mathbb{1}_A(x).$$

En effet, soit $x \in E$, on vérifie l'égalité par disjonction de cas:

▷ Si $x \in A$, alors $\mathbb{1}_A(x) = 1$ et $\mathbb{1}_{E\setminus A}(x) = 0 = 1 - 1$.
▷ Si $x \notin A$, alors $\mathbb{1}_A(x) = 0$ et $\mathbb{1}_{E\setminus A}(x) = 1 = 1 - 0$.

▷ On a

$$\boxed{\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B}$$

c'est à dire

$$\forall x \in E, \mathbb{1}_{A\cap B}(x) = \mathbb{1}_A(x) \times \mathbb{1}_B(x).$$

En effet soit $x \in E$, on vérifie par disjonction de cas:

▷ Si $x \in A$ et $x \in B$, alors $\mathbb{1}_A(x) = 1$ et $\mathbb{1}_B(x) = 1$ et $\mathbb{1}_{A\cap B}(x) = 1 = 1 \times 1$.
▷ Si $x \notin A$ ou $x \notin B$, alors $\mathbb{1}_A(x) = 0$ ou $\mathbb{1}_B(x) = 0$ d'où $\mathbb{1}_A(x) \times \mathbb{1}_B(x) = 0$. Et $\mathbb{1}_{A\cap B}(x) = 0$.

▷ On a

$$A \cup B = E \setminus ((E \setminus A) \cap (E \setminus B))$$

et par conséquent

$$\begin{aligned}\mathbb{1}_{A\cup B} &= 1 - \mathbb{1}_{(E\setminus A)\cap(E\setminus B)} \\ &= 1 - \mathbb{1}_{E\setminus A} \times \mathbb{1}_{E\setminus B} \\ &= \boxed{1 - (1 - \mathbb{1}_A) \times (1 - \mathbb{1}_B)}\end{aligned}$$

c'est à dire

$$\forall x \in E, \mathbb{1}_{A\cup B}(x) = 1 - (1 - \mathbb{1}_A(x)) \times (1 - \mathbb{1}_B(x)).$$

On peut aussi réécrire cette égalité en (développement)

$$\mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B$$

ou encore (disjonction de cas)

$$\mathbb{1}_{A\cup B} = \max(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B).$$

Variante

Plutôt que d'utiliser $A \cup B = E \setminus ((E \setminus A) \cap (E \setminus B))$ on aurait aussi pu utiliser une disjonction de cas.

Soit $x \in E$. On procède par disjonction de cas:

- ▷ Si $x \in A$ et $x \in B$.

  Alors $x \in A \cup B$ d'où $\mathbb{1}_{A\cup B}(x) = 1$.

  De plus $\mathbb{1}_A(x) = 1$ et $\mathbb{1}_B(x) = 1$ d'où $1 - (1 - \mathbb{1}_A(x)) \times (1 - \mathbb{1}_B(x)) = 1 - (1-1)(1-1) = 1$.
- ▷ Si $x \in A$ et $x \notin B$.

  Alors $x \in A \cup B$ d'où $\mathbb{1}_{A\cup B}(x) = 1$.

  De plus $\mathbb{1}_A(x) = 1$ et $\mathbb{1}_B(x) = 0$ d'où $1 - (1 - \mathbb{1}_A(x)) \times (1 - \mathbb{1}_B(x)) = 1 - (1-1)(1-0) = 1$.
- ▷ Si $x \notin A$ et $x \in B$.

  Alors $x \in A \cup B$ d'où $\mathbb{1}_{A\cup B}(x) = 1$.

  De plus $\mathbb{1}_A(x) = 0$ et $\mathbb{1}_B(x) = 1$ d'où $1 - (1 - \mathbb{1}_A(x)) \times (1 - \mathbb{1}_B(x)) = 1 - (1-0)(1-1) = 1$.
- ▷ Si $x \notin A$ et $x \notin B$.

  Alors $x \notin A \cup B$ d'où $\mathbb{1}_{A\cup B}(x) = 0$.

  De plus $\mathbb{1}_A(x) = 0$ et $\mathbb{1}_B(x) = 0$ d'où $1 - (1 - \mathbb{1}_A(x)) \times (1 - \mathbb{1}_B(x)) = 1 - (1-0)(1-0) = 0$.

Dans tous les cas

$$\forall x \in E, \mathbb{1}_{A\cup B}(x) = 1 - (1 - \mathbb{1}_A(x)) \times (1 - \mathbb{1}_B(x)).$$

3. Pour démontrer les règles du calcul ensembliste, on constate que d'après la première question on a pour deux parties A et B,

$$\boxed{(A = B) \Leftrightarrow (\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B)}.$$

Pour montrer que deux parties sont égales il suffit donc de montrer qu'elles ont la même fonction indicatrice.

Démontrons à titre d'exemple quelques règles du calcul ensembliste à l'aide des fonctions indicatrices (si vous souhaitez voir les autres, n'hésitez pas à demander).

▷ **Double négation**

Soit A une partie de E.

On a

$$\begin{aligned}\mathbb{1}_{E\setminus(E\setminus A)} &= 1 - \mathbb{1}_{E\setminus A}\\ &= 1 - (1 - \mathbb{1}_A)\\ &= \mathbb{1}_A.\end{aligned}$$

Donc $\boxed{E \setminus (E \setminus A) = A}$.

▷ **Associativité de l'intersection**

Soient A, B et C des parties de E.

On a

$$\begin{aligned}\mathbb{1}_{A\cap(B\cap C)} &= \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_{B\cap C}\\ &= \mathbb{1}_A \times (\mathbb{1}_B \times \mathbb{1}_C)\\ &= (\mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B) \times \mathbb{1}_C\\ &= \mathbb{1}_{A\cap B} \times \mathbb{1}_C\\ &= \mathbb{1}_{(A\cap B)\cap C}.\end{aligned}$$

D'où $\boxed{A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C}$.

▷ **Distributivité de l'intersection sur l'union**

Soient A, B et C des parties de E.

On a

$$\begin{aligned}\mathbb{1}_{A\cap(B\cup C)} &= \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_{B\cup C}\\ &= \mathbb{1}_A \times (\mathbb{1}_B + \mathbb{1}_C - \mathbb{1}_B \times \mathbb{1}_C)\\ &= \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B + \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_C - \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B \times \mathbb{1}_C\end{aligned}$$

tandis que (comme $\mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_A = \mathbb{1}_A$ car $\mathbb{1}_A$ est à valeurs dans $\{0, 1\}$)

$$\begin{aligned}\mathbb{1}_{(A\cap B)\cup(A\cap C)} &= \mathbb{1}_{A\cap B} + \mathbb{1}_{A\cap C} - \mathbb{1}_{A\cap B} \times \mathbb{1}_{A\cap C}\\ &= \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B + \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_C - \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B \times \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_C\\ &= \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B + \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_C - \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B \times \mathbb{1}_C.\end{aligned}$$

Ces deux fonctions indicatrices sont donc égales, d'où

$$\boxed{A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)}.$$

Solution pour l'exercice 2 · Énoncé p. 139 · Indication p. 158 (Fonction indicatrice et identité)

Remarque préliminaire

L'injectivité n'est rien d'autre que le constat que $A = B$ **ssi** $\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B$.

Pour la surjectivité il faut, étant donné une fonction $f : E \to \{0,1\}$, montrer qu'il existe un ensemble A tel que $\mathbb{1}_A = f$.

Mais construire un tel ensemble revient à exhiber la réciproque de l'application et donc à montrer directement la bijectivité.

Notons

$$\begin{aligned} \Phi : \mathcal{P}(E) &\to \{0,1\}^E \\ A &\mapsto \mathbb{1}_A \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \Psi : \{0,1\}^E &\to \mathcal{P}(E) \\ f &\mapsto \{x \in E \mid f(x) = 1\} \end{aligned}$$

c'est à dire avec les notations d'images réciproques et directes $\Psi : f \mapsto f^{\leftarrow}(\{1\})$.

Montrons que Φ et Ψ sont réciproques l'une de l'autre.

- ▷ On a bien $\Phi : \mathcal{P}(E) \to \{0,1\}^E$ et $\Psi : \{0,1\}^E \to \mathcal{P}(E)$.
- ▷ Soit $A \in \mathcal{P}(E)$.

  On a

  $$\begin{aligned} \Psi(\Phi(A)) &= \Psi(\mathbb{1}_A) \\ &= \{x \in E \mid \mathbb{1}_A(x) = 1\} \\ &= A. \end{aligned}$$

  Et donc on a bien

  $$\boxed{\Psi \circ \Phi = \mathrm{Id}_{\mathcal{P}(E)}}.$$

- ▷ Soit $f \in \{0,1\}^E$.

  On a

  $$\begin{aligned} \Phi(\Psi(f)) &= \Phi(\{x \in E \mid f(x) = 1\}) \\ &= \mathbb{1}_{(\{x \in E \mid f(x)=1\})}. \end{aligned}$$

  On a bien
  - ▷ f et $\Phi(\Psi(f))$ ont le même ensemble de départ (E) et le même ensemble d'arrivée ($\{0,1\}$).
  - ▷ Pour tout $\xi \in E$, par disjonction de cas
    - ▷ Si $f(\xi) = 1$ alors $\xi \in \{x \in E \mid f(x) = 1\}$ et donc $\mathbb{1}_{(\{x \in E \mid f(x)=1\})}(\xi) = 1$.
    - ▷ Sinon, comme f est à valeurs dans $\{0,1\}$ on a $f(\xi) = 0$. Et comme $\xi \notin \{x \in E \mid f(x) = 1\}$ on a $\mathbb{1}_{(\{x \in E \mid f(x)=1\})}(\xi) = 0$.

    Et donc dans tous les cas $f(\xi) = \mathbb{1}_{(\{x \in E \mid f(x)=1\})}(\xi)$.

  D'où $\Phi(\Psi(f)) = f$.

Et donc

$$\boxed{\Phi \circ \Psi = \mathrm{Id}_{\{0,1\}^E}}.$$

On a donc Φ et Ψ réciproques l'une de l'autre et en particulier $\boxed{\Phi \text{ est bijective}}$.

Solution pour l'exercice 11 · Énoncé p. 141 · Indication p. 159 (Traces d'un recouvrement disjoint)
$(B \cap A_i)_{i\in I}$ est bien une famille de parties de B (car pour tout $i \in I$, $B \cap A_i \subset B$).

De plus

- ▷ Comme $(A_i)_{i\in I}$ est un recouvrement de E,

  $$E = \bigcup_{i\in I} A_i$$

  d'où on déduit

  $$B = B \cap E = B \cap \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I}(B \cap A_i).$$

  c'est à dire que $(B \cap A_i)_{i\in I}$ est un recouvrement de B.
- ▷ Soient $i_1, i_2 \in I$ tels que $\left(A_{i_1} \cap B\right) \cap \left(A_{i_2} \cap B\right) \neq \varnothing$.

  Alors en particulier $A_{i_1} \cap A_{i_2} \supset \left(A_{i_1} \cap B\right) \cap \left(A_{i_2} \cap B\right)$ est non vide.

  Comme les $(A_i)_{i\in I}$ sont deux à deux disjoints, on en déduit que $i_1 = i_2$.

  Donc les $(B \cap A_i)_{i\in I}$ sont deux à deux disjoints.

On a donc bien montré que $\boxed{(B \cap A_i)_{i\in I} \text{ est un recouvrement disjoint de } B}$.

Solution pour l'exercice 23 · Énoncé p. 145 · Indication p. 160 (Curryfication)
Posons

$$\begin{aligned}\Phi : \mathcal{F}(E, \mathcal{F}(F, G)) &\to \mathcal{F}(E \times F, G)\\ f &\mapsto ((x, y) \mapsto (f(x))(y))\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\Psi : \mathcal{F}(E \times F, G) &\to \mathcal{F}(E, \mathcal{F}(F, G))\\ g &\mapsto (x \mapsto (y \mapsto g(x, y))).\end{aligned}$$

Il suffit alors de vérifier que $\Phi \circ \Psi = \mathrm{Id}_{\mathcal{F}(E\times F,G)}$ et $\Psi \circ \Phi = \mathrm{Id}_{\mathcal{F}(E,\mathcal{F}(F,G))}$.

[À rédiger par rédaction automatique.]

Solution pour l'exercice 26 · Énoncé p. 147 · Indication p. 161 (Deux équations ensemblistes)

1. **1.1.** On procède par double implication.

- ▷ Si (1) admet des solutions, avec X une telle solution, on a $A \subset X \cup A = B$ et donc $A \subset B$.

▷ Si $A \subset B$ alors en particulier on a

$$A \cup \left(B \cap \overline{A}\right) = (A \cup B) \cap \underbrace{\left(A \cup \overline{A}\right)}_{E} = A \cup B = B.$$

Et donc par exemple $B \cap \overline{A} = B \setminus A$ est une solution de (1).

On a donc bien

$$\boxed{A \subset B \Leftrightarrow (1) \text{ admet des solutions}}.$$

1.2. On procède par exemple par double inclusion.

▷ Soit $T \in \mathcal{P}(A)$. En particulier $T \subset A \subset B$.

Alors

$$\begin{aligned}((B \setminus A) \cup T) \cup A &= ((B \setminus A) \cup A) \cup T \\ &= B \cup T = B,\end{aligned}$$

et donc $(B \setminus A) \cup T$ est une solution de (1).

▷ Soit X une solution de (1).

Posons

$$T = X \cap A.$$

On a bien $T \subset A$ i.e $T \in \mathcal{P}(A)$.

De plus, comme $X \subset B$,

$$\begin{aligned}X &= (X \cap A) \cup \left(X \cap \overline{A}\right) \\ &= T \cup \left((X \cap B) \cap \overline{A}\right) \\ &= T \cup (X \cap (B \setminus A)).\end{aligned}$$

Or $B \setminus A \subset X$: en effet, si $x \in B \setminus A$, alors $x \in B = X \cup A$ et $x \notin A$, donc $x \in X$. Ainsi $X \cap (B \setminus A) = B \setminus A$ et finalement

$$X = (B \setminus A) \cup T.$$

Ainsi on a bien montré que l'ensemble des solutions est

$$\boxed{\{(B \setminus A) \cup T, T \in \mathcal{P}(A)\}}.$$

2. On peut faire exactement de même. Proposons une variation qui revient à passer au complémentaire la question précédente.

En effet

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(E) &\to \mathcal{P}(E) \\ X &\mapsto \overline{X}\end{aligned}$$

est **bijective** (par exemple car elle est sa propre réciproque) et donc on obtient:

2.1. L'équation (2) admet des solutions ssi l'équation

$$\overline{X \cap A} = \overline{B}$$

admet des solutions, c'est à dire ssi l'équation

$$\overline{X} \cup \overline{A} = \overline{B}$$

en admet et (toujours par bijectivité de l'application complémentaire), par la question précédente cela équivaut à

$$\overline{A} \subset \overline{B}.$$

Or on a

$$\left(\overline{A} \subset \overline{B}\right) \iff (A \supset B)$$

et donc

$$\boxed{A \supset B \Leftrightarrow (2) \text{ admet des solutions}}.$$

2.2. Par la question précédente et le raisonnement que l'on vient d'effectuer, la condition étant vérifiée, l'ensemble des solutions est alors

$$\left\{\overline{Y},\ Y \in \left\{\left(\overline{B} \setminus \overline{A}\right) \cup T, T \in \mathcal{P}\left(\overline{A}\right)\right\}\right\}.$$

Il s'agirait ensuite de faire un travail ensembliste pour réécrire cet ensemble.

Ou bien, plus directement, par double inclusion :

- Soit $T \in \mathcal{P}\left(\overline{A}\right)$. Comme $B \subset A$ et $T \cap A = \varnothing$,
$$(B \cup T) \cap A = (B \cap A) \cup (T \cap A) = B \cup \varnothing = B,$$
donc $B \cup T$ est une solution de (2).
- Soit X une solution de (2).

  Posons
$$T = X \cap \overline{A}.$$
  On a bien $T \subset \overline{A}$ i.e $T \in \mathcal{P}\left(\overline{A}\right)$, et
$$X = (X \cap A) \cup \left(X \cap \overline{A}\right) = B \cup T.$$

Ainsi l'ensemble des solutions est bien

$$\boxed{\left\{B \cup T, T \in \mathcal{P}\left(\overline{A}\right)\right\}}.$$

Solution pour l'exercice 41 · Énoncé p. 152 · Indication p. 163 (Juste appliquer la définition)
On a

- $\mathcal{P}(\varnothing) = \{\varnothing\}$,
- $\mathcal{P}(\{\varnothing\}) = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$,
- $\mathcal{P}(\{\varnothing, \{\varnothing\}\}) = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$.

Et donc

$$\boxed{\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\varnothing))) = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}}.$$

Solution pour l'exercice 50 · Énoncé p. 155 · Indication p. 164 (Peut-on simplifier les produits cartésiens ?)
Soit X un ensemble non vide.

On procède par double implication.

▷ $\boxed{\Longleftarrow}$

Supposons $A = B$. Alors $A \times X = B \times X$.

▷ $\boxed{\Rightarrow}$

Supposons $A \times X = B \times X$.

Soit $a \in A$.

Fixons $x \in X$ (possible car $X \neq \varnothing$).

Alors $(a, x) \in A \times X = B \times X$.

Il existe donc $(b, \tilde{x}) \in B \times X$ tel que $(a, x) = (b, \tilde{x})$.

En particulier $a = b \in B$.

Donc $A \subset B$.

De même, par symétrie $B \subset A$.

Donc $A = B$.

Par double implication on a donc bien

$$\boxed{A \times X = B \times X \Leftrightarrow A = B}.$$

Remarque: Si $X = \varnothing$ alors $A \times X = B \times X = \varnothing$ quels que soient A et B.

Solution pour l'exercice 51 · Énoncé p. 155 · Indication p. 164 (Un exercice pas si tordu)
On procède par double implication.

▷ $\boxed{\Longleftarrow}$

Supposons $((\forall a \in A, a \in B)$ ou $(\forall b \in B, b \in A))$ (c'est à dire $A \subset B$ ou $B \subset A$).

On procède par disjonction de cas.

▷ Si $\forall a \in A, a \in B$.

Soit $(a, b) \in A \times B$. En particulier $a \in A$ donc $a \in B$.

Par conséquent on a bien $(\forall (a, b) \in A \times B, (a \in B$ ou $b \in A))$.

▷ De même si $\forall b \in B, b \in A$.

Soit $(a, b) \in A \times B$. En particulier $b \in B$ donc $b \in A$.

Par conséquent on a bien $(\forall (a, b) \in A \times B, (a \in B$ ou $b \in A))$.

Dans tous les cas $(\forall (a, b) \in A \times B, (a \in B$ ou $b \in A))$.

▷ $\boxed{\Rightarrow}$

On procède par contraposée.

Supposons que $\neg((\forall a \in A, a \in B) \text{ ou } (\forall b \in B, b \in A))$ c'est à dire $\exists a \in A, a \notin B$ et $\exists b \in B, b \notin A$.

Fixons de tels a et b.

Alors $(a, b) \in A \times B$ et $a \notin B$ et $b \notin A$.

On a donc bien $\neg(\forall (a, b) \in A \times B, (a \in B \text{ ou } b \in A))$.

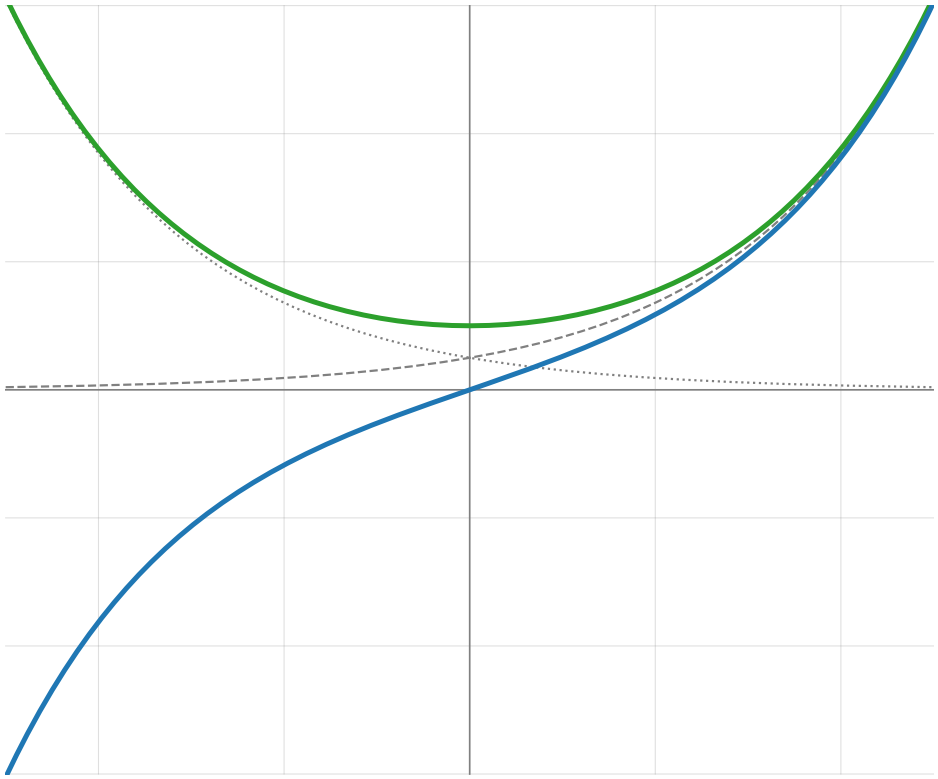
On a donc bien

$$\boxed{(\forall (a, b) \in A \times B, (a \in B \text{ ou } b \in A)) \Leftrightarrow ((\forall a \in A, a \in B) \text{ ou } (\forall b \in B, b \in A))}.$$

Chapitre 7

Fonctions Usuelles

Énoncés 175
Propriétés du cours 175
Autour de l'exponentielle et Cie 176
Trigonométrie, trigonométrie réciproque et surtout arctangente 178
Un peu de trigonométrie hyperbolique 182
Exemples et représentations graphiques 184
Autres calculs 186
Indications 189
Solutions 194



$$\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \pm\frac{\pi}{2}$$

Énoncés

Propriétés du cours

Exercice 1 (◔★♣ Parité)
Montrer les propriétés suivantes (sous réserve de bonne définition)

1. **1.1.** La somme de deux fonctions paires est paire.
   1.2. La somme de deux fonctions impaires est impaire.
2. **2.1.** Le produit de deux fonctions paires est pair.
   2.2. Le produit de deux fonctions impaires est pair.
3. **3.1.** L'inverse d'une fonction paire ne s'annulant pas est pair.
   3.2. L'inverse d'une fonction impaire ne s'annulant pas est impair.
4. **4.1.** La dérivée d'une fonction dérivable paire est impaire.
   4.2. La dérivée d'une fonction dérivable impaire est paire.
5. **5.1.** La composée de deux fonctions impaires est impaire.
   5.2. Soit f une fonction paire et g une fonction quelconque. Montrer que $g \circ f$ est paire.
6. **6.1.** La bijection réciproque d'une fonction bijective impaire est impaire.
   6.2. Une fonction paire définie sur un ensemble contenant plus d'un point peut-elle être bijective ?

Indication p. 189

Exercice 2 (◔★♣ Périodicité)
Soit $T > 0$. Montrer les propriétés suivantes (sous réserve de bonne définition)

1. La somme de deux fonctions T-périodiques est T-périodique.
2. Le produit de deux fonctions T-périodiques est T-périodique.
3. L'inverse d'une fonction T-périodique ne s'annulant pas est T-périodique.
4. La dérivée d'une fonction dérivable et T-périodique est T-périodique.
5. Soit f une fonction T-périodique et g une fonction quelconque. Montrer que $g \circ f$ est T-périodique.

Indication p. 189

Exercice 3 (◔★♣ Fonctions bornées)
Montrer les propriétés suivantes:

1. La somme de deux fonctions bornées est bornée.
2. Le produit de deux fonctions bornées est borné.
3. Donner un exemple de fonction bornée ne s'annulant pas dont l'inverse n'est pas bornée.
4. Donner un exemple de fonction dérivable et bornée dont la dérivée n'est pas bornée.
5. Soit g une fonction bornée et f une fonction quelconque. Montrer que $g \circ f$ est bornée.

Indication p. 189

Exercice 4 (◔★♣ Fonctions croissantes)

1. Montrer que la somme de deux fonctions croissantes est croissante.
2. Le produit de deux fonctions croissantes est-il croissant ?
3. La différence de deux fonctions croissantes est-elle croissante ?
4. Montrer que la composée de deux fonctions croissantes est croissante.
5. Énoncer des règles similaires pour les fonctions décroissantes.

Indication p. 189

Exercice 5 (◑★♣ Formulaire de trigonométrie réciproque)
Démontrer le formulaire de trigonométrie réciproque.

Indication p. 189

Autour de l'exponentielle et Cie

Exercice 6 (◔★♣ Logarithme en base quelconque)
Soit $a > 1$.

On définit le logarithme en base a, noté $\log_a$ par

$$\log_a : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$$
$$t \mapsto \frac{\ln(t)}{\ln(a)}.$$

1. Montrer que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y > 0, y = a^x \Leftrightarrow x = \log_a(y).$$
2. Étudier la fonction $\log_a$: déterminer sa monotonie éventuelle, sa dérivée et tracer le graphe d'équation $y = \log_a(x)$.
3. Montrer que
$$\forall (s,t) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2, \log_a(st) = \log_a(s) + \log_a(t).$$
$$\log_a(a) = 1 \ \ \log_a(1) = 0$$
$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \forall \eta \in \mathbb{R}, \log_a(t^\eta) = \eta \log_a(t).$$
4. Commenter

Indication p. 189

Exercice 7 (◔★ Encadrement de l'exponentielle par des puissances)
Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que pour tout n à partir d'un certain rang,

$$\left(1+\frac{a}{n}\right)^n \leq e^a \leq \frac{1}{\left(1-\frac{a}{n}\right)^n}.$$

Indication p. 189

Exercice 8 (◔★♣ Approximation de l'exponentielle par des puissances)
Soit $a \in \mathbb{R}$.

Justifier que les limites suivantes existent et les déterminer

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{a}{n}\right)^n,$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\left(1-\frac{a}{n}\right)^n}.$$

Indication p. 189

Exercice 9 (◔★ Une petite équation)
Déterminer selon la valeur de $y \in]0,+\infty[$ le nombre de solutions de l'équation

$$x^y = y^x$$

d'inconnue $x \in]0,+\infty[$.

Indication p. 189

Exercice 10 (◔★ Fonctions lipschitziennes)

1. Montrer que la somme de deux fonctions lipschitziennes est lipschitzienne.
2. Montrer que la composée de deux fonctions lipschitziennes est lipschitzienne.
3. Donner un exemple de deux fonctions lipschitziennes dont le produit n'est pas lipschitzien.

Indication p. 190

Exercice 11 (◔★ Fonctions lipschitziennes bornées)
Soit $A \subset \mathbb{R}$.

Montrer que l'ensemble des fonctions sur A lipschitziennes et bornées est stable par somme et par produit.

Indication p. 190

Exercice 12 (◔☆ Un avant goût de la liberté)
Soient $(\alpha_k)_{k\in[\![1,n]\!]} \in \mathbb{R}^n$ deux à deux distincts.

Montrer que

$$\forall (\lambda_k)_{k\in[\![1,n]\!]} \in \mathbb{R}^n, \left(\forall t \in \mathbb{R}, \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e^{\alpha_k t} = 0\right) \Rightarrow (\forall k \in [\![1,n]\!], \lambda_k = 0).$$

Indication p. 190

Exercice 13 (◔☆ Une inégalité de puissances)
1. Soit $\alpha > 1$. Montrer que

$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ x^\alpha + y^\alpha \leq (x+y)^\alpha \leq 2^{\alpha-1}(x^\alpha + y^\alpha).$$

2. Soit $\alpha \in]0,1[$. Montrer que

$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ 2^{\alpha-1}(x^\alpha + y^\alpha) \leq (x+y)^\alpha \leq x^\alpha + y^\alpha.$$

3. Soit $\alpha < 0$. Montrer que

$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ x^\alpha + y^\alpha \leq (x+y)^\alpha \leq 2^{\alpha-1}(x^\alpha + y^\alpha).$$

Indication p. 190

Trigonométrie, trigonométrie réciproque et surtout arctangente

Exercice 14 (◔★♣ Une des formules essentielle de l'arctangent)
Soit $x \in \mathbb{R}^*$, montrer que

$$\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} +\frac{\pi}{2} \text{ si } & x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} \text{ si } & x < 0. \end{cases}$$

Indication p. 190

Exercice 15 (◔★♠ Une méthode pour plein d'exos d'arctangente)
On note dans cet exercice arg la fonction argument principal.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

Montrer que

$$\arg((1+ix)) = \arctan(x).$$

Faire un schéma.

Indication p. 190

Exercice 16 (◔★ Un petit calcul d'intégrale)
Calculer

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Indication p. 190

Exercice 17 (◑★ Un peu de simplification d'arctangente)

1. Déterminer, si elle existe, la limite quand $x \to +\infty$ de

$$x\Big(\frac{\pi}{2} - \arctan(x)\Big).$$

2. On considère la fonction f définie par

$$f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \arctan\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

Expliquer brièvement pourquoi f est dérivable sur son ensemble de définition, et calculer sa dérivée.

En déduire une simplification pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ de l'expression

$$\arctan\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

3. Déterminer l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tels que l'expression

$$\arctan\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)$$

soit bien définie et déterminer une simplification de cette expression.

4. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\arctan(x+1) - \arctan(x) = \arctan\left(\frac{1}{1+x+x^2}\right).$$

Indication p. 190

Exercice 18 (◑★ Somme d'arctangentes)

Soient a et b deux réels.

1. Montrer que si $ab < 1$ alors

$$\arctan(a) + \arctan(b) = \arctan\left(\frac{a+b}{1-ab}\right).$$

2. Montrer que si $ab > 1$ et a, b positifs alors

$$\arctan(a) + \arctan(b) = \arctan\left(\frac{a+b}{1-ab}\right) + \pi.$$

3. Montrer que si $ab > 1$ et a, b négatifs alors

$$\arctan(a) + \arctan(b) = \arctan\left(\frac{a+b}{1-ab}\right) - \pi.$$

Indication p. 191

Exercice 19 (◑★ Formule de Machin)

1. Montrer que

$$\arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

2. Montrer que

$$4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Indication p. 191

Exercice 20 (◑☆ Une somme télescopique)

Déterminer, si elle existe,

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \arctan\left(\frac{1}{1+k+k^2}\right).$$

Indication p. 191

Exercice 21 (◔☆ Encore une formule de trigonométrie réciproque en vrac)

Montrer que pour tout $x > 0$,

$$\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right).$$

Indication p. 191

Exercice 22 (◔★ Une équation trigonométrique)

Discuter selon la valeur de $n \in \mathbb{N}$ de l'ensemble des solutions de l'équation

$$(\cos(x))^n + (\sin(x))^n = 1$$

d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Indication p. 191

Un peu de trigonométrie hyperbolique

Exercice 23 (◔★♣ Un bout du formulaire de trigonométrie hyperbolique)

1. Soient a et b deux réels. Montrer que

$$\operatorname{ch}(a+b) = \operatorname{ch}(a)\operatorname{ch}(b) + \operatorname{sh}(a)\operatorname{sh}(b) \quad \operatorname{ch}(a-b) = \operatorname{ch}(a)\operatorname{ch}(b) - \operatorname{sh}(a)\operatorname{sh}(b)$$
$$\operatorname{sh}(a+b) = \operatorname{sh}(a)\operatorname{ch}(b) + \operatorname{ch}(a)\operatorname{sh}(b) \quad \operatorname{sh}(a-b) = \operatorname{sh}(a)\operatorname{ch}(b) - \operatorname{ch}(a)\operatorname{sh}(b)$$
$$\operatorname{th}(a+b) = \frac{\operatorname{th}(a)+\operatorname{th}(b)}{1+\operatorname{th}(a)\operatorname{th}(b)} \quad \operatorname{th}(a-b) = \frac{\operatorname{th}(a)-\operatorname{th}(b)}{1-\operatorname{th}(a)\operatorname{th}(b)}.$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, (\operatorname{ch}(x)+\operatorname{sh}(x))^n = \operatorname{ch}(nx)+\operatorname{sh}(nx).$$

3. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $\gamma = \operatorname{th}(\frac{x}{2})$. Exprimer $\operatorname{ch}(x)$ et $\operatorname{sh}(x)$ en fonction de γ.

Indication p. 191

Exercice 24 (◔★♣ Trigonométrie hyperbolique réciproque)

1. Expliquer brièvement pourquoi pour tout $y \in \mathbb{R}$ l'équation

$$\operatorname{sh}(x) = y$$

d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ admet une et unique solution et expliciter cette solution en fonction de y.

2. Expliquer brièvement pourquoi pour tout $y \in [1, +\infty[$ l'équation

$$\operatorname{ch}(x) = y$$

d'inconnue $x \in [0, +\infty[$ admet une et unique solution et expliciter cette solution en fonction de y.

3. Expliquer brièvement pourquoi pour tout $y \in]-1, 1[$ l'équation

$$\operatorname{th}(x) = y$$

d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ admet une et unique solution et expliciter cette solution en fonction de y.

Indication p. 191

Exercice 25 (◔★ Sommes usuelles again)
Soient a et b deux réels et $n \in \mathbb{N}^*$.

Calculer les sommes

$$\sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{ch}(ak+b)$$
$$\sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{sh}(ak+b)$$

ainsi que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \operatorname{ch}(ak+b)$$

Indication p. 191

Exercice 26 (◔★ Linéarisation again)
Calculer

$$\int_0^{\ln(2)} (\operatorname{sh}(t))^4 \, \mathrm{d}t.$$

Indication p. 191

Exercice 27 (◔★ Tchebychev again)
Déterminer un polynôme T_5 tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}, T_5(\operatorname{ch}(t)) = \operatorname{ch}(5t).$$

Indication p. 192

Exercice 28 (◔★ Dérivées en plus du cahier de calculs)
Déterminer les ensembles de définitions et les dérivées éventuelles des fonctions suivantes

1. $x \mapsto a^x$ où $a > 0$.
2. $x \mapsto x^x$.
3. $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$
4. $\theta \mapsto \cos(\theta)^3$
5. $x \mapsto \ln\left(x\sqrt{x^2+1}\right)$
6. $t \mapsto e^{-\frac{t}{\tau}}\cos(\omega t)$ où $\tau > 0$ et $\omega > 0$
7. $t \mapsto t^{2\ln(t)}$
8. $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$
9. $y \mapsto y^2 \sin\left(\frac{1}{y}\right)$
10. $x \mapsto x\ln(x)e^x$
11. $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$
12. $x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$
13. $\xi \mapsto \cos\left(e^\xi\right)^2 + \sin\left(e^\xi\right)^2$
14. $\theta \mapsto \cos(\theta)^3 + 5\cos(\theta)^2 - 2\cos(\theta)$

Indication p. 192

Exemples et représentations graphiques

Exercice 29 (◔★♠ La fonction cotangente)
On définit la fonction *cotangente* par

$$\text{cotan} : x \mapsto \frac{\cos(x)}{\sin(x)}.$$

Énoncer sans justification des propriétés de cette fonction (domaine de définition, variations, dérivées, périodicité, etc.) et tracer une représentation graphique.

Indication p. 192

Exercice 30 (◔★ Attention à la définition)
Déterminer l'ensemble de définition puis représenter graphiquement les fonctions

1. $x \mapsto \cos(\arccos(x))$.
2. $x \mapsto \arccos(\cos(x))$.

Indication p. 192

Exercice 31 (◑★ Contre-exemples usuels)
Pour chacune des fonctions suivantes, montrer qu'elles acceptent un prolongement par continuité en 0, puis représenter graphiquement ce prolongement.

Commenter chaque exemple.

1. $f_0 : \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$
$$x \mapsto x^{\frac{1}{\ln(x)}}.$$

2. $f_1 : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$
$$x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}.$$

3. $f_2 : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$
$$x \mapsto x^3 \cos\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

4. $f_3 : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$
$$x \mapsto \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right).$$

Indication p. 192

Exercice 32 (◔★ Inégalités I)
Démontrer les inégalités suivantes et les illustrer par des schémas.

1. $\forall x \geq 0, \sin(x) \leq x.$

2. $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}[, \tan(x) \geq x.$

3. $\forall x < 1, \frac{1}{1-x} \geq 1 + x.$

4. Soit $a \in \mathbb{R}$
$$\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq e^a + e^a(x - a).$$

Indication p. 192

Exercice 33 (◔★ Inégalité du sinus dans l'autre sens)
Montrer que pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$,
$$\sin(x) \geq \frac{2}{\pi}x$$
et faire un schéma.

Indication p. 192

Exercice 34 (◔★ Autre symétries)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Dans chacun des cas suivants interpréter les propriétés suivantes sur le graphe de la fonction f.

1. Pour $a \in \mathbb{R}$,
$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(2a - x).$$
2. Pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$,
$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 2b - f(2a - x).$$

Indication p. 192

Exercice 35 (◔★ Attention aux quantificateurs)
Faire le schéma d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que f n'est ni paire ni impaire et telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = \pm f(x)$.

Indication p. 192

Autres calculs

Exercice 36 (◔☆ Un mélange d'un peu tout)
Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,
$$\arctan(\mathrm{sh}(x)) = \arccos\left(\frac{1}{\mathrm{ch}(x)}\right).$$

Indication p. 192

Exercice 37 (◑★ Comparaison aux sommes partielles)
Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que
$$\forall x \in [0, 1[, \frac{1}{1-x} \geq \sum_{k=0}^{n} x^k.$$
2. Montrer que
$$\forall x \geq 0, e^x \geq \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}.$$

Indication p. 192

Exercice 38 (◑★ Développement de la réciproque)
On considère

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^3 + x. \end{aligned}$$

1. Montrer que f est bijective.
2. On admet que f^{-1} est dérivable une infinité de fois. Calculer $\left(f^{-1}\right)^{(k)}(0)$ pour $k \in \{0, 1, 2, 3\}$.

Indication p. 193

Exercice 39 (◔☆ Une miette d'un oral X)
Déterminer tous les $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que

$$\begin{cases} a + b + c &= 0 \\ e^a + e^b + e^c &= 3. \end{cases}$$

Indication p. 193 · Solution p. 194

Exercice 40 (◔★ Équation fonctionnelle de Cauchy: premiers cas)
On considère l'équation fonctionnelle

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x + y) = f(x) + f(y) \tag{1}$$

d'inconnue $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

1. Déterminer l'ensemble des solutions **dérivables** sur $\mathbb{R}$ de (1).
2. Déterminer l'ensemble des solutions **continues** sur $\mathbb{R}$ de (1).
3. Déterminer l'ensemble des solutions **continues** en 0 de (1).

Indication p. 193

Exercice 41 (◑★ Périodicité II)
La somme de deux fonctions périodiques est-elle périodique ?

Indication p. 193

Exercice 42 (◔★ Il faut mener les calculs efficacement)
Déterminer l'ensemble de définition de

$$f : x \mapsto \ln\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right).$$

Montrer que f est dérivable sur son ensemble de définition et déterminer sa dérivée.

Indication p. 193

Exercice 43 (◑☆ Comment mener un calcul efficacement ?)
Soit

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sqrt{\sqrt{x^2+1} - x}. \end{aligned}$$

Montrer que f est deux fois dérivable et que,

$$\forall x \in \mathbb{R}, 4(1+x^2)f''(x) + 4xf'(x) - f(x) = 0.$$

Indication p. 193

Exercice 44 (◔★ Une formule générale ?)
Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dérivables un nombre quelconque de fois.

1. Exprimer $(f \circ g)^{(k)}$ en fonction des dérivées de f et g pour $k \in \{0, 1, 2, 3\}$.
2. ▯ Renseignez vous sur la «formule de Faà di Bruno» et commenter.

Indication p. 193

Indications

Indication 1 · Énoncé p. 175 (Parité)
Rédaction automatique.

Indication 2 · Énoncé p. 175 (Périodicité)
Rédaction automatique.

Indication 3 · Énoncé p. 175 (Fonctions bornées)
Se rappeler de la définition de bornée: $\exists C \in \mathbb{R}_+, \forall x \in I, |f(x)| \leq C$.

1. Inégalité triangulaire.
2. Produit de modules/valeurs absolues.
3. Prendre une fonction qui tend vers 0.
4. Méditer sur $t \mapsto A\cos(\omega t)$ et adapter.
5. Rédaction automatique.

Indication 4 · Énoncé p. 176 (Fonctions croissantes)

1. Somme d'inégalités.
2. Pour faire un produit d'inégalités il faut un **signe**.
3. Idem.
4. Rédaction automatique.
5. Idem.

Indication 5 · Énoncé p. 176 (Formulaire de trigonométrie réciproque)
Comme toujours, soit une dérivation brute force, soit utiliser la trigonométrie directe. Ou encore mieux: faire des schémas.

Indication 6 · Énoncé p. 176 (Logarithme en base quelconque)
RAS.

Indication 7 · Énoncé p. 177 (Encadrement de l'exponentielle par des puissances)
Remarquer que $e^a = \left(e^{\frac{a}{n}}\right)^n$ et que pour n assez grand tous les termes sont strictement positifs d'où une possibilité du ln.

Indication 8 · Énoncé p. 177 (Approximation de l'exponentielle par des puissances)
On a

$$\left(1+\frac{a}{n}\right)^n = \exp\left(n\ln\left(1+\frac{a}{n}\right)\right)$$

et

$$\ln'(1) = 1.$$

Indication 9 · Énoncé p. 177 (Une petite équation)
Utiliser un ln et étudier $t \mapsto \frac{\ln(t)}{t}$.

Indication 10 · Énoncé p. 177 (Fonctions lipschitziennes)
1. Montrer par inégalité triangulaire que si f_1 est k_1-lipschitzienne et f_2 est k_2-lipschitzienne alors $f_1 + f_2$ est $k_1 + k_2$-lipschitzienne.
2. Montrer par rédaction automatique que si f_1 est k_1-lipschitzienne et f_2 est k_2-lipschitzienne alors $f_1 \circ f_2$ est $k_2 \times k_1$-lipschitzienne.
3. Que dire de $x \mapsto x \times x$?

Indication 11 · Énoncé p. 178 (Fonctions lipschitziennes bornées)
Pour le produit, montrer que si f_1 est k_1-lipschitzienne et f_2 est k_2-lipschitzienne alors $f_1 \times f_2$ est $k_1 \times C_2 + k_2 \times C_1$-lipschitzienne.

Pour cela se rappeler que l'on peut faire un «détour»:

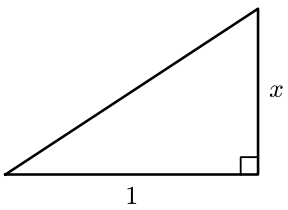
$$a_{11} - a_{22} = a_{11} - a_{12} + a_{12} - a_{22}.$$

Indication 12 · Énoncé p. 178 (Un avant goût de la liberté)
Plusieurs options, par exemple dériver et évaluer pour obtenir un système de Vandermonde.

Ou bien regarder à l'infini et déduire que le λ correspondant au α le plus grand est nul et faire une récurrence bien choisie.

Indication 13 · Énoncé p. 178 (Une inégalité de puissances)
Remarquer que par *homogénéité* on peut par exemple prendre $x = 1$.

Indication 14 · Énoncé p. 178 (Une des formules essentielle de l'arctangent)
Plusieurs méthodes, comme pour tout exercice de ce type:
- ▷ Étudier en dérivant.
- ▷ Calculer $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right)$ et regarder les ensembles de définitions.
- ▷ Regarder l'exercice 15.
- ▷ Faire un triangle malin:



Indication 15 · Énoncé p. 179 (Une méthode pour plein d'exos d'arctangente)
Pour le schéma, prendre un triangle de base 1 et de hauteur x.

Indication 16 · Énoncé p. 179 (Un petit calcul d'intégrale)
Forme canonique.

Indication 17 · Énoncé p. 180 (Un peu de simplification d'arctangente)
1. Utiliser l'exercice 14 et la dérivée de arctan en 1.

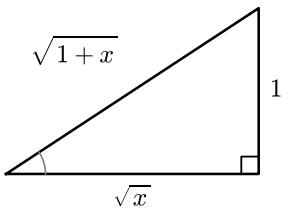
2. Calculer.
3. De même dériver et conclure.
4. Regarder l'exercice 18 ou bien simplement dériver.

Indication 18 · Énoncé p. 180 (Somme d'arctangentes)
Comme pour l'exercice 14, on peut:
- ▷ Faire une étude de fonction.
- ▷ Utiliser les formules de tangente d'une somme.
- ▷ Utiliser l'exercice 15.

Indication 19 · Énoncé p. 181 (Formule de Machin)
Utiliser l'exercice 18 ou bien simplement calculer $(i+5)^4(i+239)^{-1}$

Indication 20 · Énoncé p. 181 (Une somme télescopique)
Exercice à astuce. L'astuce est dans l'exercice 17.

Indication 21 · Énoncé p. 181 (Encore une formule de trigonométrie réciproque en vrac)
Comme toujours: réfléchir, dériver ou triangle malin



Indication 22 · Énoncé p. 181 (Une équation trigonométrique)
Traiter les cas $n=0$, $n=1$, $n=2$ à part.

Pour $n \geq 3$ remarquer que $1 = (\cos(x))^2 + (\sin(x))^2$.

Indication 23 · Énoncé p. 182 (Un bout du formulaire de trigonométrie hyperbolique)
Juste la définition.

Indication 24 · Énoncé p. 182 (Trigonométrie hyperbolique réciproque)
Déjà vu dans le TD de trinômes.

Indication 25 · Énoncé p. 183 (Sommes usuelles again)
Somme géométrique et formule du binôme.

Indication 26 · Énoncé p. 183 (Linéarisation again)
Tout est dans le titre.

Indication 27 · Énoncé p. 183 (Tchebychev again)
Tout est dans le titre.

Indication 28 · Énoncé p. 184 (Dérivées en plus du cahier de calculs)
RAS sinon de **simplifier** avant de calculer.

Indication 29 · Énoncé p. 184 (La fonction cotangente)
Faire une étude de fonction. Ou bien observer une symétrie bien choisie: pour tout x de l'ensemble de définition de la cotangente, $\operatorname{cotan}(x) = \tan(\frac{\pi}{2} - x)$.

Indication 30 · Énoncé p. 184 (Attention à la définition)
On rappelle que cos est définie sur $\mathbb{R}$ et que arccos est définie sur $[-1, 1]$.

Indication 31 · Énoncé p. 185 (Contre-exemples usuels)
Ne pas faire confiance à la calculatrice pour cet exercice.

Indication 32 · Énoncé p. 185 (Inégalités I)
Inégalités de tangence.

Indication 33 · Énoncé p. 185 (Inégalité du sinus dans l'autre sens)
Corde entre 0 et $\frac{\pi}{2}$.

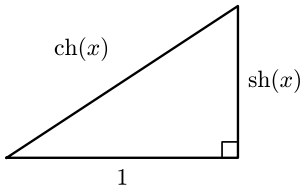
Indication 34 · Énoncé p. 186 (Autre symétries)
On obtient (à démontrer):

1. Une symétrie axiale par rapport à la droite d'équation $x = a$.
2. Une symétrie centrale de centre (a, b).

Indication 35 · Énoncé p. 186 (Attention aux quantificateurs)
Comme la fonction doit être continue faire le « changement de signe » en passant par 0.

Indication 36 · Énoncé p. 186 (Un mélange d'un peu tout)
Par exemple dériver.

Ou bien triangle malin:



Indication 37 · Énoncé p. 186 (Comparaison aux sommes partielles)
Faire une étude de fonction par récurrence.

Indication 38 · Énoncé p. 187 (Développement de la réciproque)
1. TVI pour l'existence, stricte monotonie pour l'unicité.
2. Écrire $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}$.

Indication 39 · Énoncé p. 187 (Une miette d'un oral X)
Remarquer qu'une somme de termes positifs est nulle ssi chaque terme est nul.

Que dire de $e^x - 1 - x$?

Solution p. 194

Indication 40 · Énoncé p. 187 (Équation fonctionnelle de Cauchy: premiers cas)
1. Par exemple dériver par rapport à une variable.
2. Commencer par montrer que pour tout $r \in \mathbb{Q}$, $f(r) = f(1)r$. Puis conclure par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.
3. Utiliser la continuité en 0 pour montrer la continuité sur $\mathbb{R}$.

Bonus: traiter le cas où la seule hypothèse est f est bornée au voisinage de 0.

Rebonus: montrer qu'il existe des solutions qui ne sont pas continues en 0.

Indication 41 · Énoncé p. 187 (Périodicité II)
Que dire de

$$x \mapsto \cos(x) + \cos\left(\sqrt{2}x\right)$$

?

Indication 42 · Énoncé p. 188 (Il faut mener les calculs efficacement)
On peut remarquer que f est argth.

Ou bien sans remarquer cela constater que dériver $x \mapsto \ln\left(\sqrt{\frac{u(x)}{v(x)}}\right)$ est compliqué tandis que dériver $x \mapsto \frac{1}{2}(\ln(u(x)) - \ln(v(x)))$ est simple.

Indication 43 · Énoncé p. 188 (Comment mener un calcul efficacement ?)
On peut faire le calcul brutalement.

Ou bien le $\sqrt{x^2+1}$ pousse à considérer plutôt $f \circ \mathrm{sh}$.

Indication 44 · Énoncé p. 188 (Une formule générale ?)
La formule générale existe mais est peu utile.

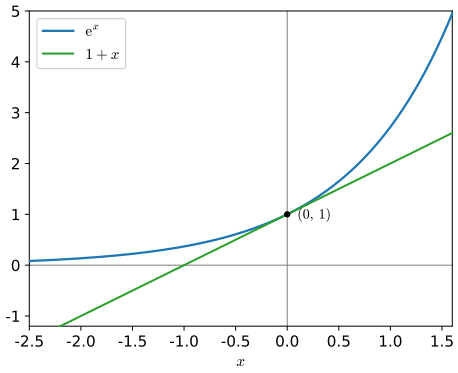
Solutions

Solution pour l'exercice 39 · Énoncé p. 187 · Indication p. 193 (Une miette d'un oral X)
On a (inégalité de tangence de l'exponentielle),

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^x - 1 - x \geq 0$$

avec égalité ssi $x = 0$.

/



Par conséquent, pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, comme une somme de termes positifs est nulle ssi chaque terme est nul, on a

$$\underbrace{(e^a - 1 - a)}_{\geq 0} + \underbrace{\left(e^b - 1 - b\right)}_{\geq 0} + \underbrace{(e^c - 1 - c)}_{\geq 0} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} e^a - 1 - a = 0 \\ e^b - 1 - b = 0 \\ e^c - 1 - c = 0 \end{cases}$$

c'est à dire par le cas d'égalité précédent

$$(e^a - 1 - a) + \left(e^b - 1 - b\right) + (e^c - 1 - c) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0. \\ c = 0 \end{cases}$$

Procédons maintenant par analyse-synthèse.

- ▷ **Si $a + b + c = 0$ et $e^a + e^b + e^c = 3$** alors en particulier

$$e^a + e^b + e^c - 3 - (a + b + c) = 0$$

et donc par ce qui précède $a = b = c = 0$.

- ▷ **Si $a = b = c = 0$** alors on a bien $a + b + c = 0$ et $e^a + e^b + e^c = 3$.

On conclut donc que l'unique solution est $\boxed{(a, b, c) = (0, 0, 0)}$.

Chapitre 8

Relations

Énoncés 196
Indications 211
Solutions 216

Énoncés

Exercice 1 (◔★♣ Relation induite)
Soient E un ensemble, $\mathcal{R}$ une relation sur E.

Soit $A \subset E$. On appelle relation induite par $\mathcal{R}$ sur A la relation $\mathcal{R}_{|A}$ définie par

$$\forall (x,y) \in A^2, x\mathcal{R}_{|A}y \Leftrightarrow x\mathcal{R}y.$$

Montrer que si $\mathcal{R}$ est réflexive (resp. transitive, symétrique, antisymétrique) alors $\mathcal{R}_{|A}$ l'est aussi.

Indication p. 211

Exercice 2 (◔★ Égalité)
Déterminer toutes les relations qui sont des relations d'ordre et des relations d'équivalence.

Indication p. 211

Exercice 3 (◔★ Un peu de relations formelles)
Soit E une ensemble.

1. Soit $\mathcal{R}$ une relation sur E réflexive et transitive.

On définit une relation $\mathcal{S}$ sur E par

$$\forall (x,y) \in E^2,\ x\mathcal{S}y \Leftrightarrow (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}x).$$

Montrer que $\mathcal{S}$ est une relation d'équivalence.

2. Une relation $\mathcal{R}$ sur E est dite circulante ssi

$$\forall (x,y,z) \in E^3, (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z) \Rightarrow (z\mathcal{R}x).$$

Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence **ssi** c'est une relation circulante et réflexive.

3. Soient $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ deux relations sur E.

On définit une relation sur E par $\mathcal{S}$ sur E par

$$\forall (x,y) \in E^2, x\mathcal{S}y \Leftrightarrow (x\mathcal{R}_1y \text{ et } x\mathcal{R}_2y).$$

Montrer que **si** $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ sont réflexives (resp. transitives/symétriques/antisymétriques) **alors** $\mathcal{S}$ est réflexive (resp. transitive/symétrique/antisymétrique)

Indication p. 211

Exercice 4 (◔★ Tiré en arrière d'une relation)
Soient E et F deux ensembles, $\mathcal{R}$ une relation sur F et $\varphi : E \to F$.

On définit une relation sur $\mathcal{R}^\varphi$ par

$$\forall (x_1, x_2) \in E^2,\ x_1 \mathcal{R}^\phi x_2 \Leftrightarrow \phi(x_1)\mathcal{R}\phi(x_2).$$

1. Montrer que **si** $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence **alors** $\mathcal{R}^\varphi$ est une relation d'équivalence.
2. Montrer que **si** φ est injective et $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre **alors** $\mathcal{R}^\varphi$ est une relation d'ordre.

Indication p. 211

Exercice 5 (◔★ Tiré en arrière d'une relation II)
On utilise dans cet exercice les mêmes notations que dans l'exercice 4. Soit E un ensemble. On munit $\mathcal{P}(E)$ de la relation d'ordre $\subset$ et de la relation d'équivalence $=$.

1. Soit $\lhd$ une relation d'ordre sur E. On définit

$$\begin{aligned} \varphi : E &\to \mathcal{P}(E) \\ x &\mapsto \{y \in E \mid y \lhd x\} \end{aligned}$$

   Montrer que $\lhd = (\subset^\varphi)$.
2. Soit $\sim$ une relation d'équivalence sur E. On définit

$$\begin{aligned} \varphi : E &\to \mathcal{P}(E) \\ x &\mapsto \{y \in E \mid y \sim x\} \end{aligned}$$

   Montrer que $\sim = (=^\varphi)$.

Solution p. 216

Exercice 6 (◔★ Relation inverse, relation contraire)
Soit E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation sur E. On définit

- ▷ La relation inverse de $\mathcal{R}$, notée $\mathcal{R}^\top$ par

$$\forall (x, y) \in E^2, (x \mathcal{R}^\top y) \Leftrightarrow (y \mathcal{R} x).$$

- ▷ La relation contraire de $\mathcal{R}$, notée $\overline{\mathbb{R}}$ par

$$\forall (x, y) \in E^2, \left(x \overline{R} y\right) \Leftrightarrow \neg(x \mathcal{R} y).$$

1. Soit $\leq$ l'ordre usuel sur $\mathbb{R}$. Expliciter $\leq^\top$ et $\overline{\leq}$. Commenter.
2. Montrer que **si** $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre, **alors** $\mathcal{R}^\top$ est une relation d'ordre.
3. Que dire de $\mathcal{R}^\top$ **si** $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence ?

Indication p. 211

Exercice 7 (◔★ Un tout petit peu de comptage)
Soit E un ensemble de n éléments.

- ▷ Combien existe-t-il de relations sur E ?
- ▷ Combien existe-t-il de relations réflexives sur E ?
- ▷ Combien existe-t-il de relations symétriques sur E ?

Indication p. 211

Exercice 8 (◑★ Composée de relations)
Soit E un ensemble.

Étant données $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ deux relations sur E, on définit la relation composée de $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$, notée $\mathcal{R}_1\mathcal{R}_2$ par

$$\forall (x,z) \in E^2, (x\mathcal{R}_1\mathcal{R}_2 z) \Leftrightarrow (\exists y \in E, x\mathcal{R}_1 y \text{ et } y\mathcal{R}_2 z).$$

1. Montrer que **si** $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ sont réflexives **alors** $\mathcal{R}_1\mathcal{R}_2$ est réflexive.
2. Montrer que **si** $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ sont symétriques et que $\mathcal{R}_1\mathcal{R}_2 = \mathcal{R}_2\mathcal{R}_1$ **alors** $\mathcal{R}_1\mathcal{R}_2$ est symétrique.
3. Donner un exemple où $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ sont symétriques (resp. antisymétriques) et $\mathcal{R}_1\mathcal{R}_2$ n'est pas symétrique (resp. antisymétrique).
4. Montrer que **si** $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence **alors** $\mathcal{R}\mathcal{R} = \mathcal{R}$.
5. Montrer que **si** $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre **alors** $\mathcal{R}\mathcal{R} = \mathcal{R}$.

Indication p. 211

Exercice 9 (◔★ Relation d'ordre sur les relations)
Soit E un ensemble. On note $\mathrm{Rel}(E)$ l'ensemble des relations sur E.

On munit $\mathrm{Rel}(E)$ de la relation $\subset$ définie

$$\forall (\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2) \in \mathrm{Rel}(E),\ \mathcal{R}_1 \subset \mathcal{R}_2 \Leftrightarrow \big(\forall (x,y) \in E^2, x\mathcal{R}_1 y \Rightarrow x\mathcal{R}_2 y\big).$$

Montrer que $\subset$ est une relation d'ordre.

Indication p. 211 · Solution p. 216

Exercice 10 (◑★ Fermeture transitive)
Soit E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation sur E.

On définit une relation $\mathcal{R}^\star$ sur E par

$$\forall (x,y)\in E^2,\ x\mathcal{R}^\star y \quad\Leftrightarrow\quad \exists n\in\mathbb{N}^*, \exists(\xi_0,...,\xi_n)\in E^{n+1}, \begin{cases} \xi_0 = x \\ \forall k\in[\![0,n-1]\!], \xi_k\mathcal{R}\xi_{k+1} \\ \xi_n = y \end{cases}$$

1. Montrer que $\mathcal{R}^\star$ est transitive.
2. Montrer que **si** $\mathcal{R}$ est réflexive **alors** $\mathcal{R}^\star$ est réflexive.
3. Montrer que **si** $\mathcal{R}$ est symétrique **alors** $\mathcal{R}^\star$ est symétrique.
4. Montrer que $\mathcal{R}^\star$ est la plus petite (au sens de l'exercice 9) relation transitive majorant $\mathcal{R}$.

Indication p. 212

Exercice 11 (◔★ Attention à l'existence)
Existe-t-il des relations symétriques, transitives et non réflexives ?

Indication p. 212

Exercice 12 (◔★ Décomposition symétrique/antisymétrique)
Soit E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation sur E.

Montrer qu'il existe deux relations $\mathcal{R}^S$ et $\mathcal{R}^T$ telles que
- ▹ $\mathcal{R}^S$ symétrique,
- ▹ $\mathcal{R}^T$ antisymétrique,
- ▹ $\forall (x,y)\in E^2, (x\mathcal{R}y) \Leftrightarrow \big(x\mathcal{R}^S y \ \text{ ou } \ x\mathcal{R}^T y\big)$.

Que dire de l'unicité de $\mathcal{R}^T$ et $\mathcal{R}^S$?

Indication p. 212

Exercice 13 (◔★ Un petit plongement et tiré en arrière)
Soit $(E, \lhd)$ un ensemble ordonné.

On munit $\mathcal{P}(E)$ de la relation d'ordre $\subset$.

Montrer que

$$\begin{aligned}\sigma : E &\to \mathcal{P}(E)\\ x &\mapsto \{y \in E \mid y \lhd x\}\end{aligned}$$

est croissante.

Indication p. 212 · Solution p. 217

Exercice 14 (◔★ Un exemple d'ordre)
On définit une relation $\lhd$ sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$\forall (x,y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2 \; x \blacktriangleleft y \;\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}^*, y = x^n.$$

1. Montrer que $\lhd$ est une relation d'ordre.
2. Est-ce un ordre total ?

Indication p. 212 · Solution p. 217

Exercice 15 (◔★ Quelques propriétés des infs et sups)
Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné.

1. Soit A une partie E non vide.

   On suppose que A admet une borne supérieure et une borne inférieure.

   Montrer que $\inf(A) \leq \sup(A)$.
2. Pour $(x,y) \in E^2$, on note $x < y$ ssi $x \leq y$ et $x \neq y$.

   Soient A et B deux parties de E.

   On suppose que A admet une borne supérieure et B admet une borne inférieure.

   Montrer que **si** $\sup(B) < \inf(A)$ **alors** $A \cap B = \varnothing$.
3. Soient A et B des ensembles admettant tous les deux des bornes supérieures et inférieures.

   Montrer que **si** $A \subset B$ **alors** $\sup(A) \leq \sup(B)$ et $\inf(A) \geq \inf(B)$.

Indication p. 212

Exercice 16 (◔★ Minmax et maxmin)
Soient $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$ et $A = \left(a_{i,j}\right)_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}} \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ une matrice à n lignes et p colonnes.

1. Calculer

$$\max_{i\in[\![1,n]\!]}\left(\min_{j\in[\![1,p]\!]}\left(a_{i,j}\right)\right)$$

et

$$\min_{j\in[\![1,p]\!]}\left(\max_{i\in[\![1,n]\!]}\left(a_{i,j}\right)\right)$$

dans le cas $n=p=2$ et avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Montrer que de manière générale

$$\max_{i\in[\![1,n]\!]}\left(\min_{j\in[\![1,p]\!]}\left(a_{i,j}\right)\right) \leq \min_{j\in[\![1,p]\!]}\left(\max_{i\in[\![1,n]\!]}\left(a_{i,j}\right)\right).$$

Indication p. 212

Exercice 17 (◔★ Infsup et supinf)
Soit $(E,\leq)$ un ensemble ordonné.

On suppose que toute partie de E admet une borne supérieure et une borne inférieure.

Soient I et J deux ensembles d'indices et $\left(a_{i,j}\right)_{(i,j)\in I\times J}$ une famille d'éléments de E.

Montrer que

$$\sup_{i\in I}\left(\inf_{j\in J}\left(a_{i,j}\right)\right) \leq \inf_{j\in J}\left(\sup_{i\in I}\left(a_{i,j}\right)\right).$$

Indication p. 212

Exercice 18 (◔★ Prolongement)
Soit E un ensemble.

On appelle application partielle de E vers F un couple (I, f) où $I \subset E$ et $f \in \mathcal{F}(I, F)$.

Étant données deux applications partielles (I, f) et (J, g) on note

$$f \prec g \text{ ssi } I \subset J \text{ et } g_{|I} = f.$$

Montrer la relation $\preceq$ est une relation d'ordre sur l'ensemble des applications partielles.

Indication p. 212

Exercice 19 (◔★ Relation d'inclusion sur les segments)
On considère $\mathbb{R}$ muni de l'ordre usuel $\leq$.

Étant donnés a et b deux réels on rappelle que le **segment** $[a, b]$ est défini par

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}.$$

Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des segments de $\mathbb{R}$,que l'on munit de la relation d'ordre de l'inclusion $\subset$.

1. Soient $[a_1, b_1]$ et $[a_2, b_2]$ deux segments. Montrer que

$$\sup(\{[a_1, b_1], [a_2, b_2]\}) = [\min(a_1, a_2), \max(b_1, b_2)]$$

$$\inf(\{[a_1, b_1], [a_2, b_2]\}) = [\max(a_1, a_2), \min(b_1, b_2)]$$

2. Montrer que toute partie finie non vide de $\mathcal{S}$ admet une borne supérieure et une borne inférieure.

3. Montrer que toute partie non vide de $\mathcal{S}$ admet une borne inférieure.

Montrer que toute partie majorée non vide de $\mathcal{S}$ admet une borne supérieure.

Indication p. 212

Exercice 20 (◔★♣ Opérations et inf/sup)
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

Soient f, g des fonctions bornées de I dans $\mathbb{R}$ et λ un réel.

1. Montrer que
   - ▷ Si $\lambda > 0$,
   $$\sup_{x\in I}(\lambda f(x)) = \lambda \sup_{x\in I}(f(x)).$$
   - ▷ Si $\lambda < 0$,
   $$\sup_{x\in I}(\lambda f(x)) = \lambda \inf_{x\in I}(f(x)).$$

   Énoncer sans démonstration des résultats similaires pour $\inf_{x\in I}(\lambda f(x))$.
2. Montrer que
   $$\sup_{x\in I}(f(x)+g(x)) \leq \sup_{x\in I}(f(x)) + \sup_{x\in I}(g(x)).$$

   Donner un exemple où l'inégalité est stricte.

Indication p. 212

Exercice 21 (◔★ Plus petite fonction plus grande croissante)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction majorée.

On définit une fonction $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \tilde{f}(x) = \sup(\{f(t), t \in]-\infty, x]\})$$

1. Illustrer graphiquement cette définition.
2. Montrer que
   - ▷ $f \leq \tilde{f}$,
   - ▷ $\tilde{f}$ est croissante.
3. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que
   - ▷ $f \leq g$,
   - ▷ g est croissante.

   Montrer que $\tilde{f} \leq g$.

Indication p. 213

Exercice 22 (◑★ Distance à une partie)
Soit $A \subset \mathbb{C}$ une partie non vide de $\mathbb{C}$.

Pour $x \in \mathbb{C}$ on appelle la *distance de x à A* le réel $d(x, A)$ défini par

$$d(x, A) = \inf_{a \in A}(|x - a|).$$

1. Justifier l'existence de $d(x, A)$ et représenter graphiquement cette notion.
2. Montrer que **si** $x \in A$ **alors** $d(x, A) = 0$. Que dire de la réciproque ?
3. Montrer que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{C}^2, |d(x, A) - d(y, A)| \leq |x - y|$$

et représenter graphiquement cette inégalité.

Indication p. 213

Exercice 23 (◔★ Trace sur une partie)
Soit E un ensemble et $A \subset E$. On définit une relation $\simeq_A$ sur $\mathcal{P}(E)$ par

$$\forall (X, Y) \in (\mathcal{P}(E))^2, X \simeq_A Y \Leftrightarrow X \cap A = Y \cap A.$$

1. Montrer que $\simeq_A$ est une relation d'équivalence sur $\mathcal{P}(E)$.
2. Expliciter une bijection entre $\mathcal{P}(E)/\simeq_A$ et $\mathcal{P}(A)$.

Indication p. 213

Exercice 24 (◔★ Quelques exemples d'équivalences)
Dans cet exercice, on appelle fonction réelle toute fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. On définit la relation $\equiv_A$ sur l'ensemble des fonctions réelles par

$$\forall (f,g)\ f \equiv_A g \Leftrightarrow f_{|A} = g_{|A}.$$

Montrer que $\equiv_A$ est une relation d'équivalence.

2. On définit la relation $\simeq$ sur l'ensemble des fonctions réelles par

$$\forall (f,g) \in E^2, f \simeq g \Leftrightarrow \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq g(x)\} \text{ est fini.}$$

Montrer que $\simeq$ est une relation d'équivalence.

3. On définit la relation $\sim_{+\infty}$ sur l'ensemble des fonctions réelles ne s'annulant pas par

$$\forall (f,g)\ f \sim_{+\infty} g \Leftrightarrow \frac{f(x)}{g(x)} \to 1 \text{ quand } x \to +\infty.$$

Montrer que $\sim_{+\infty}$ est une relation d'équivalence.

4. On définit la relation $\propto$ sur l'ensemble des fonctions réelles par

$$\forall (f,g)\ f \propto g \ \Leftrightarrow\ \exists \lambda \in \mathbb{R}^*, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \lambda g(x).$$

Montrer que $\propto$ est une relation d'équivalence.

Indication p. 213

Exercice 25 (◔☆ Triangles semblables)
On dit que deux triangles ABC et $A'B'C'$ du plan sont directement semblables ssi il existe une similitude directe φ telle que $A' = \varphi(A)$, $B' = \varphi(B)$ et $C' = \varphi(C)$.

Montrer que la relation «être directement semblable» est une relation d'équivalence sur l'ensemble des triangles.

Indication p. 213

Exercice 26 (◔★♣ Équivalence et partitions)
Soit E un ensemble.

Soit $(A_i)_{i\in I}$ une partition de E.

Montrer qu'il existe une et unique relation d'équivalence $\sim$ sur E telle que

$$E/\sim = \{A_i, i \in I\}.$$

Indication p. 213 · Solution p. 218

Exercice 27 (◑★♠ Théorèmes d'isomorphismes)
Soient E et F deux ensembles et $f \in \mathcal{F}(E,F)$.

On définit une relation $\equiv_f$ sur $\mathcal{P}(E)$ par

$$\forall (x,y) \in E^2, x \equiv_f y \Leftrightarrow f(x) = f(y).$$

1. Montrer que $\equiv_f$ est une relation d'équivalence sur E.
2. On note $\pi : E \to E/\equiv_f$ l'application qui à chaque élément de E associe sa classe d'équivalence (c'est à dire pour tout $x \in \mathbb{E}$, $\pi(x) = \mathrm{Cl}(x)$).

   Montrer qu'il existe une et unique application

   $$\tilde{f} : E/\equiv_f \to F$$

   telle que

   $$f = \tilde{f} \circ \pi.$$
3. Montrer que $\tilde{f}$ est injective.
4. On définit $\hat{f} : E/\equiv_f \to f^{\to}(E)$ par $\hat{f} : \xi \mapsto \tilde{f}(\xi)$.

   Expliquer pourquoi $\hat{f}$ est bien définie et montrer que

   $$\hat{f} \text{ est une bijection entre } E/\equiv_f \text{ et } f^{\to}(E).$$
5. Faire un schéma.

Indication p. 213

Exercice 28 (◑☆ Nombre d'équivalences)
Soit E un ensemble à n éléments.

Calculer le nombre de relations d'équivalences sur E dans les cas où $n \in [\![1,6]\!]$.

Indication p. 213 · Solution p. 219

Exercice 29 (◔★ Vers équivalence et similitude)
Soient E et F des ensembles.

On note $\mathcal{S}(E)$ (resp. $\mathcal{S}(F)$) l'ensemble des bijections de E vers E (resp. de F vers F).

1. On définit une relation $\equiv$ sur $\mathcal{F}(E,F)$ par

$$\forall (u,v) \in (\mathcal{F}(E,F))^2,\ u \equiv v \ \Leftrightarrow\ \exists (p,q) \in \mathcal{S}(E)\times\mathcal{S}(F), u = q\circ v\circ p^{-1}.$$

Montrer que $\equiv$ est une relation d'équivalence.

2. On définit une relation $\sim$ sur $\mathcal{F}(E,E)$ par

$$\forall (u,v) \in (\mathcal{F}(E,E))^2,\ u \sim v \ \Leftrightarrow\ \exists p \in \mathcal{S}(E), u = p\circ v\circ p^{-1}.$$

Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence.

Indication p. 213 · Solution p. 221

Exercice 30 (◔★ Égalité APCR)
On définit une relation $\simeq$ sur $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ par

$$\forall \left((u_n)_{n\in\mathbb{N}},(v_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) \in \left(\mathcal{R}^{\mathbb{N}}\right)^2, (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \simeq (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \Leftrightarrow \exists N\in\mathbb{N}, \forall n\geq N, u_n = v_n.$$

1. Montrer que $\simeq$ est une relation d'équivalence.

2. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites. On suppose

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \simeq (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \ \text{ et } \ (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \simeq (b_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Montrer que pour toute fonction $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ on a

$$f(u_n,a_n) \simeq f(v_n,b_n).$$

Indication p. 214

Exercice 31 (◔★ Noyau, image, équivalence, similitude)
Soit $n \in \mathbb{N}$. On rappelle que $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ est l'ensemble des matrices (complexes) de tailles $n \times n$ et $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est l'ensemble des matrices de tailles $n \times n$ inversibles.

Montrer que les relations suivantes sont des relations d'équivalences.

1. La relation $\mathcal{R}^k$ définie par

$$\forall (A,B) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C}), A\mathcal{R}^k B \Leftrightarrow \exists P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}), A = PB.$$

2. La relation $\mathcal{R}^i$ définie par

$$\forall (A,B) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C}), A\mathcal{R}^i B \Leftrightarrow \exists P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}), A = BP.$$

3. La relation $\equiv$ définie par

$$\forall (A,B) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C}), A \equiv B \Leftrightarrow \exists P,Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}), A = PBQ^{-1}.$$

4. La relation $\sim$ définie par

$$\forall (A,B) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C}), A \sim B \Leftrightarrow \exists P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}), A = PBP^{-1}.$$

Indication p. 214

Exercice 32 (◔★ Un résultat qui se révelera essentiel)
On définit une relation $\sim$ sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ par

$$\forall (A,B) \in (\mathrm{M}_n(\mathbb{C}))^2,\ A \sim B \Leftrightarrow (\exists U \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}), A = UBU^{-1})$$

(Cf exercice 31 pour vérifier que c'est bien une relation d'équivalence).

Pour $P = \sum_{k=0}^{m} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$ et $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ on pose

$$P(A) = \sum_{k=0}^{m} a_k A^k.$$

Montrer que pour toutes matrices A et B,

$$A \sim B \Rightarrow \forall P \in \mathbb{C}[X], P(A) \sim P(B).$$

Indication p. 214 · Solution p. 223

Exercice 33 (◕☆ L'exercice 98 du livre de M. Deslandes)
On considère $b = 48$ élèves et un professeur de mathématiques. Le professeur de mathématiques choisit secrètement une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Chaque élève joue au jeu suivant:

- ▹ l'élève choisit un entier $k \in \mathbb{N}$; le professeur lui communique alors la valeur de u_k;
- ▹ l'élève peut alors recommencer, en choisissant un entier qu'il n'a pas déjà choisi et ce potentiellement une infinité de fois (ainsi il peut connaître un nombre quelconque, potentiellement infini de valeurs de la suite);
- ▹ l'élève choisit alors un entier m qu'il n'a pas déjà choisi et doit deviner la valeur de u_m. Il gagne si sa réponse est correcte et perd sinon.

Les élèves ne communiquent pas entre eux et n'entendent pas les questions des autres élèves mais peuvent mettre au point une stratégie commune avant le début du jeu.

Proposer une stratégie permettant à au moins $b-1$ élèves de gagner à coup sûr.

Indication p. 214

Exercice 34 (◕☆ Un inf de sup sur un cercle)
On munit $\mathcal{R}$ de l'ordre usuel $\leq$.

Déterminer

$$\inf_{\theta\in]0,\pi[}(\sup_{n\in\mathbb{N}}(\sin(n\theta)).$$

Indication p. 214

Exercice 35 (◔★ Somme de deux ensembles et sup)
On munit $\mathcal{R}$ de l'ordre usuel $\leq$.

Soient A et B deux parties de $\mathcal{R}$.

On note

$$A \boxplus B = \{a+b, (a,b) \in A \times B\}.$$

Montrer que

$$\sup(A \boxplus B) = \sup(A) + \sup(B).$$

Indication p. 214

Exercice 36 (◔★ Vérification des définitions)
Pour chacune des relations suivantes déterminer si elle est réflexive/transitive/symétrique/anti-symétrique.

Si il s'agit d'une relation d'ordre déterminer si l'ordre est total, et caractériser les éléments maximaux/minimaux.

Si il s'agit d'une relation d'équivalence, caractériser les classes d'équivalences.

1. Sur $\mathbb{R}$ la relation $\ll$ définie par: $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2, x\ll y \Leftrightarrow x\leq y-10^{23}$.
2. Sur $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ la relation $\bowtie$ définie par $\forall (f,g)\in\mathbb{R}^2, f\bowtie g \Leftrightarrow \exists x\in\mathbb{R}, f(x)=g(x)$.
3. Sur $M_n(\mathbb{R})$ la relation $\rtimes$ définie par: $\forall (A,B)\in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}), A\rtimes B \Leftrightarrow \exists P\in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), A=PB$.
4. Sur $\mathbb{C}$ la relation $\doteqdot$ définie par: $\forall (x,y)\in\mathbb{C}^2, x\doteqdot y \Leftrightarrow \exists n\in\mathbb{N}, x^n=y^n$.
5. Sur $\mathbb{R}$ la relation $\underline{\ll}$ définie par: $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2, x\underline{\ll} y \Leftrightarrow x\leq y-10^{23}$ ou $x=y$.
6. Sur $\mathcal{P}(E)$ la relation $\ltimes$ définie par $\forall A,B\in\mathcal{P}(E), A\ltimes B \Leftrightarrow A\cap B\neq\varnothing$.
7. Sur $\mathcal{P}(E)$ la relation $\gtrless$ définie par: $\forall (A,B)\in(\mathcal{P}(E))^2, A\lessgtr B \Leftrightarrow (A\subset B$ ou $B\subset A)$.
8. Sur $\mathbb{R}^n$ la relation $\approx$ définie par: $\forall (x,y)\in(\mathbb{R}^n)^2, x\approx y \Leftrightarrow |\ \{i\in[\![1,n]\!]\mid x_i=y_i\}\ |\geq n-1$.
9. Sur $\mathbb{C}$ la relation $\doteq$ définie par: $\forall (x,y)\in\mathbb{C}^2, x\doteq y\Leftrightarrow |x-y|\leq 1$.
10. Sur $\mathcal{P}(E)$ la relation $\sqsubset$ définie par $\forall (A,B)\in(\mathcal{P}(E)), A\sqsubset B \Leftrightarrow$ il existe une injection de A dans B.

Indication p. 215

Indications

Indication 1 · Énoncé p. 196 (Relation induite)
Rédaction automatique.

Indication 2 · Énoncé p. 196 (Égalité)
Remarquer que l'égalité convient.

Il faut à la fois la symétrie et l'antisymétrie, ce qui est assez contraint.

Indication 3 · Énoncé p. 196 (Un peu de relations formelles)
Faire des schémas et une rédaction automatique.

Notamment pour le **2**, faire des petits schémas avec trois points et des flèches pour visualiser le caractère circulant.

Indication 4 · Énoncé p. 197 (Tiré en arrière d'une relation)
Rédaction automatique.

Indication 6 · Énoncé p. 197 (Relation inverse, relation contraire)

1. Remarque que ce n'est pas la même chose.
2. Rédaction automatique.
3. La même.

Une remarque importante est que l'ordre « inverse » est aussi une relation d'ordre, et que par exemple une fonction décroissante n'est rien d'autre qu'une fonction croissante pour l'ordre inverse à l'arrivée.

Indication 7 · Énoncé p. 198 (Un tout petit peu de comptage)
Faire un schéma d'un tableau $n \times n$.

- ▷ Choisir une relation revient à choisir pour chaque couple $(x, y) \in E^2$ si ils sont en relation ou non, c'est à dire choisir un booléen pour chaque case du tableau.
- ▷ Cela contraint la diagonale.
- ▷ Le tableau doit être symétrique par rapport à la diagonale, compter le nombre d'éléments sur-diagonaux.

Indication 8 · Énoncé p. 198 (Composée de relations)
Rédaction automatique.

Indication 9 · Énoncé p. 198 (Relation d'ordre sur les relations)
Que dire si on identifie une relation à son graphe, c'est à dire à l'ensemble des couples (x, y) tels que $x\mathcal{R}y$?

Solution p. 216

Indication 10 · Énoncé p. 199 (Fermeture transitive)
Faire des schémas, $\mathcal{R}^*$ revient à s'autoriser à faire des « chemins » de longueur quelconque dans le graphe orienté associé à $\mathcal{R}$.

Indication 11 · Énoncé p. 199 (Attention à l'existence)
RAS

Indication 12 · Énoncé p. 199 (Décomposition symétrique/antisymétrique)
Procéder par analyse-synthèse pour l'existence, et faire des schémas.

Indication 13 · Énoncé p. 200 (Un petit plongement et tiré en arrière)
Rédaction automatique. C'est un exercice important à méditer.

Solution p. 217

Indication 14 · Énoncé p. 200 (Un exemple d'ordre)
Encore une fois rédaction automatique, en prenant garde à ce que n dépend de x et de y.

Solution p. 217

Indication 15 · Énoncé p. 200 (Quelques propriétés des infs et sups)
1. Prendre un élément car l'ensemble est non vide.
2. Contraposée.
3. Rédaction automatique.

Indication 16 · Énoncé p. 201 (Minmax et maxmin)
Faire un schéma.

Procéder par rédaction automatique ou choisir un élément.

Indication 17 · Énoncé p. 201 (Infsup et supinf)
Procéder par rédaction automatique en remarquant que les indices sont muets.

Indication 18 · Énoncé p. 202 (Prolongement)
RAS, rédaction automatique.

Remarquer le lien avec le cours sur les fonctions usuelles, notamment sur, si il existe, le maximum d'une chaîne de fonctions partielles.

Indication 19 · Énoncé p. 202 (Relation d'inclusion sur les segments)
Encore une fois, schémas et rédaction automatique.

Indication 20 · Énoncé p. 203 (Opérations et inf/sup)
Rédaction automatique, on rappelle que les passages au sup se font toujours en deux temps.

Indication 21 · Énoncé p. 203 (Plus petite fonction plus grande croissante)
Le plus important est le schéma, puis c'est juste de la rédaction automatique.

Indication 22 · Énoncé p. 204 (Distance à une partie)
1. RAS.
2. Pour la réciproque regarder par exemple $d(1,]0,1[)$.
3. Montrer par inégalité triangulaire et passage au sup (toujours en deux temps) que

$$d(x,A) \leq d(y,A) + |x-y|.$$

Indication 23 · Énoncé p. 204 (Trace sur une partie)
Que dire de $X \mapsto X \cap A$.

Indication 24 · Énoncé p. 205 (Quelques exemples d'équivalences)
1. RAS.
2. Un ensemble inclus dans l'union de deux ensembles finis, est fini.
3. L'inverse de 1 est 1, le produit de 1 est 1.
4. Inverse de λ, produit des λs et $\lambda = 1$.

Indication 25 · Énoncé p. 205 (Triangles semblables)
Remarquer (et c'est un point essentiel et général) que:
- ▷ l'identité est une similitude directe,
- ▷ la composée de deux similitudes directes est une similitude directe,
- ▷ la bijection réciproque d'une similitude directe est une similitude directe.

Indication 26 · Énoncé p. 205 (Équivalence et partitions)
Par exemple par analyse synthèse définir la relation d'équivalence $\sim$ en fonction de l'appartenance commune à un A_i.

Solution p. 218

Indication 27 · Énoncé p. 206 (Théorèmes d'isomorphismes)
Le point important est la bonne définition de $\tilde{f}$ et $\hat{f}$, c'est à dire que cela ne dépend pas du représentant choisi, mais c'est justement la relation d'équivalence. Une fois cela compris ce n'est plus que de la rédaction automatique.

Indication 28 · Énoncé p. 206 (Nombre d'équivalences)
Ici on peut tout calculer à la main. Pour la culture ces nombres s'appellent nombre de Bell, et ne s'expriment pas facilement en fonction des expressions combinatoires usuelles.

Solution p. 219

Indication 29 · Énoncé p. 207 (Vers équivalence et similitude)
Encore de la rédaction automatique, en se rappelant que $(p_1 \circ p_2)^{-1} = p_2^{-1} \circ p_1^{-1}$.

Solution p. 221

Indication 30 · Énoncé p. 207 (Égalité APCR)
Remarquer que si un N convient alors tout plus grand convient. Et qu'il est donc toujours possible de prendre $\max(N_1, N_2)$ pour une conjonction (cf TDs de logique et de suites).

Indication 31 · Énoncé p. 208 (Noyau, image, équivalence, similitude)
RAS: rédaction automatique.

Indication 32 · Énoncé p. 208 (Un résultat qui se révelera essentiel)
Montrer d'abord pour les puissances puis remarquer que $P(A_1 + A_2)P^{-1} = PA_1P^{-1} + PA_2P^{-1}$.

Solution p. 223

Indication 33 · Énoncé p. 209 (L'exercice 98 du livre de M. Deslandes)
On suppose que les élèves sont capables d'utiliser l'axiome du choix.

À l'aide de cet axiome ils peuvent alors décider d'un système de représentant commun pour la relation d'équivalence «être égal à partir d'un certain rang».

Considérer alors les b les suites extraites b suites extraites $\left(u_{bq+r}\right)_{q\in\mathbb{N}}$ (pour $r \in [\![0, b-1]\!]$) et les b rangs $(n_1, ..., n_b)$ à partir desquels ces suites sont égales à leurs représentant.

Connaître une majoration du rang permet de gagner (pourquoi ?) et on une méthode pour que tous excepté au plus un trouve un majorant est de prendre le maximum des $b-1$ autres.

Indication 34 · Énoncé p. 209 (Un inf de sup sur un cercle)
Soit $\theta \in]0, \pi[$, faire un schéma de tous les angles $n\theta$ et de leurs sinus.

Au moins deux options:

- Procéder par disjonction de cas: **si** $\frac{\theta}{\pi} \notin \mathbb{Q}$ montrer que le suprémum est 1. **Sinon** montrer que le suprémum s'exprime en fonction de $\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)$ (faire un schéma).
- Procéder par disjonction de cas selon l'appartenance de θ à un secteur angulaire $]0, \frac{\pi}{3}[$, $]\frac{\pi}{3}, 2\frac{\pi}{3}[$ ou $]2\frac{\pi}{3}, \pi[$.

En déduire $\frac{1}{2}$.

Indication 35 · Énoncé p. 209 (Somme de deux ensembles et sup)
Procéder par double inégalité.

Dans un sens il suffit de montrer que pour tous $a \in A$ et $b \in B$ on a $a + b \leq \sup(A) + \sup(B)$.

Dans l'autre sens on peut constater que montrer que $\sup(A) + \sup(B) \leq \sup(A \boxplus B)$ revient à montrer que $\sup(A) \leq \sup(A \boxplus B) - \sup(B)$.

Indication 36 · Énoncé p. 210 (Vérification des définitions)
Ne pas oublier que pour montrer qu'une propriété universelle n'est pas vérifiée, il faut fournir un contre-exemple.

Solutions

Solution pour l'exercice 5 · Énoncé p. 197 (Tiré en arrière d'une relation II)

1. On veut montrer

$$\forall (x_1, x_2) \in E^2,\ x_1 \lhd x_2 \ \Leftrightarrow\ \{y \in E \mid y \lhd x_1\} \subset \{y \in E \mid y \lhd x_2\}$$

c'est à dire

$$\forall (x_1, x_2) \in E^2,\ x_1 \lhd x_2 \ \Leftrightarrow\ (\forall y \in E, y \lhd x_1 \Rightarrow y \lhd x_2)$$

Soit $(x_1, x_2) \in E^2$. Procédons par double implication.

▷ $\boxed{\Rightarrow}$ Supposons $x_1 \lhd x_2$.

Soit $y \in E$.

Par transitivité on a alors $y \lhd x_1 \Rightarrow y \lhd x_2$.

▷ $\boxed{\Leftarrow}$ Supposons $\forall y \in E, y \lhd x_1 \Rightarrow y \lhd x_2$.

Comme en particulier $x_1 \lhd x_1$ (réflexivité) on en déduit que $x_1 \lhd x_2$.

On a donc bien montré

$$\boxed{\lhd = \binom{\varphi}{\subset}}$$

2. On veut montrer

$$\forall (x_1, x_2) \in E^2,\ x_1 \sim x_2 \ \Leftrightarrow\ \{y \in E \mid y \sim x_1\} \subset \{y \in E \mid y \sim x_2\}$$

c'est un résultat du cours (cf cours): deux éléments sont équivalents ssi leurs classes d'équivalence sont égales.

Donc

$$\boxed{\sim = \binom{\varphi}{=}}.$$

Solution pour l'exercice 9 · Énoncé p. 198 · Indication p. 211 (Relation d'ordre sur les relations)

Preuve en une phrase

On peut remarquer qu'une $\subset$ est la relation d'ordre induit par $\subset$ sur $\mathrm{Rel}(E) \subset \mathcal{P}(E \times E)$, et par conséquent est $\boxed{\text{une relation d'ordre}}$.

Variante

Si on ne remarque pas cela.

▷ **Réflexivité**

Soit $\mathcal{R} \in \mathrm{Rel}(E)$.

On a bien $\forall (x, y) \in E^2, x \mathcal{R} y \Rightarrow x \mathcal{R} y$.

▷ **Transitivité**

Soient $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_3 \in \mathrm{Rel}(E)$ telles que $\mathcal{R}_1 \subset \mathcal{R}_2$ et $\mathcal{R}_2 \subset \mathcal{R}_3$.

Soit $(x, y) \in E^2$.

Supposons $x\mathcal{R}_1 y$. Comme $\mathcal{R}_1 \subset \mathcal{R}_2$ on en déduit $x\mathcal{R}_2 y$. Comme $\mathcal{R}_2 \subset \mathcal{R}_3$ on en déduit $x\mathcal{R}_3 y$.

Donc $\mathcal{R}_1 \subset \mathcal{R}_3$.

▷ **Antisymétrie**

Soient $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ deux relations d'ordre telles que $\mathcal{R}_1 \subset \mathcal{R}_2$ et $\mathcal{R}_2 \subset \mathcal{R}_1$.

Soit $(x, y) \in E^2$. On a alors $x\mathcal{R}_1 y$ ssi $x\mathcal{R}_2 y$.

On a donc bien $\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_2$.

Donc $\boxed{\subset \text{ est une relation d'ordre sur } \mathrm{Rel}(E).}$

Solution pour l'exercice 13 · Énoncé p. 200 · Indication p. 212 (Un petit plongement et tiré en arrière)

Soient $x_1, x_2 \in E$ tels que $x_1 \lhd x_2$.

Soit $y \in E$ tel que $y \lhd x_1$.

Par transitivité $y \lhd x_2$.

Par conséquent

$$\{y \in E \mid y \lhd x_1\} \subset \{y \in E \mid y \lhd x_2\}.$$

On a donc bien montré que la fonction est $\boxed{\text{croissante}}$.

Solution pour l'exercice 14 · Énoncé p. 200 · Indication p. 212 (Un exemple d'ordre)

1. Vérifions que $\lhd$ est réflexive, transitive, antisymétrique.

▷ **Réflexivité**

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

Avec $n = 1 \in \mathbb{N}^*$ on a bien $x = x^1$ d'où $x \lhd x$.

▷ **Transitivité**

Soient $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $x_1 \lhd x_2$ et $x_2 \lhd x_3$.

Il existe $n_1 \in \mathbb{N}^*$ tel que $x_1 = (x_2)^{n_1}$ (fixons le).

Il existe $n_2 \in \mathbb{N}^*$ tel que $x_2 = (x_3)^{n_2}$ (fixons le).

Alors $x_1 = \left((x_3)^{n_2}\right)^{n_1} = (x_3)^{n_1 n_2}$.

Comme $n_1 n_2 \in \mathbb{N}^*$ on a donc bien $x_1 \lhd x_3$.

▷ **Antisymétrie**

Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $x_1 \lhd x_2$ et $x_2 \lhd x_1$.

Il existe $n_1 \in \mathbb{N}^*$ tel que $x_1 = (x_2)^{n_1}$ (fixons le).

Il existe $n_2 \in \mathbb{N}^*$ tel que $x_2 = (x_1)^{n_2}$ (fixons le).

Alors $x_1 = \left((x_1)^{n_2}\right)^{n_1} = (x_1)^{n_1 n_2}$.

On procède alors par disjonction de cas.

- ▷ Si $x_1 = 1$ alors $x_2 = 1^{n_2}$ et donc $x_1 = x_2$.
- ▷ Sinon, $n_1 n_2 = 1$ (par exemple car $x_1^{n_1 n_2 - 1} = 1$).

  Comme $n_1, n_2 \in \mathbb{N}^*$ on en déduit $n_1 = n_2 = 1$. D'où $x_2 = (x_1)^1$.

Dans tous les cas $x_1 = x_2$.

On a donc bien montré que $\boxed{\lhd \text{ est une relation d“ordre}}$.

2. La relation d'ordre n'est $\boxed{\text{pas totale}}$. En effet par exemple 1 et 2 ne sont pas comparables : 1 n'est pas une puissance strictement positive de 2 et 2 n'est pas une puissance de 1.

Solution pour l'exercice 26 · Énoncé p. 205 · Indication p. 213 (Équivalence et partitions)
On procède par exemple par **analyse-synthèse**.

- ▷ **Analyse**

  Soit $\sim$ une relation d'équivalence sur E telle que

  $$E/\sim \;=\; \{A_i, i \in I\}.$$

  Soient $x, y \in \mathbb{E}$. On a (cf cours) $x \sim y$ ssi x et y appartiennent à une classe d'équivalence commune, et par conséquent

  $$x \sim y \Leftrightarrow \exists i \in A_i, (x \in A_i \;\text{ et }\; y \in A_i).$$

  D'où $\boxed{\text{l'unicité}}$.

- ▷ **Synthèse**

  Définissons une relation $\sim$ sur E par

  $$\forall (x,y) \in E^2, x \sim y \Leftrightarrow \exists i \in A_i, (x \in A_i \;\text{ et }\; y \in A_i).$$

  - ▷ Il s'agit bien d'une $\boxed{\text{relation d'équivalence}}$. En effet on a
    - ▷ **Réflexivité**

      Soit $x \in E$. Comme $(A_i)_{i\in I}$ recouvre E il existe $i \in I$ tel que $x \in A_i$ (fixons le). Alors $x \in A_i$ et $x \in A_i$ d'où $x \sim x$.
    - ▷ **Transitivité**

      Soient $x, y, z \in E$ tels que $x \sim y$ et $y \sim z$.

      Il existe $i \in I$ tel que $x \in A_i$ et $y \in A_i$ (fixons le).

      Il existe $j \in I$ tel que $y \in A_j$ et $z \in A_j$ (fixons le).

      Alors $y \in A_i \cap A_j$ et en particulier $A_i \cap A_j \neq \varnothing$. Comme la famille $(A_i)_{i\in I}$ est composée de parties deux à deux disjointes, $i = j$.

      Donc $x \in A_i = A_j$ et $z \in A_j = A_i$ c'est à dire $x \sim z$.
    - ▷ **Symétrie**

      Soient $x, y \in E$ tels que $x \sim y$.

Il existe $i \in I$ tel que $x \in A_i$ et $y \in A_i$ (fixons le).

Donc $y \in A_i$ et $x \in A_i$ et donc $y \sim x$.

▷ De plus $\boxed{E/\sim = (A_i)_{i\in I}}$.

Procédons par double inclusion.

▷ $\boxed{\subset}$ Soit $X \in E/\sim$. Il existe $x \in E$ tel que $X = \mathrm{Cl}(x)$ (fixons le).

Alors (comme la famille recouvre E) il existe $i \in I$ tel que $x \in A_i$ (fixons le).

Par le même raisonnement (les $(A_i)_{i\in I}$ sont disjoints) que précédemment on a i unique et pour tout $y \in E$,

$$x \sim y \Leftrightarrow y \in A_i$$

ce qui est la définition de

$$A_i = \mathrm{Cl}(x).$$

▷ $\boxed{\supset}$ Soit $i \in I$.

Comme $A_i \neq \varnothing$, il existe $x \in A_i$ (fixons le).

Par le même raisonnement que précédemment $\mathrm{Cl}(x) = A_i$, et donc $A_i \in E/\sim$.

D'où $\boxed{\text{l'existence}}$.

Solution pour l'exercice 28 · Énoncé p. 206 · Indication p. 213 (Nombre d'équivalences)
Il y a de nombreuses façons de procéder.

Par exemple à l'aide du cours (les classes d'équivalences forment une partition de l'ensemble) et de l'exercice 26 on observe que l'ensemble des classes d'équivalences est en bijection avec l'ensemble des partitions.

On peut alors compter à « manuellement » le nombre de partitions. Quitte à numéroter les éléments, comptons le nombre de partitions de $[\![1, n]\!]$.

▷ Pour $n = 1$ il y a $\boxed{1}$ partition.
▷ Pour $n = 2$ il y a $\boxed{2}$ partitions possibles: $\{\{1, 2\}\}$ et $\{\{1\}, \{2\}\}$ (faire un **schéma**).
▷ Pour $n = 3$ il y a $\boxed{5}$ partitions (faire un **schéma**). Pour les énumérer on peut distinguer selon le nombre de parties:
  ▷ Il y a 1 partitions à une partie (le singleton de l'ensemble entier), $\{\{1, 2, 3\}\}$.
  ▷ Il y a 3 partitions à deux parties (en bijection avec les singletons),$\{\{1\}, \{2, 3\}\}$, $\{\{2\}, \{1, 3\}\}$, $\{\{3\}, \{1, 2\}\}$.
  ▷ Il y a 1 partition à trois parties, $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$.
▷ Pour $n = 4$ il y a $\boxed{15}$ partitions (faire un **schéma**).
  ▷ Il y a 1 partition à une partie (le singleton de l'ensemble entier).
  ▷ Il y a 5 partitions à deux parties (en bijection avec les singletons).
  ▷ Il y a 6 partions à 3 parties (en bijections avec les ensembles à 2 éléments). En effet la seule façon d'écrire 4 comme la somme de trois entiers non nuls est $4 = 1 + 1 + 2$.
  ▷ Il y a 1 partition à 4 parties.

- On peut ensuite continuer à faire de même pour tous les n, guidé par un **schéma**. Pour k fixé on compte le nombre de façon d'écrire n comme la somme (non ordonnée) de k entiers et on en déduit le nombre de partitions à k éléments (en faisant attention au cas où un même chiffre apparaît plusieurs fois).
- Pour $n = 5$,
  - Comme
  $$5 = 5$$
  il y a $\binom{5}{5} = 1$ partition à une partie.
  - Comme
  $$\begin{aligned} 5 &= 1 + 4 \\ &= 2 + 3 \end{aligned}$$
  il y a $\binom{5}{1}\binom{4}{4} + \binom{5}{2}\binom{3}{3} = 15$ partitions à deux parties.
  - Comme
  $$\begin{aligned} 5 &= 1 + 1 + 3 \\ &= 1 + 2 + 2 \end{aligned}$$
  il y a $\frac{1}{2!}\binom{5}{1}\binom{4}{1}\binom{3}{3} + \frac{1}{2!}\binom{5}{1}\binom{4}{2}\binom{2}{2} = 25$ partitions à trois parties.
  - Comme
  $$5 = 1 + 1 + 1 + 2$$
  il y a $\frac{1}{3!}\binom{5}{1}\binom{4}{1}\binom{3}{1}\binom{2}{2} = 10$ partitions à trois parties.
  - Comme
  $$5 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1$$
  il y a $\frac{1}{5!}\binom{5}{1}\binom{4}{1}\binom{3}{1}\binom{2}{1}\binom{1}{1} = 1$ partitions à trois parties.

  d'où un total de $1 + 15 + 25 + 10 + 1 = \boxed{52}$ possibilités.

Alternativement, on peut rechercher une formule de récurrence forte.

Pour $n \in \mathbb{N}$ on note B_n le nombre de partitions de $[\![1, n]\!]$.

On a alors $B_0 = 1$.

De plus pour $n \in \mathbb{N}$, pour construire une partition de $[\![1, n+1]\!]$ on procède ainsi
- On choisit $k+1$ le cardinal de la partie contenant $n+1$.
- On choisit les k éléments de $[\![1, n]\!]$ dans la même partie que $n+1$, soit $\binom{n}{k}$ possibilités.
- On choisit une partition des $n-k$ éléments restants soit B_{n-k} possibilités.

D'où $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la relation de récurrence forte

$$\boxed{\begin{cases} B_0 & = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, B_{n+1} & = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_{n-k}. \end{cases}}$$

Ainsi

$$B_0 = \boxed{1}$$
$$B_1 = \binom{0}{0} B_0 = \boxed{1}$$
$$B_2 = \binom{1}{0} B_1 + \binom{1}{1} B_0 = \boxed{2}$$
$$B_3 = 1 \times 2 + 2 \times 1 + 1 \times 1 = \boxed{5}$$
$$B_4 = 1 \times 5 + 3 \times 2 + 3 \times 1 + 1 \times 1 = \boxed{15}$$
$$B_5 = 1 \times 15 + 4 \times 5 + 6 \times 2 + 4 \times 1 + 1 \times 1 = \boxed{52}$$
$$B_6 = 1 \times 52 + 5 \times 15 + 10 \times 5 + 10 \times 2 + 5 \times 1 + 1 \times 1 = \boxed{203}$$

Bonus ▫ Écrire un programme python **efficace** (par exemple de complexité au pire quadratique en temps et en espace) calculant B_n.

Solution pour l'exercice 29 · Énoncé p. 207 · Indication p. 213 (Vers équivalence et similitude)

1. On a

▷ **Réflexivité**

Soit $u \in \mathcal{F}(E,F)$.

Comme $\mathrm{Id}_E \in \mathcal{S}(E)$ et $\mathrm{Id}_F \in \mathcal{S}(F)$ et $u = \mathrm{Id}_F \circ u \circ \mathrm{Id}_E^{-1}$ on a bien $u \equiv u$.

▷ **Transitivité**

Soient $u_1, u_2, u_3 \in \mathcal{F}(E,F)$ tels que $u_1 \equiv u_2$ et $u_2 \equiv u_3$.

Comme $u_1 \equiv u_2$ il existe $p_1 \in \mathcal{S}(E)$ et $q_1 \in \mathcal{S}(F)$ tels que

$$u_1 = q_1 \circ u_2 \circ p_1^{-1}.$$

(Fixons-les)

De même, comme $u_2 \equiv u_3$ il existe $p_2 \in \mathcal{S}(E)$ et $q_2 \in \mathcal{S}(F)$ tels que

$$u_2 = q_2 \circ u_3 \circ p_2^{-1}$$

(Fixons-les)

On a alors (règles de calculs sur la composition)

$$\begin{aligned} u_1 &= q_1 \circ u_2 \circ p_1^{-1} \\ &= q_1 \circ \left(q_2 \circ u_3 \circ p_2^{-1}\right) \circ p_1^{-1} \\ &= q_1 \circ q_2 \circ u_3 \circ p_2^{-1} \circ p_1^{-1} \\ &= (q_1 \circ q_2) \circ u_3 \circ (p_1 \circ p_2)^{-1} \end{aligned}$$

et comme (composée de bijections) $q_1 \circ q_2 \in \mathcal{S}(F)$ et $p_1 \circ p_2 \in \mathcal{S}(E)$ on a donc bien montré que $u_1 \equiv u_3$.

▷ **Symétrie**

Soient $u, v \in \mathcal{F}(E,F)$ tels que $u \equiv v$.

Alors il existe $p \in \mathcal{S}(E)$ et $q \in \mathcal{S}(F)$ tels que

$$u = q \circ v \circ p^{-1}.$$

(Fixons-les)

Alors

$$q^{-1} \circ u \circ p = v$$

c'est à dire

$$v = \left(q^{-1}\right) \circ u \circ \left(p^{-1}\right)^{-1}$$

et comme $q^{-1} \in \mathcal{S}(F)$ et $p^{-1} \in \mathcal{S}(E)$ on a bien montré que $v \equiv u$.

Donc $\boxed{\equiv \text{ est une relation d'équivalence}}$.

2. On procède de même

▷ **Réflexivité**

Soit $u \in \mathcal{F}(E, E)$.

Comme $\mathrm{Id}_E \in \mathcal{S}(E)$ et $u = \mathrm{Id}_E \circ u \circ \mathrm{Id}_E^{-1}$ on a bien $u \sim u$.

▷ **Transitivité**

Soient $u_1, u_2, u_3 \in \mathcal{F}(E, E)$ tels que $u_1 \sim u_2$ et $u_2 \sim u_3$.

Comme $u_1 \sim u_2$ il existe $p_1 \in \mathcal{S}(E)$ tel que

$$u_1 = p_1 \circ u_2 \circ p_1^{-1}.$$

(Fixons-le)

De même, comme $u_2 \sim u_3$ il existe $p_2 \in \mathcal{S}(E)$ tel que

$$u_2 = p_2 \circ u_3 \circ p_2^{-1}$$

(Fixons-le)

On a alors (règles de calculs sur la composition)

$$\begin{aligned} u_1 &= p_1 \circ u_2 \circ p_1^{-1} \\ &= p_1 \circ \left(p_2 \circ u_3 \circ p_2^{-1}\right) \circ p_1^{-1} \\ &= p_1 \circ p_2 \circ u_3 \circ p_2^{-1} \circ p_1^{-1} \\ &= (p_1 \circ p_2) \circ u_3 \circ (p_1 \circ p_2)^{-1} \end{aligned}$$

et comme (composée de bijections) $p_1 \circ p_2 \in \mathcal{S}(E)$ on a donc bien montré que $u_1 \sim u_3$.

▷ **Symétrie**

Soient $u, v \in \mathcal{F}(E, E)$ tels que $u \sim v$.

Alors il existe $p \in \mathcal{S}(E)$ tel que

$$u = p \circ v \circ p^{-1}.$$

(Fixons-le)

Alors

$$p^{-1} \circ u \circ p = v$$

c'est à dire

$$v = (p^{-1}) \circ u \circ (p^{-1})^{-1}$$

et comme $p^{-1} \in \mathcal{S}(E)$ on a bien montré que $v \sim u$.

Donc $\boxed{\sim \text{ est une relation d'équivalence}}$.

Solution pour l'exercice 32 · Énoncé p. 208 · Indication p. 214 (Un résultat qui se révelera essentiel)
On constate tout d'abord que par l'exercice 31 il s'agit bien d'une relation de similitude.

Tout d'abord pour $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ et $U \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, par récurrence sur k on a

$$\forall k \in \mathbb{N}, \left(UAU^{-1}\right)^k = UA^kU^{-1}$$

▷ **Initialisation**

On a

$$\left(UAU^{-1}\right)^0 = I_n = UA^0U^{-1}.$$

▷ **Hérédité**

Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons $\left(UAU^{-1}\right)^n = UA^nU^{-1}$.

Alors, par définition des puissances et hypothèse de récurrence

$$\begin{aligned}\left(UAU^{-1}\right)^{n+1} &= \left(UAU^{-1}\right)^n\left(UAU^{-1}\right)\\ &= UA^nU^{-1}UAU^{-1}\\ &= UA^nAU^{-1}\\ &= UA^{n+1}U^{-1}.\end{aligned}$$

▷ **Conclusion**

La propriété étant initialisée et héréditaire, on a donc par récurrence,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \boxed{\left(UAU^{-1}\right)^k = UA^kU^{-1}}.$$

Remarque: on observe que ce calcul est valable dans un monoïde quelconque.

Par conséquent pour $P = \sum_{k=0}^{m} a_k X^k$, $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ et $U \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$,

$$\begin{aligned} P(UAU^{-1}) &= \sum_{k=0}^{m} a_k (UAU^{-1})^k \\ &= \sum_{k=0}^{m} a_k U A^k U^{-1} \\ &= U\left(\sum_{k=0}^{m} a_k A^k\right) U^{-1} \\ &= UP(A)U^{-1} \end{aligned}$$

D'où étant donnés $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ tels que $A \sim B$, alors il existe $U \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ tel que

$$A = UBU^{-1}$$

d'où pour tout polynôme P,

$$P(A) = UP(B)U^{-1}$$

et donc, en particulier, $P(A) \sim P(B)$.

Remarque: on obtient en fait mieux: un «U qui convient» pour la relation de similitude entre A et B convient aussi pour la relation de similitude entre $P(A)$ et $P(B)$ pour tout polynôme P.

Chapitre 9

Structures Algébriques

Énoncés 226
Opérations 226
Groupes 228
Anneaux 241
Corps 249
Indications 252
Solutions 264

Énoncés

Dans tout le TD on utilisera l'abus de notation (si cela est sans ambiguïté) consistant à dire «le groupe G» pour «le groupe $(G,\cdot)$», et de même pour les anneaux et corps.

Opérations

Exercice 1 (◔★♣ Puissances d'un inversible dans un monoïde)
Soit $(M,\cdot)$ un monoïde.

On note $M^\times$ le groupe des éléments inversibles de M.

Pour $n\in\mathbb{Z}$ et $x\in M^\times$ on note

$$x^n=\begin{cases}x^n & \text{si } n\geq 0\\ (x^{-1})^{-n} & \text{si } n<0.\end{cases}$$

Expliquer comment démontrer les propositions suivantes:
- ▷ $\forall x\in M^\times,\forall n\in\mathbb{Z},\ x^n\in M^\times$ et $(x^n)^{-1}=x^{-n}$.
- ▷ $\forall (n,m)\in\mathbb{Z}^2,\ x^nx^m=x^{n+m}$ et $(x^n)^m=x^{nm}$.
- ▷ $\forall (x,y)\in (M^\times)^2$ **si** $xy=yx$ **alors** $\forall (n,m)\in\mathbb{Z}^2, x^ny^m=y^mx^n$ et $(xy)^n=x^ny^n$.

Indication p. 252

Exercice 2 (◔★ Juste la droite ou juste la gauche suffit)
Soit G un ensemble muni d'une opération $\cdot$.

1. On suppose
- ▷ L'opération $\cdot$ est associative.
- ▷ Il existe $e\in G$ tel que $\forall x\in G, xe=x$.
- ▷ Étant donné un tel e, $\forall x\in G,\exists y\in G, xy=e$.

Montrer que $(G,\cdot)$ est un groupe.

2. On munit $M=\mathbb{C}^*$ de l'opération ♦ définie par

$$\forall (z,\xi)\in M^2, z\blacklozenge\xi=|z|\cdot\xi.$$

Montrer que
- ▷ L'opération ♦ est associative.
- ▷ Il existe $e\in M$ tel que $\forall z\in M, e\blacklozenge z=z$.
- ▷ Étant donné un tel e, $\forall z\in M,\exists\xi\in M, z\blacklozenge\xi=e$.

Puis montrer que $(M,\blacklozenge)$ n'est **pas** un groupe.

3. Commenter.

Indication p. 252

Exercice 3 (◔☆ Maximum et minimum comme opérations)
Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné tel que $\leq$ est un ordre total.

1. Montrer l'opération max définie par

$$\begin{aligned} \max : E \times E &\to E \\ (x, y) &\mapsto \max(x, y) \end{aligned}$$

est associative et commutative.
2. Déterminer une CNS sur $(E, \leq)$ pour que $(E, \max)$ soit un monoïde.

Indication p. 252

Exercice 4 (◔★ Encore la relation de similitude)
Soit $(M, \cdot)$ un monoïde.

On munit M d'une relation $\sim$ définie par

$$\forall (x, y) \in M^2, x \sim y \Leftrightarrow \exists u \in M^\times, x = uyu^{-1}.$$

Commenter.

Indication p. 252

Exercice 5 (◑★ Opération opposée)
Soit $(M, \perp)$ un monoïde.

On défini une opération $\top$ sur M par

$$\forall (x, y) \in M, x \top y = y \perp x.$$

1. Montrer que $(M, \top)$ est un monoïde.
2. Donner un exemple où $(M, \top)$ et $(M, \perp)$ ne sont pas isomorphes.
3. On suppose de plus que $(M, \perp)$ est un groupe.

   Montrer que $(M, \top)$ est un groupe et expliciter un isomorphisme de groupe entre $(M, \perp)$ et $(M, \top)$.

Indication p. 253

Groupes

Exercice 6 (◔★♣ Groupes isomorphes)
Soient $(G_1, *_1)$ et $(G_2, *_2)$ deux groupes.

On dit qu'ils sont *isomorphes* ssi il existe un isomorphisme de G_1 vers G_2. On note alors $G_1 \simeq G_2$.

1. Donner un exemple de deux groupes isomorphes, et un exemple de deux groupes non isomorphes.
2. Montrer que
   - ▷ Étant donné un groupe G, $G \simeq G$
   - ▷ Étant donnés des groupes G_1, G_2 et G_3 **si** $G_1 \simeq G_2$ et $G_2 \simeq G_3$ **alors** $G_1 \simeq G_3$.
   - ▷ Étant donnés des groupes G_1 et G_2 **si** $G_1 \simeq G_2$ **alors** $G_2 \simeq G_1$.
3. Commenter.

Indication p. 253

Exercice 7 (◔★ Groupes non isomorphes)

1. Montrer que les groupes $(\mathbb{R}, +)$ et $(\mathbb{R}^*, \times)$ ne sont pas isomorphes.
2. Montrer que les groupes $(\mathbb{U}_4, \cdot)$ et $(\mathbb{U}_2 \times \mathbb{U}_2, \cdot)$ ne sont pas isomorphes.

Indication p. 253

Exercice 8 (◔☆ Sous-groupes ? I)
Pour chacun des ensembles suivants, déterminer si il s'agit de sous-groupes de $(\mathbb{C}^*, \times)$.

1. $\{a + i0, a \in \mathbb{R}_+^*\}$
2. $\{z \in \mathbb{C}^* \mid |z| \geq 1\}$
3. $\{a + bi, (a, b) \in \mathbb{Q}^2 \setminus \{(0, 0)\}\}$
4. $\{z \in \mathbb{C}^* \mid \mathrm{Re}(z) \times \mathrm{Im}(z) > 0\}$
5. $\{\mathrm{ch}(t) + \mathrm{sh}(t)i, t \in \mathbb{R}\}$
6. $\{z \in \mathbb{C}^* \mid \exists n \in \mathbb{N}^*, z^n = 1\}$

Indication p. 253

Exercice 9 (◔★♠ Un classique)
Soit $(G, \cdot)$ un groupe de neutre e_G tel que pour tout $x \in G$, $x^2 = e_G$.

Montrer que G est abélien.

Indication p. 253

Exercice 10 (◕☆ Raffinement d'un exercice précédent)
Soit $(G, \cdot)$ un groupe **fini** de neutre e_G tel que pour tout $x \in G$, $x^2 = e_G$.

Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que G est isomorphe à $(\mathbb{U}_2)^n$.

Indication p. 254

Exercice 11 (◔★ Union de sous-groupes ?)
Soit $(G, \cdot)$ un groupe et H_1, H_2 deux sous-groupes de G.

1. Redémontrer brièvement que $H_1 \cap H_2$ est un sous-groupe de G.
2. Donner un exemple où $H_1 \cup H_2$ n'est **pas** un sous-groupe de G.
3. Montrer que **si** $H_1 \cup H_2$ est un sous-groupe de G **alors** $H_1 \subset H_2$ ou $H_2 \subset H_1$.

Indication p. 254

Exercice 12 (◔★ Loi de composition des vitesses relativistes)
On définit une opération $\oplus$ sur $]-1,1[$ par

$$\forall (x,y) \in]-1,1[, x \oplus y = \frac{x+y}{1+xy}.$$

Montrer que $(]-1,1[, \oplus)$ est un groupe abélien.

Indication p. 254

Exercice 13 (◔★ Transport de loi)
Soit $(G, \cdot)$ un groupe.

Soit E un ensemble et $\varphi : E \to G$ une application **bijective**.

On muni E de l'opération $*$ définie par

$$\forall (x,y) \in E^2, x * y = \varphi^{-1}(\varphi(x) \cdot \varphi(y)).$$

Montrer que $(E, *)$ est un groupe.

Indication p. 254

Exercice 14 (◔☆ Petite translation)
Soit $(G, *)$ un groupe et $a \in G$. On définit une opération $\star_a$ sur G par

$$\forall (x, y) \in G^2, x \star_a y = x * a * y.$$

Montrer que $(G, \star_a)$ est un groupe, et qu'il est isomorphe à $(G, *)$.

Indication p. 254

Exercice 15 (◔★♣ Sous-groupes additifs de $\mathbb{Z}$)
Soit H un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$.

Montrer qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $H = m\mathbb{Z}$.

(C'est à dire tel que $H = \{mk, k \in \mathbb{Z}\}$).

Indication p. 254

Exercice 16 (◑★♣ Groupe des automorphismes)
Soit $(G, \cdot)$ un groupe.

On note $\mathrm{Aut}(G)$ l'ensemble des automorphismes de G.

Montrer que $(\mathrm{Aut}(G), \circ)$ est un groupe.

Indication p. 255

Exercice 17 (◔★♠ Conjugaisons et automorphismes intérieurs)
Soit $(G, \cdot)$ un groupe.

Pour $u \in G$ on note

$$\begin{aligned} \varphi_u : G &\to G \\ x &\mapsto uxu^{-1}. \end{aligned}$$

1. Montrer que pour tout $u \in G$, $\varphi_u \in \mathrm{Aut}(G)$.
2. Montrer que

$$\begin{aligned} \Phi : G &\to \mathrm{Aut}(G) \\ u &\mapsto \varphi_u \end{aligned}$$

est un morphisme de groupe.
3. Donner un exemple où Φ n'est pas injectif, et un exemple où Φ n'est pas surjectif.

Indication p. 255

Exercice 18 (◔★ Les groupes des permutations sont compliqués !)
Soit $(G, \cdot)$ un groupe.

Étant donné un ensemble E, on rappelle que l'on note $\mathcal{S}_G = \mathrm{Bij}(G, G)$ l'ensemble des bijections de G vers G.

1. Soit E un ensemble. Rappeler très brièvement pourquoi $(\mathcal{S}_E, \circ)$ est un groupe.
2. Montrer que l'application
$$\begin{aligned} G &\to \mathcal{S}_G \\ g &\mapsto (x \mapsto gx) \end{aligned}$$
est bien définie, et est un morphisme de groupes injectif.
3. Montrer qu'il existe un ensemble E et un sous-groupe H de $\mathcal{S}_E$ tel que $(G, \cdot)$ est isomorphe à $(H, \circ)$.
4. Commenter.

Indication p. 255

Exercice 19 (◔★ Centre)
Soit $(G, \cdot)$ un groupe.

On appelle *centre* de G, noté $Z(G)$, l'ensemble des éléments commutant avec tous les autres éléments c'est à dire
$$Z(G) = \{z \in G \mid \forall x \in G, xz = zx\}.$$

1. Montrer que $Z(G)$ est un sous-groupe de G.
2. En utilisant l'exercice 17 montrer en une ligne que $Z(G)$ est un sous-groupe de G.

Indication p. 255

Exercice 20 (◑★ Centralisateur d'une partie)
Soit $(G, \cdot)$ un groupe.

Pour $A \subset G$ on appelle *centralisateur* de A, noté $C_G(A)$ l'ensemble des éléments qui commutent avec tout élément de A c'est à dire

$$C_G(A) = \{y \in G \mid \forall x \in A, xy = yx\}.$$

1. Montrer que pour toute partie A, $C_G(A)$ est un sous-groupe de G.

2. Soient A et B des parties de G.

Montrer que si $A \subset B$ alors $C_G(A) \supset C_G(B)$.

3. Soit A une partie de G.

Montrer que $A \subset C_G(C_G(A))$.

4. Soit A une partie de G.

Montrer que $C_G(C_G(C_G(A))) = C_G(A)$.

Indication p. 255

Exercice 21 (◔★♣ Groupe engendré par une partie)
Soit $(G, \cdot)$ un groupe.

Soit $A \subset G$ une partie quelconque.

Montrer que l'ensemble des sous-groupes de G contenant A admet un minimum (pour l'inclusion).

{*Ce groupe est appelé sous-groupe engendré par A, noté parfois* $\langle A \rangle$.}

Indication p. 256

Exercice 22 (◔★♠ Vers l'ordre d'un élément)
Soit $(G, \cdot)$ un groupe. On rappelle que $(\mathbb{Z}, +)$ est un groupe.

Soit $x \in G$.

1. Montrer que
$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{Z} &\to G \\ n &\mapsto x^n \end{aligned}$$
est un morphisme de groupes.
2. On note $\langle x \rangle$ le plus petit (pour l'inclusion) sous-groupe de G contenant x.
Montrer que $\mathrm{Im}(\varphi) = \langle x \rangle$.
3. Montrer que $\langle x \rangle$ est fini ssi il existe $d \in \mathbb{N}^*$ tel que
$$\forall n \in \mathbb{Z}, x^n = e_G \Leftrightarrow d \mid n.$$
{*On dit alors que x est d'ordre fini et on appelle d l'ordre de x.*}

Indication p. 256

Exercice 23 (◔★♠ Classes d'équivalence à droite)
Soit $(G, \cdot)$ un groupe.

Soit H un sous-groupe de G.

On définit une relation $\mathcal{R}_H$ sur G par
$$\forall (x, y) \in G^2, x \mathcal{R}_H y \Leftrightarrow xy^{-1} \in H.$$

1. Montrer que $\mathcal{R}_H$ est une relation d'équivalence.
2. Soit $x \in G$. Montrer que la classe d'équivalence de x est
$$Hx = \{hx, h \in H\}.$$
3. Soient $x_1, x_2 \in H$. Expliciter une bijection de Hx_1 vers Hx_2.

Indication p. 256

Exercice 24 (◑★♠ Théorème de Lagrange)
Soit $(G, \cdot)$ un groupe **fini**.

1. Soit H un sous-groupe de G. En utilisant l'exercice 23 montrer que
$$\boxed{|H| \mid |G|}.$$
2. Avec les notations de l'exercice 23, montrer que pour tout $x \in G$, l'ordre de x divise $|G|$.

Indication p. 256

Exercice 25 (◔★ Une version très allégée de Lagrange)
Soit $(G,\cdot)$ un groupe **fini** et **abélien**.

Soit $a \in G$.

1. Montrer que
$$\begin{aligned}\tau_a : G &\to G\\ x &\mapsto ax\end{aligned}$$
est une bijection.
2. En déduire que
$$\prod_{x\in G} x = a^{|G|}\prod_{x\in G} x.$$
3. Que peut-on conclure ?

Indication p. 256

Exercice 26 (◑★ Sous-groupes finis de $\mathbb{C}^*$)
Soit $(G,\cdot)$ un sous-groupe fini de $\mathbb{C}^*$.
1. Montrer que $G \subset \mathbb{U}$.
2. Montrer que pour tout $z \in G$, il existe $d_z \in \mathbb{N}$ tel que $z^{d_z} = 1$.
3. Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $G \subset \mathbb{U}_N$.
4. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $G = \mathbb{U}_n$.

Indication p. 256

Exercice 27 (◑☆♠ Sous-groupes distingués, le tout début)
Soit $(G,\cdot)$ un groupe.

Soit H un sous-groupe de G.

On dit que H est *distingué* (ou *normal*) ssi
$$\forall (x,h) \in G\times H, xhx^{-1} \in H.$$
1. Pour $x \in G$, on note $Hx = \{hx, h \in H\}$ et $xH = \{xh, h \in H\}$.
Montrer que H est distingué ssi $Hx = xH$.
2. Montrer que le noyau d'un morphisme de groupes est distingué.

Indication p. 256

Exercice 28 (◕★♠ Sous-groupes distingués, la suite mais pas la fin)
On utilise dans cet exercice les notations de l'exercice 27.

Soit $(G,\cdot)$ un groupe et H un sous-groupe **distingué** de G.

1. Montrer que $\mathcal{R}_H$ définie par

$$\forall (x,y)\in G^2, x\mathcal{R}_H y \Leftrightarrow xy^{-1}\in H$$

est une relation d'équivalence sur G.

On note $\frac{G}{H}$ l'ensemble quotient (au lieu de $\frac{G}{\mathcal{R}_H}$).

Soient $X,Y\in\frac{G}{H}$.

On choisit $x,y\in G$ tels que $X=\mathrm{Cl}(x)$ et $Y=\mathrm{Cl}(y)$. On pose

$$X\cdot Y=\mathrm{Cl}(x\cdot y).$$

1. Justifier la bonne définition de $\cdot$.
2. Montrer que $\left(\frac{G}{H},\cdot\right)$ est un groupe.
3. En déduire que tout groupe distingué est noyau d'un morphisme de groupes.

Indication p. 257

Exercice 29 (◔☆ Sous-groupes ! II)
Montrer que chacun des ensembles suivants,muni du produit matriciel, est un groupe.

1. $\left\{\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{Z})\mid ad-bc=1\right\}$

2. $\left\{\begin{pmatrix}a&b\\-b&a\end{pmatrix},(a,b)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\right\}$

3. $\left\{\begin{pmatrix}1&\alpha\\0&1\end{pmatrix},\alpha\in\mathbb{C}\right\}$

4. $\left\{\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{C})\mid b=0 \text{ et } ad>0\right\}$

5. $\left\{\begin{pmatrix}\cos(\theta)&-\sin(\theta)\\\sin(\theta)&\cos(\theta)\end{pmatrix},\theta\in\mathbb{R}\right\}$

6. $\left\{\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{C})\mid a+b=c+d=1\right\}$

1. $\left\{\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{C})\mid |a|^2+|c|^2=|b|^2+|d|^2=1 \text{ et } a\overline{b}+c\overline{d}=0\right\}$

2. $\left\{\varepsilon M,(\varepsilon,M)\in\{1,i,-1,-i\}\times\left\{I_2,\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z\right\}\right\}$

où $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $\sigma_x=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$, $\sigma_y=\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}$, $\sigma_z=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$.

Indication p. 257

Exercice 30 (◑☆ Morphismes de $\mathbb{Q}$ dans les groupes finis)
Soit $(G, \cdot)$ un groupe **fini**.

Montrer que tout morphisme de groupe de $(\mathbb{Q}, +)$ vers $(G, \cdot)$ est constant.

Indication p. 257

Exercice 31 (◔☆ Groupes des similitudes directes)
On rappelle qu'une similitude directe est une application de la forme

$$\begin{aligned} \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto az + b \end{aligned}$$

où $(a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$.

1. Montrer que l'ensemble des similitudes directes muni de la composition est un groupe.
2. Montrer que l'ensemble des translations (c'est à dire des $z \mapsto 1z + b$, $b \in \mathbb{C}$) est un groupe.
3. L'ensemble des rotations (c'est à dire des $z \mapsto e^{i\theta}(z - \omega) + \omega$, $(\theta, \omega) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}$) est-il un groupe ?

Indication p. 257

Exercice 32 (◔★ Commutateurs)
Soit $(G, \cdot)$ un groupe.

Pour deux éléments g_1 et g_2 de G on appelle *commutateur* de g_1 et g_2 l'élément

$$[g_1, g_2] = g_1^{-1} g_2^{-1} g_1 g_2.$$

1. Montrer que pour tous $(g_1, g_2) \in G^2$, g_1 et g_2 commutent ssi $[g_1, g_2] = e_G$.
2. Montrer que
$$\forall (g_1, g_2) \in G^2, ([g_1, g_2])^{-1} = [g_2, g_1].$$
3. Soit $(H, *)$ un groupe et $f : G \to H$ un morphisme de groupe.

   Montrer que
$$\forall (g_1, g_2) \in G^2, f([g_1, g_2]) = [f(g_1), f(g_2)].$$

Indication p. 257

Exercice 33 (◔★♣ Inclusions des noyaux et images version essentielle)
Soient $(F, *_F)$, $(G, *_G)$,$(H, *_H)$ des groupes, $\varphi : F \to G$ et $\psi : G \to H$ des morphismes de groupes.

Montrer que

$$\mathrm{Ker}(\varphi) \subset \mathrm{Ker}(\psi \circ \varphi)$$

et que

$$\mathrm{Im}(\psi \circ \varphi) \subset \mathrm{Im}(\psi).$$

Indication p. 257 · Solution p. 264

Exercice 34 (◔★♠ Inclusion des noyaux, version cas d'égalité)
Soient $(F, *_F)$, $(G, *_G)$,$(H, *_H)$ des groupes, $\varphi : F \to G$ et $\psi : G \to H$ des morphismes de groupes.

Montrer que

$$\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Ker}(\psi \circ \varphi) \Leftrightarrow \mathrm{Ker}(\psi) \cap \mathrm{Im}(\varphi) = \{e_G\}.$$

Indication p. 257 · Solution p. 264

Exercice 35 (◑★ Inclusion des images, version cas d'égalité)
Soient $(F, *_F)$, $(G, *_G)$,$(H, *_H)$ des groupes, $\varphi : F \to G$ et $\psi : G \to H$ des morphismes de groupes.

Montrer que

$$\mathrm{Im}(\psi) = \mathrm{Im}(\psi \circ \varphi) \Leftrightarrow G = \{\kappa *_G \xi, (\kappa, \xi) \in \mathrm{Ker}(\psi) \times \mathrm{Im}(\varphi)\}.$$

Indication p. 257 · Solution p. 265

Exercice 36 (◑★ Une formule ayant beaucoup de noms)
Soient $(G, \cdot)$ et $(H, *)$ deux groupes. On suppose de plus que G est **finie**.

Montrer que $\mathrm{Ker}(\varphi)$ et $\mathrm{Im}(\varphi)$ sont finis et que

$$|\ G\ | = |\ \mathrm{Ker}(\varphi)\ \|\ \mathrm{Im}(\varphi)|.$$

Indication p. 258

Exercice 37 (◕★ Actions, orbites et stabilisateurs)
Soit $(G, \cdot)$ un groupe et E un ensemble.

Soit φ un morphisme de groupes $\varphi : (G, \cdot) \to (\mathcal{S}_E, \circ)$ (on dit alors que φ est une *action* de G sur E).

1. Pour $x \in E$ on définit *l'orbite* de x par
$$\mathrm{Orb}(x) = \{\varphi(g)(x), g \in G\}.$$
Montrer que l'ensemble des orbites est une partition de E.
2. Pour $x \in E$ on définit le *stabilisateur* de x par
$$\mathrm{Stab}(x) = \{g \in G \mid \varphi(g)(x) = x\}.$$
Montrer que pour tout $x \in E$, le stabilisateur de x est un sous-groupe de G.
3. Montrer que si G est fini, pour tout $x \in E$, $\mathrm{Orb}(x)$ est fini et
$$|\mathrm{Orb}(x)| = \frac{|G|}{|\mathrm{Stab}(x)|}.$$

Indication p. 258

Exercice 38 (◑☆ Beaucoup de sous-groupes)
Soit $(G, \cdot)$ un groupe.

On suppose que G est infini. Montrer que G admet une infinité de sous-groupes.

Indication p. 258

Exercice 39 (◑☆ Trop d'éléments)
Soit $(G, \cdot)$ un groupe fini.

Soient A et B deux parties de G telles que $|A| + |B| > |G|$.

Montrer que tout élément de G peut s'écrire sous la forme ab, où $a \in A$ et $b \in B$.

Indication p. 258

Exercice 40 (●★ Probabilité de commuter)
Soit $(G, \cdot)$ un groupe fini **non abélien**.

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur G.

Montrer que

$$\mathbb{P}(XY = YX) \leq \frac{5}{8}.$$

Indication p. 258

Exercice 41 (◑★ Produit semi-direct)
Soient $(G, *)$ et $(H, \cdot)$ deux groupes.

Soit $\varphi : (H, \cdot) \to (\mathrm{Aut}(G), \circ)$ un morphisme de groupes.

On définit une opération $\star$ sur $G \times H$ par

$$\forall ((g,h),(g',h')) \in (G \times H)^2, (g,h) \star (g',h') = (g * \phi(h)(g), h \cdot h').$$

Montrer que $(G \times H, \star)$ est un groupe.

(*Ce groupe est appelé produit semi-direct de G par H relativement à φ et noté $G \rtimes_\varphi H$.*)

Indication p. 258

Exercice 42 (◑☆ Produit et sous-groupes)
Soit $(G, \cdot)$ un groupe, H et K deux sous-groupes de G.

On note $HK = \{hk, (h,k) \in H \times K\}$ et $KH = \{kh, (k,h) \in K \times H\}$.

Montrer que HK est un groupe ssi $HK = KH$.

Indication p. 259

Exercice 43 (◔★ Union croissante)
Soit $(G, \cdot)$ un groupe.

Soient $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante (pour l'inclusion) de sous-groupes de G.

Montrer que

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} H_n$$

est un sous-groupe de G.

Commenter.

Indication p. 259

Exercice 44 (◕★ Groupe de Prüfer)
Soit p un nombre premier.

On pose

$$\mathbb{U}_{p^\infty} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{U}_{p^n}.$$

1. Montrer que $\mathbb{U}_{p^\infty}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$.
2. Déterminer tous les sous-groupes de $\mathbb{U}_{p^\infty}$.

Indication p. 259

Exercice 45 (◔☆ La finitude arrange beaucoup de choses)
Soit $(G, \cdot)$ un groupe.

Soit $A \subset G$ une partie **finie** de G.

On suppose A non vide et stable par produit.

Montrer que A est un sous-groupe de G.

Indication p. 259

Exercice 46 (◑★ Sous-groupes de $\mathbb{Z}^2$)
On considère $\mathbb{Z}^2$ muni de la loi $+$.

1. Soient $u_1, u_2 \in \mathbb{Z}^2$.

Montrer que

$$\mathbb{Z}u_1 + \mathbb{Z}u_2 = \{a_1u_1 + a_2u_2, (a_1, a_2) \in \mathbb{Z}^2\}$$

est un sous-groupe de $\mathbb{Z}^2$.

Soit $H \subset \mathbb{Z}^2$ un sous-groupe de $\mathbb{Z}^2$.

On note π_1 la projection de $\mathbb{Z}^2$ sur $\mathbb{Z}$:

$$\pi : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto x.$$

1. Montrer qu'il existe un et unique $d_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\pi_1(H) = d_1\mathbb{Z}$.

2. Que dire si $d_1 = 0$?

On suppose désormais $d_1 > 0$.

3. Soit $u_1 \in H$ tel que $\pi_1(u_1) = d_1$.

Montrer qu'il existe $u_2 \in H$ tel que

$$H = \mathbb{Z}u_1 + \mathbb{Z}u_2.$$

Indication p. 259

Anneaux

Exercice 47 (◔★♣ Un bout du cours sur les anneaux)

1. Montrer qu'une intersection de sous-anneaux est un sous-anneau.

2. Montrer qu'un sous-anneau est un anneau.

Indication p. 259

Exercice 48 (◔★♣ Un bout du cours sur les anneaux II)

1. Montrer qu'une composée de morphismes d'anneaux est un morphisme d'anneaux.

2. Montrer que la réciproque d'un morphisme d'anneaux bijectif est un morphisme d'anneaux.

Indication p. 259

Exercice 49 (◔★♣ Binôme et Bernoulli)
Soit $(A,+,\cdot)$ un anneau.

Soient a et b deux éléments de A **qui commutent** entre eux (c'est à dire tels que $ab=ba$).

1. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$,
$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k}.$$
2. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$,
$$a^n-b^n=(a-b)\sum_{k=0}^{n-1}a^kb^{n-1-k}.$$

Indication p. 259

Exercice 50 (◔★ Un bout du cours: Idéaux et noyaux de morphismes d'anneaux)
Soit $(A,+,\cdot)$ un anneau.

On rappelle que $I\subset A$ est appelée *idéal* de A ssi
- ▷ I est un sous-groupe de $(A,+)$
- ▷ I est stable par produit à gauche et à droite par des éléments quelconques de l'anneau
$$\forall x\in I,\forall a\in A, ax\in I \quad\text{et}\quad xa\in I.$$

1. Montrer que l'intersection de deux idéaux est un idéal.
2. Donner un exemple de morphisme d'anneaux dont le noyau n'est **pas** un sous-anneau de l'anneau de départ.
3. Montrer que le noyau d'un morphisme d'anneaux est un idéal de l'anneau de départ.

Indication p. 259

Exercice 51 (◔★ Il faudra faire attention en arithmétique)
Soit $(A,+,\cdot)$ un anneau **intègre**.

On définit la relation de divisibilité $|$ sur A par
$$\forall(a,b)\in A^2, a\mid b\Leftrightarrow\exists q\in A, b=aq.$$

1. Montrer que $|$ est réflexive et transitive.
2. Montrer que pour tout $a,b\in A$ on a
$$(a|b \quad\text{et}\quad b|a)\Leftrightarrow(\exists u\in A^\times, a=bu).$$
3. Commenter.

Indication p. 260

Exercice 52 (◑★ Encore des manipulations d'idéaux)
Soit $(A, +, \cdot)$ un anneau.

1. On suppose que A est **commutatif**.

   Soit $x \in A$. Montrer que
   $$xA = \{xa, a \in A\}$$
   est un idéal de A.
2. Donner un exemple d'anneau et d'idéal qui n'est pas de la forme xA pour un certain $x \in A$.
3. Soient I et J deux idéaux de A.

   Montrer que
   $$I + J = \{i + j, (i, j) \in I \times J\}$$
   est un idéal de A.
4. On suppose que A est **commutatif**.

   Soient I et J deux idéaux de A.

   Montrer que
   $$IJ = \left\{ a \in A \mid \exists n \in \mathbb{N}, \exists \Big((i_k)_{k\in[\![1,n]\!]}, (j_k)_{k\in[\![1,n]\!]} \Big) \in I^n \times J^n, a = \sum_{k=1}^{n} i_k j_k \right\}$$
   est un idéal de A.
5. On suppose que A est **commutatif**.

   Soient I, J, K des idéaux de A.

   Montrer que
   $$I(J + K) = IJ + IK.$$

Indication p. 260

Exercice 53 (◔★ Inversibles d'un sous anneau)

1. Soit $(A, +, \cdot)$ un anneau et B un sous-anneau de A.

Montrer que

$$B^\times \subset A^\times \cap B.$$

2. On munit $\mathbb{Q}$ de sa structure d'anneau usuelle.

Comparer

$$\mathbb{Z}^\times \quad \text{et} \quad \mathbb{Q}^\times \cap \mathbb{Z}.$$

Commenter.

3. Soit A un anneau, et B un sous-anneau **fini** de A.

Soit $a \in A^\times \cap B$.

3.1. Montrer que

$$\tau_a : \begin{array}{c} B \longrightarrow B \\ x \longmapsto ax \end{array}.$$

est bien défini et un morphisme de groupes (additif).

3.2. Montrer que τ_a est injectif.

3.3. En déduire que τ_a est bijectif.

3.4. Conclure que $a \in B^\times$.

3.5. Commenter

Indication p. 260

Exercice 54 (◔★ Non inversibles et diviseurs de zéro)

Soit $(A, +, \cdot)$ un anneau.

1. Un élément inversible peut-il être diviseur de 0 ? Un diviseur de 0 peut-il être inversible ?

2. Dans $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, 2 est-il inversible ? est-il diviseur de 0 ?

3. Soit A un anneau fini. Montrer que tout élément est soit inversible soit un diviseur de 0.

Indication p. 260

Exercice 55 (◔★ Différence symétrique et anneau de Boole)
Soit E un ensemble.

On rappelle que la différence symétrique Δ est l'opération définie sur $\mathcal{P}(E)$ par

$$\forall (A,B) \in \mathcal{P}(E), A\Delta B = (A \cup B) \cap \overline{(A \cap B)}.$$

1. Montrer brièvement que $(\mathcal{P}(E), \Delta)$ est un groupe abélien.
2. Montrer que $(\mathcal{P}(E), \Delta, \cap)$ est un anneau commutatif.
3. Déterminer l'ensemble des éléments inversibles de cet anneau.

Indication p. 260

Exercice 56 (◑☆ Différence symétrique et anneau de Boole II)
On reprend les notations de l'exercice 55.

1. Soit I un idéal de $(\mathcal{P}(E), \Delta, \cap)$. Montrer que I est stable par union finie.
2. Soit I un idéal de $(\mathcal{P}(E), \Delta, \cap)$. Montrer que pour tout $A \subset E$, on a
$$A \in I \Rightarrow (\forall B \in \mathcal{P}(E), B \subset A \Rightarrow B \in I).$$
3. On suppose dans cette question que E est fini.

   Montrer que l'ensemble des idéaux de $(\mathcal{P}(E), \Delta, \cap)$ est l'ensemble des $\mathcal{P}(A)$ où $A \subset B$.
4. Pour $E = \mathbb{N}$, on pose $I = \{X \in \mathcal{P}(E) \mid X \text{ fini.}\}$.

   Montrer que I est un idéal de $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \Delta, \cap)$
5. Commenter.

Indication p. 260

Exercice 57 (◔★♠ Entiers de Gauss)
On note

$$\mathbb{Z}[i] = \{a + ib, (a,b) \in \mathbb{Z}^2\}.$$

1. Montrer que $\mathbb{Z}[i]$ est un anneau commutatif.
2. Déterminer l'ensemble des éléments inversibles.

Indication p. 261

Exercice 58 (◔★♠ Introduction aux nilpotents)
Soit $(A, +, \cdot)$ un anneau.

On dit que $x \in A$ est *nilpotent* ssi il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x^n = 0_A$.

1. Donner un exemple d'anneau contenant un élément nilpotent non nul.
2. Soit u un élément nilpotent non nul. Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que
$$u^{n_0-1} \neq 0_A \quad \text{et} \quad \forall n \geq n_0, u^n = 0_A.$$

On dit alors que n_0 est l'ordre de nilpotence de u.

1. Un élément nilpotent peut-il être régulier ?
2. Soit u un élément nilpotent. Montrer que $1_A - u$ est inversible.

Indication p. 261

Exercice 59 (◔★ Un peu de nilpotents et produits)
Soit $(A, +, \cdot)$ un anneau.

On rappelle que $x \in A$ est *nilpotent* ssi il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x^n = 0_A$.

1. Donner un exemple d'anneau contenant deux éléments nilpotents dont le produit n'est **pas** nilpotent.
2. Montrer que le produit de deux éléments **qui commutent** et donc l'un est nilpotent est un élément nilpotent.
3. Soient u un élément inversible et n un élément nilpotent **qui commutent**. Montrer que $u + n$ est inversible.
4. Soient a et b des éléments de A tels que ab est nilpotent. Montrer que ba est nilpotent.

Indication p. 261

Exercice 60 (◑★ Vers un lien spectral entre AB et BA)
Soit $(A, +, \cdot)$ un anneau.

Soient $a, b \in A$ tels que $1_A - ab \in A^\times$.

Montrer que $1_A - ba \in A^\times$.

Indication p. 261

Exercice 61 (◑☆ Un cas très particulier d'un théorème de Jacobson)
Soit $(A, +, \cdot)$ un anneau tel que pour tout $x \in A$, $x^2 = x$.

Montrer que A est commutatif.

Indication p. 261

Exercice 62 (◔★ Début d'étude de $\mathbb{Z}\left[\sqrt{d}\right]$)
Soit $d \in \mathbb{N}$ n'étant pas le carré d'un entier.

On note

$$\mathbb{Z}\left[\sqrt{d}\right] = \left\{a + b\sqrt{d}, (a,b) \in \mathbb{Z}^2\right\}.$$

1. Montrer que l'application

$$\begin{aligned} p : \mathbb{Z}^2 &\to \mathbb{Z}\left[\sqrt{d}\right] \\ (a,b) &\mapsto a + b\sqrt{d} \end{aligned}$$

est bijective.

2. Montrer que $\mathbb{Z}\left[\sqrt{d}\right]$ est un anneau.

3. Montrer que l'application $\sigma : \mathbb{Z}\left[\sqrt{d}\right] \to \mathbb{Z}\left[\sqrt{d}\right]$ définie par

$$\forall (a,b) \in \mathbb{Z}^2, \sigma\left(a + b\sqrt{d}\right) = a - b\sqrt{d}$$

est **bien définie** et est un automorphisme d'anneau.

4. Montrer que

$$\mathbb{Z}\left[\sqrt{d}\right]^\times = \left\{u \in \mathbb{Z}\left[\sqrt{d}\right] \mid u\sigma(u) = \pm 1\right\}.$$

Indication p. 261

Exercice 63 (◑☆ Radical d'un idéal)
Soit $(A, +, \cdot)$ un anneau **commutatif**.

Pour I un idéal de A on note

$$\sqrt{I} = \{x \in A \mid \exists n \in \mathbb{N}, x^n \in I\}$$

1. Soit I un idéal de A.

Montrer que $\sqrt{I}$ est un idéal de A contenant I.

2. Soit I un idéal.

Montrer que

$$\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}.$$

3. Soient I et J des idéaux de A.

Montrer que

$$\sqrt{I \cap J} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$$

et

$$\sqrt{I + J} \supset \sqrt{I} + \sqrt{J}.$$

Indication p. 261

Exercice 64 (◕☆ Jouons encore avec des idéaux radicaux)
Soit $(A, +, \cdot)$ un anneau **commutatif**.

On réutilise les notations de l'exercice 63. Les questions suivantes sont indépendantes.

1. Soient I et J des idéaux de A.

Montrer que

$$\sqrt{I + J} = \sqrt{\sqrt{I} + \sqrt{J}}.$$

2. Quel nom donner à $\sqrt{\{0\}}$?

3. On considère dans cette question $A = \mathbb{Z}$ muni des opérations usuelles.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Déterminer $\sqrt{n\mathbb{Z}}$.

Indication p. 262

Corps

Exercice 65 (◔★♠ Morphismes entre corps)
Montrer que tout morphisme d'anneaux entre deux corps est injectif.

Indication p. 262

Exercice 66 (◔★♠ Caractéristique d'un corps)
Soit $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ un corps.

1. Montrer que
$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{Z} &\to \mathbb{K}\\ n &\mapsto n1_{\mathbb{K}}\end{aligned}$$
est un morphisme d'anneaux.
2. Montrer qu'il existe un unique $p \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{Ker}(\varphi) = p\mathbb{Z}$.
3. Montrer que p est premier ou nul.

L'entier p est appelé la caractéristique du corps $\mathbb{K}$.

1. On suppose que $p \neq 0$.
Montrer que
$$\begin{aligned}\mathbb{K} &\to \mathbb{K}\\ x &\mapsto x^p\end{aligned}$$
est un endomorphisme (appelé morphisme de Frobenius).
2. Montrer que si $\mathbb{K}$ est fini alors le morphisme de Frobenius est un automorphisme de $\mathbb{K}$.
3. ⋆ (*Nécessite le cours d'algèbre linéaire*)
Soit $\mathbb{K}$ un corps **fini**.
Montrer que sa caractéristique p est non nulle et qu'il existe un entier n tel que $|\mathbb{K}| = p^n$.
4. ⋆ (*Nécessite le cours de fractions rationnelles*)
Montrer que pour $\mathbb{K} = \frac{\mathbb{Z}}{p}\mathbb{Z}(X)$, le corps des fractions rationnelles à coefficients dans $\frac{\mathbb{Z}}{p}\mathbb{Z}$, on a $\mathbb{K}$ de caractéristique p et le morphisme de Frobenius n'est pas surjectif.

Indication p. 262

Exercice 67 (◔★ Une construction matricielle des complexes)
On note

$$\tilde{\mathbb{C}} = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

1. Montrer que $\tilde{\mathbb{C}}$ est un sous-anneau de $M_2(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $\tilde{\mathbb{C}}$ est un corps.
3. Commenter.

Indication p. 262

Exercice 68 (◑★ Une construction matricielle des quaternions)
On note

$$\mathbb{H} = \left\{ \begin{pmatrix} u & -\overline{v} \\ v & \overline{u} \end{pmatrix}, (u,v) \in \mathbb{C}^2 \right\}.$$

1. Montrer que $\mathbb{H}$ est un sous-anneau de $M_2(\mathbb{C})$.
2. Montrer tout élément non nul de $\mathbb{H}$ est inversible.
3. Commenter.

Indication p. 262

Exercice 69 (◑★ Un zeste d'algébriques)
Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. On suppose qu'il existe un polynôme P de degré 2 à **coefficients rationnels** tel que

$$P(\alpha) = 0.$$

On pose

$$\mathbb{Q}(\alpha) = \{x + y\alpha, (x,y) \in \mathbb{Q}^2\}$$

1. Que dire si $\alpha \in \mathbb{Q}$?

On suppose désormais que $\alpha \notin \mathbb{Q}$.

1. Montrer que $\mathbb{Q}(\alpha)$ est un anneau.
2. Montrer que $\mathbb{Q}(\alpha)$ est un corps.

Indication p. 263

Exercice 70 (◔☆ i versus j)
On note $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

Montrer que les corps $\mathbb{Q}(i)$ et $\mathbb{Q}(j)$ (définis à l'exercice 69) ne sont pas isomorphes.

Indication p. 263

Exercice 71 (◔☆ Corps fini à 4 éléments)
Construire un corps fini à 4 éléments.

Indication p. 263

Indications

Indication 1 · Énoncé p. 226 (Puissances d'un inversible dans un monoïde)
Par récurrence, pour $n \in \mathbb{N}$.

Avec $n = -(-n)$ pour $n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$.

Indication 2 · Énoncé p. 226 (Juste la droite ou juste la gauche suffit)

1. Il faut vérifier que e est aussi un « neutre à gauche » et que les éléments sont aussi « inversibles à gauche ».

On fixe un tel $e \in G$.

Soit $x \in G$ et soit $\tilde{x} \in G$ tel que $x\tilde{x} = e$.

En calculant avec précautions:

- ▷ Montrer que $(x\tilde{x})(x\tilde{x}) = (x\tilde{x})$
- ▷ En notant $y = (x\tilde{x})$ et $\tilde{y}$ un inverse à droite de y, calculer $yy\tilde{y}$ et en déduire que $y = e$.
- ▷ Conclure que $\tilde{x}x = e$.

Un inverse à droite est donc un inverse à gauche.

- ▷ Remarquer que $ex = (x\tilde{x})x$ pour montrer que $ex = e$.

Le neutre est donc aussi le neutre à gauche.

Conclure.

2. Vérifier que

- ▷ Pour tous $x, y, z \in \mathbb{C}^*$, $(x\blacklozenge y)\blacklozenge z = |x|\ |y|\ z = x\blacklozenge(y\blacklozenge z)$.
- ▷ Tout nombre complexe de module 1 est un neutre à gauche.
- ▷ Étant donné $\omega \in \mathbb{U}$, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, $\frac{\omega}{|z|}$ est un inverse à droite.

Mais ce n'est pas un groupe car il n'y a pas exemple pas de neutre à gauche (pourquoi ?).

3. Si l'existence de neutres à droite et d'inverses à droite (ou à gauche et à gauche) implique les autres côtés, ce n'est pas le cas de l'existence de neutres à droite et d'inverses à gauches (ou à gauche et à droite).

Dans le doute mieux vaut donc vérifier la définition complète.

Indication 3 · Énoncé p. 227 (Maximum et minimum comme opérations)

1. Pour l'associativité, montrer que $\max(\max(x, y), z) = \max(x, y, z)$.

2. Remarquer que si E admet un plus petit élément alors ce dernier est neutre pour max (et un plus grand neutre pour min).

Indication 4 · Énoncé p. 227 (Encore la relation de similitude)
Montrer que c'est une relation d'équivalence (cf TD relations).

C'est un cas général de par exemple la relation de similitude sur les matrices carrés ($M = \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$).

Indication 5 · Énoncé p. 227 (Opération opposée)
1. Vérifier les définitions.
2. Prendre $(\mathcal{F}(E,E),\circ)$ et remarquer que les constantes sont absorbantes à gauche mais qu'il n'y a pas d'éléments absorbants à droite.
3. Que dire de l'inverse ?

Indication 6 · Énoncé p. 228 (Groupes isomorphes)
1. Par exemple $\mathbb{U}_n$ et $\frac{\mathbb{Z}}{n}\mathbb{Z}$ sont isomorphes ou encore $(\mathbb{R},+)$ et $(\mathbb{R}_+^*,\times)$.

   Pour deux groupes non isomorphes on peut prendre deux groupes qui n'ont pas le même cardinal.

   Ou bien constater que $\mathbb{U}_4$ et $\mathbb{U}_2\times\mathbb{U}_2$ ne sont pas isomorphes, ou encore $(\mathbb{R},+)$ et $(\mathbb{R}^*,\times)$, cf exercice 7.

   Voir aussi les exemples des autres exercices.
2. Cf cours:
   - ▷ L'identité est un morphisme.
   - ▷ La composée de morphismes est un morphisme.
   - ▷ La réciproque d'un morphisme bijectif est un morphisme.
3. Cela ressemble très fort à une relation d'équivalence. Mais a priori mieux vaut éviter de parler «d'ensemble de tous les groupes».

Indication 7 · Énoncé p. 228 (Groupes non isomorphes)
Dans les deux cas identifier une propriété stable par isomorphisme que satisfait un élément dans un groupe et pas dans l'autre.

Par exemple (mais ce n'est pas le seul), l'ordre.

1. Existe-t-il un élément x tel que $x\neq e$ et $x^2=e$?
2. Existe-t-il un élément tel que $x^2\neq e$ et $x^4=e$?

Indication 8 · Énoncé p. 228 (Sous-groupes ? I)
Pour montrer que c'est un sous-groupe vérifier la définition, ou exhiber un morphisme dont c'est le noyau ou l'image.

Pour montrer que ce n'en n'est pas un sous-groupe montrer sur un contre-exemple qu'une des propriétés de la définition n'est pas vérifiée.

On obtient (sauf erreur de ma part)

1. Oui.
2. Non.
3. Oui.
4. Non.
5. Non.
6. Oui.

Indication 9 · Énoncé p. 228 (Un classique)
Soient x et y deux éléments de G.

Constater que

$$x(xy)^2y = x^2yxy^2.$$

Indication 10 · Énoncé p. 229 (Raffinement d'un exercice précédent)
Le groupe est commutatif par l'exercice 9.

Il y a ensuite plusieurs méthodes selon les connaissances:

- ▷ Si on connaît l'algèbre linéaire alors on peut le munir d'une structure de $\frac{\mathbb{Z}}{2}\mathbb{Z}$-espace vectoriel.
- ▷ Si on connaît le théorème de structure des groupes abéliens finis on peut directement conclure.
- ▷ Sinon ⋮

Indication 11 · Énoncé p. 229 (Union de sous-groupes ?)

1. Vérifier que la définition de sous-groupe est stable par intersection (cf cours).
2. D'après la question précédente il suffit de prendre deux sous-groupes quelconques dont aucun n'est inclus dans l'autre.

   Pour démontrer que $H_1 \cup H_2$ n'est **pas** un sous-groupe, montrer qu'il n'est par exemple pas stable par produit (ne pas oublier de faire la preuve).
3. Pour montrer «$H_1 \subset H_2$ ou $H_2 \subset H_1$» on peut par exemple montrer «$H_1 \not\subset H_2 \Rightarrow H_2 \subset H_1$».

   Et pour montrer cette implication remarquer si $H_1 \cup H_2$ est un sous-groupe, alors si il existe $\xi_1 \in H_1 \cap \overline{H_2}$ (fixons le), pour tout $x_2 \in H_2$ on a $x_2\xi_1 \in H_1 \cup H_2$.

Indication 12 · Énoncé p. 229 (Loi de composition des vitesses relativistes)
Vérifier à la main la définition. Ou bien «tangente hyperbolique» et exercice 13

Indication 13 · Énoncé p. 229 (Transport de loi)
Attention ici φ^{-1} est la bijection réciproque (et non l'application image réciproque).

Vérifier toutes les propriétés d'un groupe.

Sans surprise le neutre est $\varphi^{-1}(e_G)$ et l'inverse de x est $\varphi^{-1}(\varphi(x)^{-1})$.

Ne pas hésiter à faire un schéma.

Indication 14 · Énoncé p. 230 (Petite translation)
Vérifier à la main toutes les propriétés.

Ou bien regarder l'exercice 13 et l'application $x \mapsto a * x$ (ou $x \mapsto x * a$).

Indication 15 · Énoncé p. 230 (Sous-groupes additifs de $\mathbb{Z}$)
Traiter le cas $H = \{0\}$.

Justifier ensuite l'existence de $m = \min(H \cap \mathbb{N}^*)$.

Procéder ensuite par double inclusion.

Pour $H \subset m\mathbb{Z}$, soit $h \in H$.

Remarquer que le reste de la division de h par m est dans $H \cap [\![0, m-1]\!]$.

Indication 16 · Énoncé p. 230 (Groupe des automorphismes)
Montrer que c'est un sous-groupe de $\mathrm{Bij}(G, G)$. Pour cela montrer:
- ▷ Id_E est un automorphisme.
- ▷ Une composée d'automorphismes de groupes est un automorphisme de groupe.
- ▷ La bijection réciproque d'un automorphisme de groupes est aussi un automorphisme de groupe.

Indication 17 · Énoncé p. 230 (Conjugaisons et automorphismes intérieurs)
1. Il faut donc vérifier que φ_u est un morphisme et qu'il est bijectif. Pour le premier point écrire la définition. Pour le second par exemple proposer une réciproque.
2. Par la question précédent Φ est bien défini. Pour montrer que c'est un morphisme, il faut donc montrer

$$\forall (u, v) \in G^2, \varphi_{uv} = \varphi_u \circ \varphi_v$$

c'est à dire (égalité d'applications)

$$\forall (u, v) \in G^2, \forall x \in G, \varphi_{uv}(x) = \varphi_u(\varphi_v(x)).$$

3. On a non-injectivité de Φ dès qu'un élément différent de l'identité commute avec tous les autres (cf exo 19). Choisir par exemple un groupe commutatif, par exemple $(G, \cdot) = (\mathbb{C}^*, \cdot)$.

Remarquer que pour cet exemple particulier il y a aussi non-surjectivité.

Indication 18 · Énoncé p. 231 (Les groupes des permutations sont compliqués !)
1. Identité, composée de bijections, bijection réciproque d'une bijection.
2. Plusieurs points à vérifier:
- ▷ Que $x \mapsto gx$ est bien bijective (par exemple proposer une bijection réciproque),
- ▷ Que c'est un morphisme de groupes,
- ▷ Qu'il est injectif (i.e son noyau est $\{1_G\}$).

Pour chacun des points écrire les définitions et procéder par rédaction automatique.
3. Que dire de l'image de l'application précédente.
4. Tout groupe est donc isomorphe à un sous-groupe d'un groupe de permutations.

Indication 19 · Énoncé p. 231 (Centre)
Avec les notations de l'exercice 17, que dire de $\mathrm{Ker}(\Phi)$.

Indication 20 · Énoncé p. 232 (Centralisateur d'une partie)
1. Par exemple intersection de sous-groupes.
2. Rédaction automatique: déplier et replier les définitions.
3. Encore rédaction automatique.
4. Par double inclusion.

Indication 21 · Énoncé p. 232 (Groupe engendré par une partie)
Intersection de tous les sous-groupes contenant A (à justifier).

Indication 22 · Énoncé p. 233 (Vers l'ordre d'un élément)
Cf DM.

Indication 23 · Énoncé p. 233 (Classes d'équivalence à droite)
1. Remarquer que chaque point de la définition d'une relation d'équivalence correspond à un point de la définition de groupe.
2. Procéder par double équivalence ou par équivalences avec précaution.
3. Penser à une translation.

Indication 24 · Énoncé p. 233 (Théorème de Lagrange)
1. Remarquer que toutes les classes d'équivalence à droite de l'exercice 23 sont finies et de même cardinal (car en bijections).
2. L'ordre est le cardinal du sous-groupe engendré par x.

Indication 25 · Énoncé p. 234 (Une version très allégée de Lagrange)
1. Bijection réciproque $\tau_{a^{-1}}$.
2. Montrer que $\prod_{x\in G} x = \prod_{\xi\in G}(a\xi)$ et utiliser le caractère abélien.
3. On en déduit:

$$a^{|G|} = 1_G$$

ce qui peut s'interpréter de plusieurs façons:
- ▷ l'ordre (cf exercice 22) d'un élément divise le cardinal du groupe.
- ▷ que le cardinal du groupe engendré $\langle a\rangle$, c'est à dire l'ordre, divise le cardinal du groupe.

On remarque que l'hypothèse de commutativité, si elle est essentielle dans la preuve précédente, n'est en fait pas nécessaire, cf l'exercice 24

Indication 26 · Énoncé p. 234 (Sous-groupes finis de $\mathbb{C}^*$)
1. Sinon, prendre un élément de module différent de 1 et remarquer que toutes ses puissances sont distinctes, car par exemple de modules distincts. Or toute partie de G est finie.
2. Même argument que précédemment, si ce n'est pas le cas alors il y a une infinité de puissance de z distinctes.
3. L'ensemble des $\{d_z, z \in G\}$ admet un majorant non nul (et même un supremum) au sens de la divisibilité car il est fini.
4. S'inspirer des méthodes d'ordre.

Indication 27 · Énoncé p. 234 (Sous-groupes distingués, le tout début)
1. Rédaction automatique.
2. Pour $k \in \mathrm{Ker}(\varphi)$, écrire $\varphi(xkx^{-1}) = \varphi(x)1\varphi(x)^{-1}$.

Indication 28 · Énoncé p. 235 (Sous-groupes distingués, la suite mais pas la fin)

1. Cf par exemple 23.
2. Il faut montrer que le résultat **ne dépend pas du représentant** choisi.
3. Vérification des définitions.
4. Que dire de la «projection canonique»:

$$\begin{aligned} G &\to \frac{G}{H} \\ x &\mapsto \mathrm{Cl}(x) \end{aligned}$$

Indication 29 · Énoncé p. 235 (Sous-groupes ! II)
Dans chaque cas montrer que c'est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, ou bien exhiber un morphisme dont c'est le noyau ou l'image.

Indication 30 · Énoncé p. 236 (Morphismes de $\mathbb{Q}$ dans les groupes finis)
On rappelle que comme G est fini, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $x \in G$, il existe $x^N = 1_G$ (cf ordre).

Et constater qu'étant donné un morphisme φ, pour tout $r \in \mathbb{Q}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi(r) = \left(\varphi\left(\frac{r}{n}\right)\right)^n$.

Indication 31 · Énoncé p. 236 (Groupes des similitudes directes)
Montrer qu'il s'agit de sous-groupes.

Remarquer qu'une composée de rotations est une rotation ou une translation.

Indication 32 · Énoncé p. 236 (Commutateurs)
Faire les calculs directement.

Indication 33 · Énoncé p. 237 (Inclusions des noyaux et images version essentielle)
Rédaction automatique.

Solution p. 264

Indication 34 · Énoncé p. 237 (Inclusion des noyaux, version cas d'égalité)
Commencer par traiter l'exercice 33 pour déterminer l'inclusion pertinente.

Rédaction automatique par double implication encore.

Solution p. 264

Indication 35 · Énoncé p. 237 (Inclusion des images, version cas d'égalité)
Commencer par traiter l'exercice 33 pour déterminer quelle est l'inclusion pertinente. Rédaction automatique par double implication encore.

Solution p. 265

Indication 36 · Énoncé p. 237 (Une formule ayant beaucoup de noms)
Considérer la relation d'équivalence $\sim$ sur G définie par

$$\forall (x,y) \in G^2, x \sim y \Leftrightarrow \varphi(x) = \varphi(y)$$

Constater qu'il y a $|\operatorname{Im}(\varphi)|$ classes d'équivalence et qu'elles sont toutes de cardinal $|\operatorname{Ker}(\varphi)|$.

Indication 37 · Énoncé p. 238 (Actions, orbites et stabilisateurs)

1. Vérifier à la main ou bien construire une relation d'équivalence.
2. Vérifier à la main ou bien considérer le noyau d'un morphisme bien choisi de G vers $\mathcal{S}_E$.
3. Considérer la relation d'équivalence de l'exercice 23. Et exhiber une bijection entre $\frac{G}{\text{Stab}}(x)$ et $\text{Orb}(x)$.

Indication 38 · Énoncé p. 238 (Beaucoup de sous-groupes)
Procéder par contraposée.

Si il y a un nombre fini de sous-groupes alors il y a un nombre fini de sous-groupes engendrés par un élément et G et la réunion de ces derniers.

De plus si un sous-groupe engendré par un élément était infini il serait isomorphe à $\mathbb{Z}$ et donc admettrait une infinité de sous-groupes.

Indication 39 · Énoncé p. 238 (Trop d'éléments)
On veut montrer que pour tout $g \in G$, il existe $a \in A$ et $b \in B$ tels que $g = ab$ i.e $gb^{-1} = a$.

On veut donc montrer que $\{a, a \in A\} \cap \{gb^{-1}, b \in B\} \neq \varnothing$.

Indication 40 · Énoncé p. 239 (Probabilité de commuter)
Commencer par traiter les exercices 23, 24, 19, 20.

On a $\mathbb{P}(XY = YX) = \mathbb{P}(Y \in C(X))$ où $C(X)$ est l'ensemble des éléments de G qui commutent avec X (cf exo 32).

Si $X \notin Z(G)$ alors, comme $C(X)$ est un sous-groupe de G strictement inclus dans G alors (Lagrange) $|C(X)| \leq \frac{1}{2}|G|$.

De plus montrer que $|Z(G)| \leq \frac{1}{4}\ |G|$. En effet si $|\ \frac{G}{Z(G)}\ | = 2, 3$ alors G est engendré par son centre et un élément (méditer pourquoi) et donc est abélien.

On a donc $\mathbb{P}(X \in Z(G)) \leq \frac{1}{4}$ et $\mathbb{P}(Y \in C(G) \mid X \in Z(G)) \leq \frac{1}{2}$. La formule des probabilités totales donne le résultat, car $1 \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{5}{8}$.

Indication 41 · Énoncé p. 239 (Produit semi-direct)
Vérifier les axiomes de groupe.

Ce produit semi-direct peut sembler artificiel, mais est en fait une notion essentielle en théorie des groupes et de manière générale en sciences. Regarder par exemple les «torseurs» et apparenté en SI.

Indication 42 · Énoncé p. 239 (Produit et sous-groupes)
Pour le sens réciproque montrer par des manipulations algébriques que si $HK = KH$ alors HK est stable par produit et inverse.

Pour le sens direct, utiliser la stabilité par inverse.

Indication 43 · Énoncé p. 240 (Union croissante)
Si la suite n'est pas croissante le résultat est faux (cf exercice 11).

De plus on peut remplacer « groupe » par d'autres structures, par exemple anneau, corps, espace vectoriel, etc. (cf la preuve).

Sinon pour l'indication elle est: rédaction automatique.

Indication 44 · Énoncé p. 240 (Groupe de Prüfer)
1. Regarder l'exercice 43.
2. S'inspirer par exemple des sous-groupes de $(\mathbb{R}, +)$ pour montrer que les sous-groupes sont soit $\mathbb{U}_{p^n}$ pour un certain n soit $\mathbb{U}_{p^\infty}$.

Indication 45 · Énoncé p. 240 (La finitude arrange beaucoup de choses)
Soit $x \in A$. On a $\{x^n, n \in \mathbb{N}^*\} \subset A$. Par tiroirs montrer qu'il existe $n_1 < n_2$ tels que $x^{n_2-n_1} = e_G$.

Indication 46 · Énoncé p. 241 (Sous-groupes de $\mathbb{Z}^2$)
1. Automatique.
2. Image d'un morphisme et sous-groupes de $\mathbb{Z}$.
3. Mq H est un sous groupe de $\mathbb{Z}e_2$ où $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
4. Que dire pour $x \in H$ de $x - \frac{\pi(x)}{d_1} u_1$?

Indication 47 · Énoncé p. 241 (Un bout du cours sur les anneaux)
RAS, rédaction automatique.

Indication 48 · Énoncé p. 241 (Un bout du cours sur les anneaux II)
RAS, rédaction automatique.

Indication 49 · Énoncé p. 242 (Binôme et Bernoulli)
Il s'agit exactement des mêmes preuves que dans les cas « connus », en prenant garde à ne pas adapter les preuves nécessitant des inverses.
1. Par exemple par récurrence en utilisant la formule de Pascal et le fait que a et b commutent. Ou encore en développant et comptant, en utilisant la commutativité.
2. Par exemple en développant le produit en utilisant la commutativité.

Indication 50 · Énoncé p. 242 (Un bout du cours: Idéaux et noyaux de morphismes d'anneaux)
Rédaction automatique. Pour le contre-exemple constater que tout fonctionne car $f(1) \neq 0$.

Indication 51 · Énoncé p. 242 (Il faudra faire attention en arithmétique)

1. Prendre $q = 1$ et $q = q_1 q_2$.

2. Traiter le cas $a = 0$ ou $b = 0$. Sinon de $a = bq_1$ et $b = q_2 a$ déduire par intégrité que $q_1 q_2 = q_2 q_1 = 1_A$, d'où $q_1 \in A^\times$.

3. Dans $\mathbb{Z}$ comme $\mathbb{Z}^\times = \{-1, +1\}$ on donc, si $n|m$ et $m|n$ alors $n = \pm m$. Même soin à prendre dans $\mathbb{K}[X]$ où $(\mathbb{K}[X])^\times = \{\lambda, \lambda \in \mathbb{K}^\times\}$.

Pour récupérer une relation d'ordre on pourrait considérer une structure quotient.

Indication 52 · Énoncé p. 243 (Encore des manipulations d'idéaux)
Pour les vérifications la rédaction automatique peut suffire.

Pour le contre-exemple de la question 2, on verra que si $A = \mathbb{Z}$ ou $A = \mathbb{K}[X]$ alors tous les idéaux sont de la forme sus-mentionnée (on parle d'anneaux principaux).

Prendre plutôt $A = \mathbb{Z}[X]$, ou $A = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$.

Indication 53 · Énoncé p. 244 (Inversibles d'un sous anneau)

1. Automatique.

2. $\{-1, +1\} \subsetneq \mathbb{Z}\backslash\{0\}$.

L'inclusion précédent peut donc être stricte.

3. **3.1.** Vérifier que les images sont bien dans B et que c'est un morphisme.

3.2. Comme a inversible, il est régulier. En déduire le noyau de τ_a.

3.3. Les cardinaux finis sont les mêmes au départ et à l'arrivée. L'injectivité implique donc la bijectivité.

3.4. En particulier $1 \in \mathrm{Im}(\tau_a)$.

3.5. D'où dans le cas où B est **fini** on a $B^\times = A^\times \cap B$.

Indication 54 · Énoncé p. 244 (Non inversibles et diviseurs de zéro)

1. A-t-on $1 = 0$?

2. Ni l'un ni l'autre.

3. S'inspirer de l'exercice 53

Indication 55 · Énoncé p. 245 (Différence symétrique et anneau de Boole)

1. Cf TD ensembles et applications.

2. Idem.

3. Remarquer que pour tout $X \subset E$, $X \Delta X = \varnothing$.

Indication 56 · Énoncé p. 245 (Différence symétrique et anneau de Boole II)

1. Pour X_1 et X_2 deux parties, faire un dessin. Que vaut $(X_1 \Delta X_2)\Delta(X_1 \cap X_2)$?

2. Si $B \subset A$ alors par exemple $B = B \cap A$.

3. Procéder en deux temps.

- ▷ Vérifier que pour $A \subset E$, $\mathcal{P}(A)$ est un idéal.
- ▷ Étant donné un idéal, il est alors fini. Considérer l'union de tous ses éléments. En déduire qu'il est de la forme $\mathcal{P}(A)$.

4. Vérifier la définition.

5. Montrer que I n'est **pas** de la forme $\mathcal{P}(A)$ pour $A \subset \mathbb{N}$.

Indication 57 · Énoncé p. 245 (Entiers de Gauss)
1. Vérifier que c'est un sous-anneau de $(\mathbb{C}, +, \cdot)$.
2. On obtient que ce sont les $a + ib$ tels que $a^2 + b^2 = 1$.

Indication 58 · Énoncé p. 246 (Introduction aux nilpotents)
1. Par exemple $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (il y a plein d'autres exemples matriciels, cf cours d'algèbre linéaire).
2. Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.
3. Non car c'est un diviseur de 0.
4. Penser aux suites géométriques/formule de Bernoulli. Que dire de $1 + u + \cdots + u^{n_0 - 1}$?

Indication 59 · Énoncé p. 246 (Un peu de nilpotents et produits)
1. Calculer $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
2. Que dire de $(uv)^n$ si u et v commutent.
3. Remarquer que $u + n = u(1_A + u^{-1}n)$ et que u^{-1} et n commutent.
4. Remarquer que

$$\underbrace{(ba)(ba)\cdots(ba)(ba)}_{n \text{ fois}} = b\underbrace{(ab)\cdots(ab)}_{n-1 \text{ fois}}a.$$

Indication 60 · Énoncé p. 246 (Vers un lien spectral entre AB et BA)
S'inspirer du cas nilpotent.

Que dire de $1 + b(1 - ab)^{-1}a$?

Indication 61 · Énoncé p. 246 (Un cas très particulier d'un théorème de Jacobson)
On pourra commencer par montrer que pour tout x, $2x = 0$.

Indication 62 · Énoncé p. 247 (Début d'étude de $\mathbb{Z}\left[\sqrt{d}\right]$)
1. Le point important est l'injectivité. Le faire à la main et par exemple par l'absurde on peut utiliser que $\sqrt{d} \notin \mathbb{Q}$ pour aboutir à une contradiction.
2. À la main en remarquant que $\sqrt{d} \times \sqrt{d} = d \in \mathbb{Z}$.

Indication 63 · Énoncé p. 248 (Radical d'un idéal)
Se rappeler de l'hypothèse de commutativité: elle permet de bien simplifier les calculs mais il faut faire attention à bien identifier les lieux où on l'utilise.
1. Vérifier la définition d'idéal.
2. Une seule inclusion est intéressante. Remarquer que $(x^n)^m = x^{nm}$.
3. L'inclusion $\sqrt{I \cap J} \subset \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$ se fait par rédaction automatique.

Pour l'inclusion $\sqrt{I \cap J} \supset \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$ se rappeler l'existence du ppcm (ou bien juste du produit).

Pour $\sqrt{I + J} \supset \sqrt{I} + \sqrt{J}$ mettre à une puissance suffisamment grande par binôme de Newton.

Indication 64 · Énoncé p. 248 (Jouons encore avec des idéaux radicaux)
Commencer bien évidemment par traiter l'exercice 63.

1. Remarque que si $K_1 \subset K_2$ alors $\sqrt{K_1} \subset \sqrt{K_2}$. Ensuite utiliser les inclusions de l'exercice 63.
2. Nil
3. La réponse est: $m\mathbb{Z}$ pour $m = \prod_{p \text{ premier}} p^{\min(v_p(n),1)}$ c'est à dire le produit des facteur premiers de n avec une multiplicité de 1. Il ne reste plus qu'à le démontrer !

Indication 65 · Énoncé p. 249 (Morphismes entre corps)
Que dire des idéaux d'un corps ?

Indication 66 · Énoncé p. 249 (Caractéristique d'un corps)

1. Vérifier la définition.
2. Le noyau est un idéal de $\mathbb{Z}$ donc de la forme $p\mathbb{Z}$.
3. Tout cela reste vrai dans un anneau intègre.
4. On pourra utiliser que si p est premier, alors pour tout $k \in [\![1, p-1]\!]$, $p \mid \binom{p}{k}$.
5. Il est injectif comme morphisme de corps, et donc par cardinal fini.
6. Montrer que l'on peut munir $\mathbb{K}$ d'unes structure de $\frac{\mathbb{Z}}{p}\mathbb{Z}$ espace vectoriel.

   Il est alors de dimension finie.
7. Par degré il n'y a pas d'antécédent de X.

Indication 67 · Énoncé p. 250 (Une construction matricielle des complexes)

1. Vérifier la définition.
2. Utiliser au choix:
   - ▷ vos connaissances des matrices 2×2,
   - ▷ vos connaissances sur les nombres complexes

   pour expliciter l'inverse.
3. On a ainsi «construit» $\mathbb{C}$, le nombre complexe $a + ib$ revenant à la matrice $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.

   Cette «analogie» sera très utile en algèbre linéaire pour la compréhension des matrices 2×2.

   Parmi les remarques à faire on peut noter:
   - ▷ L'analogie entre 1 et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ainsi que i et $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   - ▷ L'analogie entre $e^{i\theta}$ et la matrice de rotation d'angle θ, $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$.
   - ▷ L'analogie entre conjuguée et transposée.
   - ▷ L'analogie entre module au carré et déterminant.
   - ▷ L'analogie entre trace et partie réelle (fois deux).
   - ▷ etc.

Indication 68 · Énoncé p. 250 (Une construction matricielle des quaternions)
S'inspirer de l'exercice 67.

Remarque: $\mathbb{H}$ est appelé ensemble des quaternions, et il a de nombreuses interprétations et usages, par exemple en algèbre linéaire.

Indication 69 · Énoncé p. 250 (Un zeste d'algébriques)

1. $\mathbb{Q}$
2. Remarquer que α^2 s'exprime comme combinaison linéaire à coefficients rationnels de α et 1.
3. Pour déterminer l'inverse d'un élément non nul on peut effectuer un algorithme d'Euclide sur des polynômes bien choisis. Ou bien résoudre un système linéaire 2×2 (mais c'est moins élégant).

Indication 70 · Énoncé p. 251 (i versus j)
Regarder les autres exercices sur les non-isomorphies.

Par exemple que dire des éléments d'ordre 3 ?

Indication 71 · Énoncé p. 251 (Corps fini à 4 éléments)
Construire à la main la table des produits.

Ou bien appeler les éléments $0, 1, \varphi, \overline{\varphi}$ et se demander pourquoi c'est une bonne idée.

Solutions

Solution pour l'exercice 33 · Énoncé p. 237 · Indication p. 257 (Inclusions des noyaux et images version essentielle)

▷ Soit $x \in \mathrm{Ker}(\varphi)$.

Alors $\varphi(x) = e_G$.

Donc $\psi(\varphi(x)) = \psi(e_G) = e_H$.

Donc $x \in \mathrm{Ker}(\psi \circ \varphi)$.

Ainsi $\boxed{\mathrm{Ker}(\varphi) \subset \mathrm{Ker}(\psi \circ \varphi)}$.

▷ Soit $z \in \mathrm{Im}(\psi \circ \varphi)$.

Alors il existe $x \in F$ tel que $z = \psi(\varphi(x))$.

Avec $y = \varphi(x) \in G$ on a $z = \psi(y)$.

Donc $z \in \mathrm{Im}(\psi)$.

Ainsi $\boxed{\mathrm{Im}(\psi \circ \varphi) \subset \mathrm{Im}(\psi)}$.

Solution pour l'exercice 34 · Énoncé p. 237 · Indication p. 257 (Inclusion des noyaux, version cas d'égalité)

On remarque que comme on a toujours $\mathrm{Ker}(\varphi) \subset \mathrm{Ker}(\psi \circ \varphi)$ (voir par exemple l'exercice 33) il faut et suffit de montrer que

$$\mathrm{Ker}(\varphi) \supset \mathrm{Ker}(\psi \circ \varphi) \Leftrightarrow \mathrm{Ker}(\psi) \cap \mathrm{Im}(\varphi) = \{e_G\}.$$

On procède par double implication.

▷ $\boxed{\Rightarrow}$

Supposons $\mathrm{Ker}(\psi \circ \varphi) \subset \mathrm{Ker}(\varphi)$.

Soit $y \in \mathrm{Ker}(\psi) \cap \mathrm{Im}(\varphi)$.

Comme $y \in \mathrm{Im}(\varphi)$, il existe $x \in F$ tel que $y = \varphi(x)$.

Comme $y \in \mathrm{Ker}(\psi)$, on a $\psi(y) = e_H$.

On a donc $\psi(\varphi(x)) = e_H$ i.e $x \in \mathrm{Ker}(\psi \circ \varphi)$.

Par l'inclusion supposée, on a alors $x \in \mathrm{Ker}(\varphi)$ i.e $\varphi(x) = e_G$.

D'où $y = \varphi(x) = e_G$.

Ainsi $\mathrm{Ker}(\psi) \cap \mathrm{Im}(\varphi) \subset \{e_G\}$.

L'inclusion réciproque est immédiate car $e_G \in \mathrm{Ker}(\psi) \cap \mathrm{Im}(\varphi)$ comme intersection de sous-groupes.

D'où $\boxed{\mathrm{Ker}(\psi) \cap \mathrm{Im}(\varphi) = \{e_G\}}$.

▷ $\boxed{\Leftarrow}$

Supposons $\mathrm{Ker}(\psi) \cap \mathrm{Im}(\varphi) = \{e_G\}$.

Soit $x \in \mathrm{Ker}(\psi \circ \varphi)$.

Alors $\psi(\varphi(x)) = e_H$.

D'où $\varphi(x) \in \mathrm{Ker}(\psi)$.

De plus $\varphi(x) \in \mathrm{Im}(\varphi)$.

D'où $\varphi(x) \in \mathrm{Ker}(\psi) \cap \mathrm{Im}(\varphi)$ et donc par hypothèse $\varphi(x) = e_G$.

Ainsi $x \in \mathrm{Ker}(\varphi)$.

D'où $\boxed{\mathrm{Ker}(\varphi) \supset \mathrm{Ker}(\psi \circ \varphi)}$.

Solution pour l'exercice 35 · Énoncé p. 237 · Indication p. 257 (Inclusion des images, version cas d'égalité)
On notera pour plus de simplicité les produits de manière implicite.

On remarque que comme on a toujours $\mathrm{Im}(\psi \circ \varphi) \subset \mathrm{Im}(\psi)$ (voir par exemple l'exercice 33) il faut et suffit de montrer que

$$\mathrm{Im}(\psi) \subset \mathrm{Im}(\psi \circ \varphi) \Leftrightarrow G = \{\kappa\xi, (\kappa, \xi) \in \mathrm{Ker}(\psi) \times \mathrm{Im}(\varphi)\}.$$

On procède par double implication.

▷ $\boxed{\Rightarrow}$

Supposons $\mathrm{Im}(\psi) \subset \mathrm{Im}(\psi \circ \varphi)$.

Soit $y \in G$.

On a alors $\psi(y) \in \mathrm{Im}(\psi)$.

Par hypothèse on a donc $\psi(y) \in \mathrm{Im}(\psi \circ \varphi)$.

Donc il existe $x \in F$ tel que $\psi(y) = \psi(\varphi(x))$.

Comme $\psi(y) = \psi(\varphi(x))$ et que ψ est un morphisme de groupes on a alors

$$\psi(y(\varphi(x))^{-1}) = \varphi(y)(\psi(\varphi(x)))^{-1} = e_H.$$

Donc $y(\varphi(x))^{-1} \in \mathrm{Ker}(\psi)$.

En posant $\kappa = y(\varphi(x))^{-1} \in \mathrm{Ker}(\psi)$ et $\xi = \varphi(x) \in \mathrm{Im}(\varphi)$ on a donc $y = \kappa\xi$.

Ainsi $G \subset \{\kappa\xi, (\kappa, \xi) \in \mathrm{Ker}(\psi) \times \mathrm{Im}(\varphi)\}$.

L'autre inclusion étant toujours vraie, on a donc $\boxed{G = \{\kappa\xi, (\kappa, \xi) \in \mathrm{Ker}(\psi) \times \mathrm{Im}(\varphi)\}}$.

▷ $\boxed{\Leftarrow}$

Supposons $G = \{\kappa\xi, (\kappa, \xi) \in \mathrm{Ker}(\psi) \times \mathrm{Im}(\varphi)\}$.

Soit $z \in \mathrm{Im}(\psi)$.

Alors il existe $y \in G$ tel que $z = \psi(y)$.

Par hypothèse il existe $(\kappa, \xi) \in \mathrm{Ker}(\psi) \times \mathrm{Im}(\varphi)$ tel que $y = \kappa\xi$.

Comme $\xi \in \mathrm{Im}(\varphi)$, il existe $x \in F$ tel que $\xi = \varphi(x)$.

On a donc, comme ψ est un morphisme de groupes,

$$\psi(y) = \psi(\kappa\xi) = \psi(\kappa)\psi(\xi) = e_H\psi(\varphi(x)) = (\psi \circ \varphi)(x).$$

D'où $z = \psi(y) \in \mathrm{Im}(\psi \circ \varphi)$.

Ainsi $\boxed{\mathrm{Im}(\psi) \subset \mathrm{Im}(\psi \circ \varphi)}$.

Chapitre 10

Matrices sans Algèbre Linéaire

Énoncés 268
Calculs pratiques 268
Résolution de systèmes 268
Calculs de puissances 269
Calculs théoriques 271
♠ Premiers contacts avec quelques matrices remarquables 275
Indications 281
Solutions 284

Énoncés

Calculs pratiques

Résolution de systèmes

Exercice 1 (◔★ Systèmes)
Donner l'ensemble des solutions des systèmes suivants

1.
$$\begin{cases} -2x+3y=1 \\ 5x-8y=2. \end{cases}$$

2.
$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 7 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

3. Soit $(\theta, \varphi) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} \cos(\theta)x - \sin(\theta)y = \cos(\varphi) \\ \sin(\theta)x + \cos(\theta)y = \sin(\varphi). \end{cases}$$

4. Selon la valeur de $\alpha \in \mathbb{C}$

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

5.
$$\begin{cases} 2x_1+6x_2+4x_3=2 \\ x_1+5x_2=1 \\ -x_1-6x_2+x_3=-1 \\ x_1+3x_2+2x_3=0. \end{cases}$$

6.
$$\begin{cases} 2x_1+6x_2+4x_3=2 \\ x_1+5x_2=1 \\ -x_1-6x_2+x_3=-1 \\ x_1+3x_2+2x_3=1. \end{cases}$$

7.
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

8.
$$\begin{cases} -2x+2y+z=1 \\ x-y-z=0 \\ x+y+z=0. \end{cases}$$

9.
$$\begin{cases} x_1-2x_3+x_4=1 \\ x_1+2x_2-3x_3=-1 \\ 2x_1+2x_2=4. \end{cases}$$

10. (□) Demander à une personne de votre choix de vous donner un système linéaire, puis résolvez le. Vérifiez ensuite votre résultat.

Exercice 2 (◔★ Un exo à paramètre (valeur propre))
Déterminer selon la valeur de $\lambda \in \mathbb{C}$ l'ensemble des solutions du système

$$\begin{cases} (1-\lambda)x + y + z = 0 \\ x + (1-\lambda)y + z = 0 \\ x + y + (1-\lambda)z = 0. \end{cases}$$

Indication p. 281

Exercice 3 (◔★ Un exo à paramètre (image))
Déterminer l'ensemble des $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tels que le système

$$\begin{cases} x + y \ = \alpha \\ 2x - y = \beta \\ x + 2y = \gamma. \end{cases}$$

admette au moins une solution.

Solution p. 284

Exercice 4 (◔★ Un exo à paramètre (inverse))
Déterminer selon la valeur $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ l'ensemble des solutions du système

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}.$$

Commenter.

Solution p. 284

Calculs de puissances

Exercice 5 (◔★ Par récurrence)
On pose

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que

$$\forall n \in \mathbb{N}, A^n = \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}.$$

Indication p. 281

Exercice 6 (◔★ Par binôme)
On pose

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer pour tout entier $k \in \mathbb{N}$ l'expression explicite de N^k.
2. En remarquant que les matrices $2I_2$ et N commutent, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(2I_2 + N)^n = 2^n I_2 + n2^{n-1} N$$

Indication p. 281

Exercice 7 (◔★ Par polynôme annulateur)
On pose

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Montrer que

$$A^2 = 4A - 4I_2$$

En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}, A^n = n2^{n-1}A - (n-1)2^n I_2$$

puis une expression explicite de A^n pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

Indication p. 281

Exercice 8 (◔★♣ Par diagonalisation éventuelle: la théorie)
Soit d un entier naturel.

1. Soit $D = \text{Diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_d)$ une matrice diagonale.

   Déterminer pour tout entier naturel n l'expression de D^n.
2. Soient $P \in \text{GL}_d(\mathbb{R})$ et $D \in \text{M}_d(\mathbb{R})$.

   Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$\left(PDP^{-1}\right)^n = PD^nP^{-1}$$

Indication p. 281

Exercice 9 (◔★ Par diagonalisation éventuelle: la pratique)
On définit les matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -5 \\ 10 & -7 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que P est inversible et déterminer son inverse.
2. Calculer $P^{-1}AP$.
3. En déduire pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ l'expression de A^n.

Indication p. 281

Exercice 10 (◔★ Autonomie I)
Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer une expression de

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^n.$$

Solution p. 285

Exercice 11 (◔★ Autonomie II)
Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer une expression explicite de

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^n.$$

Solution p. 289

Calculs théoriques

Exercice 12 (◔★ Matrices comme formes bilinéaires)
Soit $n \in \mathbb{N}$ et $(A, B) \in (\mathrm{M}_n(\mathbb{K}))^2$.

Montrer que

$$A = B \Leftrightarrow \forall (X, Y) \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K}), X^\top AY = X^\top BY.$$

Indication p. 281

Exercice 13 (◑★ Matrices à diagonale dominante)
Soit $n \in \mathbb{N}$.

Une matrice $A = \left(a_{ij}\right)_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n.}} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ est dite *à diagonale dominante* ssi

$$\forall i \in [\![1,n]\!], |a_{ii}| > \sum_{\substack{j\in[\![1,n]\!]\\ j\neq i}} |a_{ij}|.$$

Montrer que toute matrice à diagonale dominante est inversible.

Indication p. 281

Exercice 14 (◔★ Équations matricielles sans solution)

1. Soit

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Montrer qu'il n'existe pas de $A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{N})$ tel que

$$A^2 = N.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Montrer qu'il n'existe pas de matrices A et B dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ telles que

$$AB - BA = I_n.$$

Solution p. 290

Exercice 15 (◔★ Nilpotence et triangularité)

1. Donner un exemple de matrice nilpotente qui n'est ni triangulaire supérieure stricte, ni triangulaire inférieure stricte.

2. Montrer que toute matrice triangulaire supérieure stricte (resp. triangulaire inférieure stricte) est nilpotente.

Indication p. 281

Exercice 16 (◔★♣ Relations sur les matrices)
Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. On dit que deux matrices A et B de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ sont **équivalentes** ssi il existe $(P, Q) \in (\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}))^2$ tels que
$$Q^{-1}AP = B.$$
Montrer que la relation «être équivalent à» est une relation d'équivalence.
2. On dit que deux matrices A et B de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ sont **semblables** ssi il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ tels que
$$P^{-1}AP = B.$$
Montrer que la relation «être semblable à» est une relation d'équivalence.
3. On dit que deux matrices A et B de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ sont **congrues** ssi il existe $P\,\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ tels que
$$P^{\top}AP = B.$$
Montrer que la relation «être congru à» est une relation d'équivalence.

Indication p. 281

Exercice 17 (◔★ Centre)
Soit $n \in \mathbb{N}$

Montrer que
$$\{A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \mid \forall M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}), AM = MA\} = \{\lambda I_n, \lambda \in \mathbb{K}\}.$$

Indication p. 281

Exercice 18 (◔★ Centre bis)
Soit $n \in \mathbb{N}$.

Déterminer
$$\{A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \mid \forall M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}), AM = MA\}$$

Indication p. 281

Exercice 19 (◔★ Un aperçu de produit scalaire matriciel)
Soit $n \in \mathbb{N}$ et $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

Montrer que

$$\mathrm{tr}(AA^\top) \geq 0.$$

Dans quel cas a-t-on $\mathrm{tr}(AA^\top) = 0$?

Solution p. 290

Exercice 20 (◔★ Seulement la trace)
Soit $n \in \mathbb{N}$, f une application

$$f : \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$$

- ▷ **linéaire** c'est à dire

$$\forall (A_1, A_2) \in (\mathrm{M}_n(\mathbb{K}))^2, (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2,\ f(\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2) = \lambda_1 f(A_1) + \lambda_2 f(A_2).$$

- ▷ $$\forall (A, B) \in (\mathrm{M}_n(\mathbb{K}))^2, f(AB) = f(BA).$$

Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que

$$\forall A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}), f(A) = \alpha\,\mathrm{tr}(A).$$

Solution p. 291

Exercice 21 (◕★ Les transvections engendrent SL_n)
Soit $n \in \mathbb{N}$ et $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

Montrer qu'il existe $T_1, ..., T_N$ des matrices de transvections et $\Delta \in \mathbb{K}$ tels que

$$A = T_1 \cdots T_N \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \Delta \end{pmatrix}.$$

Indication p. 282

Exercice 22 (◔★ Trace et rang 1)
Soit $n \in \mathbb{N}$.

Soient $L \in M_{1,n}(\mathbb{K})$ une matrice ligne et $C \in M_{n,1}(\mathbb{K})$ une matrice colonne.

On pose $A = CL$.

1. Montrer que $\mathrm{tr}(A) = LC$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A^n = \mathrm{tr}(A)^{n-1}A$.

Indication p. 282

Exercice 23 (◔☆ Un exemple de produit semidirect)
Montrer que l'ensemble

$$\left\{ \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & x \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid (\theta, (x,y)) \in [0, 2\pi[\times \mathbb{R}^2 \right\}$$

est un groupe.

Indication p. 282

♠ Premiers contacts avec quelques matrices remarquables

Remarque: toutes les matrices vues ici ont de très nombreuses propriétés qui seront vues tout au long de cette année et de l'année prochaine. Notamment, une fois le lien entre matrices et applications linéaires explicité, ces exercices se traiteront de manière bien plus « naturelle ».

Exercice 24 (◔★♠ Matrices de rotation)

1. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ on note

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Montrer que

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\to \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \\ \theta &\mapsto R(\theta) \end{aligned}$$

est bien définie et est un morphisme de groupe.

2. Pour tout $t \in \mathbb{R}$ on note

$$H(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}(t) & \mathrm{sh}(t) \\ \mathrm{sh}(t) & \mathrm{ch}(t) \end{pmatrix}.$$

Montrer que

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\to \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \\ t &\mapsto H(t) \end{aligned}$$

est bien définie et est un morphisme de groupe.

Indication p. 282

Exercice 25 (◔★ TD Structure algébriques: Une construction matricielle des complexes)
On note

$$\tilde{\mathbb{C}} = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

1. Montrer que $\tilde{\mathbb{C}}$ est un sous-anneau de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Montrer que $\tilde{\mathbb{C}}$ est un corps.

3. Commenter et interpréter le déterminant, la transposée et la trace.

Solution p. 291

Exercice 26 (◔★ TD Structure algébriques: Une construction matricielle des quaternions)
On note

$$\mathbb{H} = \left\{ \begin{pmatrix} u & -\overline{v} \\ v & \overline{u} \end{pmatrix}, (u,v) \in \mathbb{C}^2 \right\}.$$

1. Montrer que $\mathbb{H}$ est un sous-anneau de $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$.
2. Montrer tout élément non nul de $\mathbb{H}$ est inversible.
3. Commenter.

Indication p. 282

Exercice 27 (◔★ Matrices stochastiques)
Soit $n \in \mathbb{N}$. Une matrice $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ est dite stochastique ssi

- ▹ tous les coefficients de A sont positifs:

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, (A)_{ij} \geq 0,$$

- ▹ la somme des coefficients de chaque ligne vaut 1:

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \sum_{j=1}^{n} A_{ij} = 1.$$

Montrer que le produit de deux matrices stochastiques est stochastique.

Indication p. 282

Exercice 28 (◔★♠ Bloc de Jordan)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, on définit la matrice $J_n(\lambda) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ par

$$J_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix}$$

c'est à dire la matrice avec λ sur la diagonale, 1 sur la sur-diagonale et 0 pour tous les autres coefficients.

1. Calculer pour tout $k \in \mathbb{N}$ une expression de $(J_n(\lambda))^k$.
2. Montrer que $J_n(\lambda)$ est inversible ssi $\lambda \neq 0$.

   Dans ce cas, calculer $(J_n(\lambda))^{-1}$.

Solution p. 292

Exercice 29 (◔★♠ Matrices de Pascal)
<u>Notation</u>: Dans cet exercice les indices des lignes et des colonnes commencent à 0 !

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$ on note $T_n(\alpha) \in M_{n+1}(\mathbb{C})$ la matrice définie par

$$\forall (i,j) \in [\![0,n]\!], (T_n(\alpha))_{ij} = \binom{j}{i}\alpha^{j-i}.$$

(Par convention, si $i > j$ on posera $(T_n(\alpha))_{ij} = 0$ pour <u>tout</u> $\alpha \in \mathbb{C}$.)

1. Expliciter $T_4(\alpha)$ pour $n = 4$ et $\alpha \in \mathbb{C}$. Expliciter $T_6(1)$ et commenter.
2. Montrer que $T_n(0) = I_n$.
3. Montrer que pour tous $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$,
$$T_n(\alpha)T_n(\beta) = T_n(\alpha + \beta).$$
4. En déduire que pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, $T_n(\alpha)$ est inversible et déterminer son inverse.

Solution p. 295

Exercice 30 (◔★♠ TD Dénombrement: formules d'inversion de Pascal)
Soit $n \in \mathbb{N}$ et $(a_k)_{0\leq k\leq n}$ et $(b_k)_{0\leq k\leq n}$ deux familles de nombres complexe.

1. Montrer la **première formule d'inversion de Pascal**
$$\left(\forall i \in [\![0,n]\!], a_i = \sum_{j=0}^{n}\binom{i}{j}b_j\right) \Leftrightarrow \left(\forall i \in [\![0,n]\!], b_i = \sum_{j=0}^{n}(-1)^{j-i}\binom{i}{j}a_j\right)$$
2. Montrer la **seconde formule d'inversion de Pascal**
$$\left(\forall i \in [\![0,n]\!], a_i = \sum_{j=0}^{n}\binom{j}{i}b_j\right) \Leftrightarrow \left(\forall i \in [\![0,n]\!], b_i = \sum_{j=0}^{n}(-1)^{j-i}\binom{j}{i}a_j\right)$$

Indication p. 282

Exercice 31 (◔★♠ Matrice de Vandermonde)
Soit $n \in \mathbb{N}$.

Soient $x_1, ..., x_n$ des nombres complexes deux à deux distincts.

On définit la matrice V par

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!], (V)_{ij} = (x_i)^{j-1}$$

c'est à dire

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \cdots & x_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Montrer que V est inversible (on ne demande pas de déterminer l'inverse).

Indication p. 283 · Solution p. 296

Exercice 32 (◔★ Matrices de permutations)
Soit $n \in \mathbb{N}$. On rappelle que l'on note S_n l'ensemble des permutations de $[\![1,n]\!]$ c'est à dire l'ensemble des fonctions bijectives de $[\![1,n]\!]$ vers $[\![1,n]\!]$.

Pour $\sigma \in S_n$ on appelle matrice de permutation σ la matrice P_σ définie par

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!], (P_\sigma)_{ij} = \delta_{i\sigma(j)}.$$

Montrer que

$$\begin{aligned} S_n &\to \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \\ \sigma &\mapsto P_\sigma \end{aligned}$$

est bien définie et est un morphisme de groupes.

Indication p. 283

Exercice 33 (◑★ Matrices compagnons)
Soit $n \in \mathbb{N}$ et $P = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k + X^n$ un polynôme de degré n et de coefficient dominant 1.

On définit la matrice compagnon de P par

$$\mathcal{C}_P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Montrer que pour tout polynôme Q de degré strictement inférieur à n on a $Q(\mathcal{C}_P) \neq 0$ et que $P(\mathcal{C}_P) = 0$.

Solution p. 301

Indications

Indication 2 · Énoncé p. 269 (Un exo à paramètre (valeur propre))
Pivoter.

Pour réduire le nombre de cas à traiter, remarquer qu'il vaut mieux éviter les pivots pouvant s'annuler.

Indication 5 · Énoncé p. 269 (Par récurrence)
Récurrence.

Indication 6 · Énoncé p. 270 (Par binôme)
Binôme.

Indication 7 · Énoncé p. 270 (Par polynôme annulateur)
Division euclidienne.

Pour obtenir le reste utiliser la fonction en un point et sa dérivée en un autre.

Indication 8 · Énoncé p. 270 (Par diagonalisation éventuelle: la théorie)
Remarquer que $PAP^{-1}PBP^{-1} = PABP^{-1}$.

Indication 9 · Énoncé p. 271 (Par diagonalisation éventuelle: la pratique)
Traiter l'exercice 8 avant.

Indication 12 · Énoncé p. 271 (Matrices comme formes bilinéaires)
Que dire de $E_{1,i}AE_{j,1}$?

Indication 13 · Énoncé p. 272 (Matrices à diagonale dominante)
Utiliser le critère nucléaire d'inversibilité et prendre une ligne bien choisie.

Indication 15 · Énoncé p. 272 (Nilpotence et triangularité)
RAS

Indication 16 · Énoncé p. 273 (Relations sur les matrices)
Vérifications automatiques.

Indication 17 · Énoncé p. 273 (Centre)
Écrire pour tous i, j, $AE_{ij} = E_{ij}A$.

Indication 18 · Énoncé p. 273 (Centre bis)
Faire l'exercice 17.

Remarquer que si $\big(I_n + E_{ij}\big)A = A\big(I_n + E_{ij}\big)$ alors $AE_{ij} = E_{ij}A$.

Indication 21 · Énoncé p. 274 (Les transvections engendrent SL_n)
Faire un pivot.

Pour faire comme une dilatation remarquer que si $a_{i,1} \neq 0$, on peut effectuer $L_1 \leftarrow L_1 - \frac{a_{i,1}}{a_{11}} L_i$.

Pour faire comme une transposition remarquer qu'on peut effectuer $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ puis $L_j \leftarrow L_j - \lambda L_i$ puis $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$.

Indication 22 · Énoncé p. 275 (Trace et rang 1)

1. Trace d'un produit.
2. $C(LCLCLCLCLCLC)L$

Indication 23 · Énoncé p. 275 (Un exemple de produit semidirect)
Faire un calcul explicite.

On observe qu'il s'agit d'une représentation du groupe des isométries directes du plan, en tant que produit semi-direct des rotations et des translations.

Indication 24 · Énoncé p. 276 (Matrices de rotation)

1. Calcul explicite.
2. Calcul explicite.

Indication 26 · Énoncé p. 277 (TD Structure algébriques: Une construction matricielle des quaternions)

1. Vérifications par rédaction automatique.
2. On sait déterminer l'inversibilité et calculer l'inverse dans $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$. Il ne reste donc plus qu'à vérifier que cet éventuel inverse explicite est bien dans $\mathbb{H}$.
3. Ce n'est pas un corps car le produit est non commutatif, ce qui se prouve en exhibant un contre-exemple.

Indication 27 · Énoncé p. 277 (Matrices stochastiques)

- ▷ Pour la positivité écrire la formule.
- ▷ Pour la somme des coefficients des lignes, on peut écrire une somme double avec la formule explicite des coefficients du produit, ou bien poser $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ et vérifier que la condition s'écrit tout simplement $AX = 1 \times X$ et que $(AB)X = A(BX)$.

Indication 30 · Énoncé p. 278 (TD Dénombrement: formules d'inversion de Pascal)
Faire l'exercice 29.

Se rendre compte qu'on souhaite simplement montrer que

$$(T_n(1))^{-1} = T_n(-1)$$

et

$$(T_n(1)^\top)^{-1} = (T_n(-1))^\top.$$

Indication 31 · Énoncé p. 279 (Matrice de Vandermonde)
Par exemple:

- ▷ interpréter un vecteur du noyau comme polynôme de degré au plus $n-1$ ayant $x_1, ..., x_n$ comme racines,
- ▷ effectuer un pivot sur les colonnes pour obtenir une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} P_0(x_1) & P_1(x_1) & P_2(x_1) & \cdots & P_{n-1}(x_1) \\ P_0(x_2) & P_1(x_2) & P_2(x_2) & \cdots & P_{n-1}(x_2) \\ P_0(x_3) & P_1(x_3) & P_2(x_3) & \cdots & P_{n-1}(x_3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ P_0(x_n) & P_1(x_n) & P_2(x_n) & \cdots & P_{n-1}(x_n) \end{pmatrix}.$$

  Avec pour tout k, P_k unitaire et de degré k.
- ▷ effectuer un pivot sur les lignes, Bernoulli, dilation et transvection avant de faire une récurrence.

Solution p. 296

Indication 32 · Énoncé p. 279 (Matrices de permutations)
On vérifie *d'abord* que $P_{\sigma_1 \circ \sigma_2} = P_{\sigma_1} P_{\sigma_2}$ (il faudra de toutes façons le faire pour le montrer que c'est un morphisme de groupes) et que $P_{\mathrm{Id}} = I_n$.

On en déduit que P_σ est inversible car $P_{\sigma^{-1}}$ est bien un inverse.

En fait, comme pour l'exercice 29, on montre que c'est un morphisme de monoïdes, avec un ensemble de départ qui est un groupe, et donc un morphisme de groupe dans le groupe des inversibles.

Solutions

Solution pour l'exercice 3 · Énoncé p. 269 (Un exo à paramètre (image))
On effectue les opérations élémentaires sur les lignes suivantes

▷ $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$

$$\begin{cases} x+y = \alpha \\ -3y \ = \beta - 2\alpha \\ y \ = \gamma - \alpha. \end{cases}$$

▷ $L_3 \leftarrow -\frac{1}{3}L_3$

$$\begin{cases} x+y = \alpha \\ y \ = \frac{2}{3}\alpha - \frac{1}{3}\beta \\ y \ = -\alpha + \gamma. \end{cases}$$

▷ $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$

$$\begin{cases} x+y = \alpha \\ y \ = \frac{2}{3}\alpha - \frac{1}{3}\beta \\ y \ = -\frac{5}{3}\alpha + \frac{1}{3}\beta + \frac{3}{3}\gamma. \end{cases}$$

Le système obtenu étant échelonné, et la condition de compatibilité étant $-\frac{5}{3}\alpha + \frac{1}{3}\beta + \frac{3}{3}\gamma = 0$, il existe une solution ssi

$$\boxed{5\alpha - \beta - 3\gamma = 0}.$$

Remarque: On a $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\-1\\-3\end{pmatrix}$. Faire un schéma et commenter.

Solution pour l'exercice 4 · Énoncé p. 269 (Un exo à paramètre (inverse))
On effectue les opérations élémentaires

▷ $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\0 & 2 & 0\\0 & 3 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha\\\beta-\alpha\\\gamma-\alpha\end{pmatrix}.$$

▷ $L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2$

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\0 & 1 & 0\\0 & 3 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha\\-\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2}\beta\\-\alpha+\gamma\end{pmatrix}.$$

▷ $L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2$

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha\\-\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2}\beta\\\frac{1}{2}\alpha-\frac{3}{2}\beta+\gamma\end{pmatrix}.$$

▷ $L_3 \leftarrow \frac{1}{3}L_3$

$$\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha\\-\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2}\beta\\\frac{1}{6}\alpha-\frac{1}{2}\beta+\frac{1}{3}\gamma\end{pmatrix}.$$

▷ $L_1 \leftarrow L_1 - L_3$, $L_1 \leftarrow L_1 + L_2$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\alpha+\beta-\frac{1}{3}\gamma\\-\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2}\beta\\\frac{1}{6}\alpha-\frac{1}{2}\beta+\frac{1}{3}\gamma\end{pmatrix}.$$

Et par conséquent

$$\boxed{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&1&-\frac{1}{3}\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\\frac{1}{6}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}.}$$

On a donc montré (cf cours) que $\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&1&1\\1&2&4\end{pmatrix}$ est inversible et

$$\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&1&1\\1&2&4\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&1&-\frac{1}{3}\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\\frac{1}{6}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

On peut aussi commenter que la matrice concernée est un cas particulier de matrice de Vandermonde.

Solution pour l'exercice 10 · Énoncé p. 271 (Autonomie I)

Posons

$$A=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$$

▷ **Par récurrence**

On calcule les premières puissances de A.

▷ $A^0=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$
▷ $A^1=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$
▷ $A^2=\begin{pmatrix}5&4\\4&5\end{pmatrix}$
▷ $A^3=A^2A=\begin{pmatrix}14&13\\13&14\end{pmatrix}$

On va par conséquent montrer par récurrence sur $n\in\mathbb{N}$ le résultat suivant

$$\forall n\in\mathbb{N}, A^n=\begin{pmatrix}\frac{3^n+1}{2}&\frac{3^n-1}{2}\\\frac{3^n-1}{2}&\frac{3^n}{2}\end{pmatrix}$$

▷ **Initialisation**

Pour $n=0$, on a bien

$$A^0 = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3^0+1}{2} & \frac{3^0-1}{2} \\ \frac{3^0-1}{2} & \frac{3^0}{2} \end{pmatrix}.$$

▷ **Hérédité**

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $A^n = \begin{pmatrix} \frac{3^n+1}{2} & \frac{3^n-1}{2} \\ \frac{3^n-1}{2} & \frac{3^n+1}{2} \end{pmatrix}$.

Alors on a

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n A \\ &= \begin{pmatrix} \frac{3^n+1}{2} & \frac{3^n-1}{2} \\ \frac{3^n-1}{2} & \frac{3^n+1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (3^n+1) + \frac{3^n-1}{2} & (3^n-1) + \frac{3^n+1}{2} \\ (3^n-1) + \frac{3^n+1}{2} & (3^n+1) + \frac{3^n-1}{2} \end{pmatrix} \\ &\begin{pmatrix} \frac{(2+1)3^n+2-1}{2} & \frac{(2+1)3^n-2+1}{2} \\ \frac{(2+1)3^n-2+1}{2} & \frac{(2+1)3^n+2-1}{2} \end{pmatrix} \qquad = \begin{pmatrix} \frac{3^{n+1}+1}{2} & \frac{3^{n+1}-1}{2} \\ \frac{3^{n+1}-1}{2} & \frac{3^{n+1}}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ce qui est bien le résultat au rang $n+1$.

▷ **Conclusion**

Par récurrence on a bien

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \boxed{A^n = \begin{pmatrix} \frac{3^n+1}{2} & \frac{3^n-1}{2} \\ \frac{3^n-1}{2} & \frac{3^n+1}{2} \end{pmatrix}}$$

▷ **Par binôme I**

Posons $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Alors $S^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$.

Par conséquent, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

- ▷ Si k est pair, $S^k = (S^2)^{\frac{k}{2}} = I_2$.
- ▷ Si k est impair, $S^k = S(S^2)^{\frac{k-1}{2}} = S$.

De plus S et I_2 <u>commutent</u> d'où par la formule du binôme

$$\begin{aligned} (2I_2 + S)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} S^k (2I_2)^{n-k} \\ &= \sum_{\substack{k \in [\![0,n]\!] \\ k \text{ pair}}} \binom{n}{k} 2^{n-k} I_2 + \sum_{\substack{k \in [\![0,n]\!] \\ k \text{ impair}}} \binom{n}{k} 2^{n-k} S \end{aligned}$$

Or comme

$$3^n = (2+1)^n \qquad = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} = \sum_{\substack{k \in [\![0,n]\!] \\ k \text{ pair}}} \binom{n}{k} 2^{n-k} + \sum_{\substack{k \in [\![0,n]\!] \\ k \text{ impair}}} \binom{n}{k} 2^{n-k}$$

$$1^n = (2-1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} (-1)^k = \sum_{\substack{k \in [\![0,n]\!] \\ k \text{ pair}}} \binom{n}{k} 2^{n-k} - \sum_{\substack{k \in [\![0,n]\!] \\ k \text{ impair}}} \binom{n}{k} 2^{n-k}$$

en résolvant le système somme-différence on obtient

$$\sum_{\substack{k\in[\![0,n]\!]\\ k \text{ pair}}} \binom{n}{k} 2^{n-k} = \frac{3^n+1}{2}$$

$$\sum_{\substack{k\in[\![0,n]\!]\\ k \text{ impair}}} \binom{n}{k} 2^{n-k} = \frac{3^n-1}{2}$$

et par conséquent

$$\boxed{A^n = (2I_2+S)^n = \tfrac{3^n+1}{2} I_2 + \tfrac{3^n-1}{2} S}.$$

c'est à dire

$$\boxed{A^n = \begin{pmatrix} \frac{3^n+1}{2} & \frac{3^n-1}{2} \\ \frac{3^n-1}{2} & \frac{3^n+1}{2} \end{pmatrix}}$$

▷ **Par binôme II** Posons

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors $J^2 = 2J$ d'où par récurrence immédiate, pour tout $k \in \mathbb{N}^k$,
- ▷ Si $k = 0$ alors $J^k = I_2$.
- ▷ Si $k \geq 0$ alors $J^k = 2^{k-1}J$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

De plus I_2 et J commutent d'où par la formule du binôme

$$\begin{aligned}(I_2+J)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} J^k I_2^{n-k} \\ &= \binom{n}{0} J^0 I_2^{n-0} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 2^{k-1} J I_2^{n-k} \\ &= I_2 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 2^{k-1} J.\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 2^{k-1} &= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k - 1\right) \\ &= \frac{3^n-1}{2}\end{aligned}$$

d'où

$$\boxed{A^n = (I_2+J)^n = I_2 + \tfrac{3^n-1}{2} J}$$

c'est à dire

$$\boxed{A^n = \begin{pmatrix} \frac{3^n+1}{2} & \frac{3^n-1}{2} \\ \frac{3^n-1}{2} & \frac{3^n+1}{2} \end{pmatrix}}$$

▷ **Par polynôme annulateur**

On observe que

$$A^2 = 4A - 3I_2$$

(De manière générale pour les matrices 2×2, $A^2 = \mathrm{tr}(A)A - \det(A)I_2$).

Posons

$$P = X^2 - 4X + 3 = (X-3)(X-1).$$

Alors $P(A) = 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Par division euclidienne dans $\mathbb{R}[X]$ il existe $(Q_n, R_n) \in \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}_1[X]$ tels que

$$X^n = Q_n P + R_n$$
$$\deg(R_n) < \deg(P) = 2$$

On a alors R_n un polynôme affine et

▷ En évaluant en 3,

$$3^n = Q_n(3)\underbrace{P(3)}_{0} + R_n(3)$$

i.e

$$R_n(3) = 3^n$$

▷ En évaluant en 1,

$$1^n = Q_n(1)\underbrace{P(1)}_{0} + R_n(1)$$

i.e

$$R_n(1) = 1^n$$

par conséquent (équation de la droite passant pas $(1, 1^n)$, $(3, 3^n)$)

$$R_n(X) = \frac{3^n - 1^n}{3-1}(X-1) + 1^n$$

i.e

$$R_n(X) = \frac{3^n - 1}{2}X - \frac{3^n - 3}{2}.$$

Donc comme

$$A^n = Q_n(A)\underbrace{P(A)}_{=0_2} + R_n(A)$$

on en déduit

$$\boxed{A^n = \frac{3^n-1}{2}A - \frac{3^n-3}{2}I_2}$$

c'est à dire

$$\boxed{A^n = \begin{pmatrix} \frac{3^n+1}{2} & \frac{3^n-1}{2} \\ \frac{3^n-1}{2} & \frac{3^n+1}{2} \end{pmatrix}}$$

▷ **Par diagonalisation éventuelle**

Posons

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

et

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$$

d'inverse

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

On observe que [faire le calcul]

$$A = PDP^{-1}$$

d'où pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$A^n = PD^nP^{-1}$$

c'est à dire

$$\boxed{A^n = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}$$

ou encore [faire le calcul]

$$\boxed{A^n = \begin{pmatrix} \frac{3^n+1}{2} & \frac{3^n-1}{2} \\ \frac{3^n-1}{2} & \frac{3^n+1}{2} \end{pmatrix}}$$

Solution pour l'exercice 11 · Énoncé p. 271 (Autonomie II)

Posons $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

▷ Par récurrence (remarquer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, A^n de la forme $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ a_k & k & 1 \end{pmatrix}$ et écrire la relation de récurrence vérifiée par $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$.)

▷ Par binôme bien choisi.

▷ Par polynôme annulateur (ici $(X-1)^3$ admettant une racine triple).

Procédons par exemple **par récurrence**.

Posons

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$N^3 = 0_3.$$

D'où pour tout $k \geq 3$, $N^k = N^3 N^{k-3} = 0_3$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Comme I_3 et N commutent on a par la formule du binôme

$$\begin{aligned}(I_3 + N)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k I_3^{n-k} \\ &= \binom{n}{0} N^0 I_3^{n-0} + \binom{n}{1} N^1 I_3^{n-1} + \binom{n}{2} N^2 I_3^{n-2} + \sum_{k \in [\![3,n]\!]} \binom{n}{k} 0_3 \\ &= I_3 + nN + \frac{n(n-1)}{2} N^2\end{aligned}$$

c'est à dire

$$\boxed{A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ n & 1 & 0 \\ \frac{n(n-1)}{2} & n & 1 \end{pmatrix}}$$

Solution pour l'exercice 14 · Énoncé p. 272 (Équations matricielles sans solution)

1. Faire un calcul explicite ou utiliser le cours d'algèbre linéaire.

2. Supposons par l'absurde qu'il existe de telles matrices.

Alors comme (par linéarité de la trace et trace d'un produit)

$$\operatorname{tr}(AB - BA) = \operatorname{tr}(AB) - \operatorname{tr}(BA) = \operatorname{tr}(AB) - \operatorname{tr}(AB) = 0$$

et comme

$$\operatorname{tr}(I_n) = n$$

on obtient une $\boxed{\text{contradiction}}$.

Solution pour l'exercice 19 · Énoncé p. 274 (Un aperçu de produit scalaire matriciel)

On a

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}(AA^\top) &= \sum_{i=1}^{n} \left(AA^\top\right)_i \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} (A)_{ij}(A^\top)_{ji} \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} (A)_{ij}(A)_{ij} \\ &= \sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \left((A)_{ij}\right)^2\end{aligned}$$

Or une somme de coefficients positifs est positive d'où

$$\boxed{\operatorname{tr}(AA^\top) \geq 0}$$

et une somme de coefficients positifs est nulle ssi tous les coefficients positifs sont nuls d'où

$$\boxed{\operatorname{tr}(AA^\top) = 0 \Leftrightarrow \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, (A)_{ij} = 0 \Leftrightarrow A = 0_n}.$$

Solution pour l'exercice 20 · Énoncé p. 274 (Seulement la trace)
Constater qu'il suffit de connaître l'image des $\left(E_{ij}\right)_{i,j\in[\![1,n]\!]}$.

Étudier l'image de $E_{ij}E_{kl}$.

Solution pour l'exercice 25 · Énoncé p. 276 (TD Structure algébriques: Une construction matricielle des complexes)

1. ▷ On a $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & -0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \tilde{\mathbb{C}}$.

D'où l'appartenance de l'unité.

▷ Soit $Z \in \tilde{\mathbb{C}}$.

Il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $Z = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.

Alors $-Z = \begin{pmatrix} (-a) & -(-b) \\ (-b) & (-a) \end{pmatrix} \in \tilde{\mathbb{C}}$. D'où la la stabilité par opposé.

▷ Soient $Z_1, Z_2 \in \tilde{\mathbb{C}}$.

Il existe $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R}$ tels que $Z_1 = \begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix}$ et $Z_2 = \begin{pmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix}$.

Alors

$$Z_1 + Z_2 = \begin{pmatrix} (a_1+a_2) & -(b_1+b_2) \\ (b_1+b_2) & (a_1+a_2) \end{pmatrix} \in \tilde{\mathbb{C}}.$$

D'où la stabilité par somme.

Et de plus

$$Z_1 Z_2 = \begin{pmatrix} (a_1a_2 - b_1b_2) & -(a_1b_2 + a_2b_1) \\ (a_1b_2 + a_2b_1) & (a_1a_2 - b_1b_2) \end{pmatrix} \in \tilde{\mathbb{C}}.$$

D'où la stabilité par produit.

Ainsi $\boxed{\tilde{\mathbb{C}} \text{ est un sous-anneau de } \mathrm{M}_2(\mathbb{R})}$.

2. Il reste à montrer que $\tilde{\mathbb{C}}$ est commutatif et que tout élément non nul est inversible.

▷ Soient $Z_1, Z_2 \in \tilde{\mathbb{C}}$.

Il existe $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R}$ tels que $Z_1 = \begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix}$ et $Z_2 = \begin{pmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix}$.

Alors

$$Z_1 Z_2 = \begin{pmatrix} (a_1a_2 - b_1b_2) & -(a_1b_2 + a_2b_1) \\ (a_1b_2 + a_2b_1) & (a_1a_2 - b_1b_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a_2a_1 - b_2b_1) & -(a_2b_1 + a_1b_2) \\ (a_2b_1 + a_1b_2) & (a_2a_1 - b_2b_1) \end{pmatrix} = Z_2 Z_1.$$

D'où la commutativité.

▷ Soit $Z \in \tilde{\mathbb{C}}$ non nul. Alors il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $Z = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$. Comme $Z \neq 0_2$ on a $(a, b) \neq (0, 0)$ et donc (somme d'éléments positifs non tous nuls) $a^2 + b^2 \neq 0$.

On constate que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & 0 \\ 0 & a^2 + b^2 \end{pmatrix}.$$

Et donc

$$\begin{pmatrix} \frac{a}{a^2+b^2} & -\frac{b}{a^2+b^2} \\ \frac{b}{a^2+b^2} & \frac{a}{a^2+b^2} \end{pmatrix} Z = I_2$$

et comme $\begin{pmatrix} \frac{a}{a^2+b^2} & -\frac{b}{a^2+b^2} \\ \frac{b}{a^2+b^2} & \frac{a}{a^2+b^2} \end{pmatrix} \in \tilde{\mathbb{C}}$ on a que Z est inversible à gauche et donc par commutativité Z est inversible.

Remarque: on reconnaît ici la construction de l'inverse de $z \neq 0$ par $\frac{1}{|z|^2}\overline{z}$.

D'où $\boxed{\tilde{\mathbb{C}} \text{ est un corps}}$.

3. On observe qu'il s'agit d'une construction possible des $\boxed{\text{nombres complexes}}$ $\mathbb{C}$.

En effet en notant $1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $i = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ on a que $\tilde{\mathbb{C}} = \{a + bi, (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$ avec les règles de calculs sur un anneau commutatif et $i^2 = -1$.

On peut interpréter sous cet angle:

▷ Le **déterminant** $a^2 + b^2$ comme le **module au carré**.
▷ La **transposée** comme le **conjugué**.
▷ La **trace** $2a$ comme la **deux fois la partie réelle**.

Solution pour l'exercice 28 · Énoncé p. 277 (Bloc de Jordan)

1. Posons

$$N = J_n(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

On a pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]$,

$$(N)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } \ j = i+1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = \delta_{i+1=j}.$$

Montrons par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ que

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \left(N^k\right)_{ij} = \delta_{i+k=j}.$$

Autrement dit si $k \in [\![0, n-1]\!]$,

$$N^k = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

où tous les coefficients sont nuls sauf les 1 sur la k-ième sur-diagonale, et si $k \geq n$, $N^k = 0_n$.

- **Initialisation**: pour $k = 0$ on a $N^0 = I_n$ et on a bien
$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \left(N^0\right)_{ij} = \delta_{i=j}.$$
- **Hérédité**: Soit $k \in \mathbb{N}$.

  Supposons que pour tous $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\left(N^k\right)_{ij} = \delta_{i+k=j}$.

  Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$.

  On a
$$\begin{aligned} \left(N^{k+1}\right)_{ij} &= \left(N^k N\right)_{ij} \\ &= \sum_{l=1}^{n} \left(N^k\right)_{il} N_{lj} \\ &= \sum_{l=1}^{n} \delta_{i+k=l} \delta_{l+1=j} \\ &= \delta_{i+k+1=j}. \end{aligned}$$
  D'où le résultat au rang $k+1$.
- **Conclusion**: par récurrence on a bien pour tout $k \in \mathbb{N}$,
$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \left(N^k\right)_{ij} = \delta_{i+k=j}.$$

Ensuite comme λI_n et N **commutent**, par formule du binôme on a pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$(\lambda I_n + N)^k = \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} (\lambda I_n)^{k-l} N^l$$

On en déduit que pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$,

$$\begin{aligned}\left(J_n(\lambda)^k\right)_{i,j} &= \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} \lambda^{k-l} \delta_{i+l=j} \\ &= \delta_{j\geq i} \binom{k}{j-i} \lambda^{k-(j-i)}\end{aligned}$$

avec la convention que $\binom{k}{l} = 0$ si $l > k$.

Ainsi

$$\boxed{\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \left(J_n(\lambda)^k\right)_{i,j} = \delta_{j\geq i}\binom{k}{j-i}\lambda^{k-(j-i)}}.$$

Ce qui peut s'écrire

$$J_n(\lambda)^k = \begin{pmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-1} & \frac{k(k-1)}{2}\lambda^{k-2} & \cdots & \binom{k}{l}\lambda^{k-l} & \cdots & \cdots \\ 0 & \lambda^k & k\lambda^{k-1} & \cdots & \cdots & \binom{k}{l}\lambda^{k-l} & \cdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \lambda^k & k\lambda^{k-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \lambda^k \end{pmatrix}.$$

[Faire encore plus de schémas.]

2. On a $J_n(\lambda)$ est une matrice triangulaire dont les coefficients diagonaux sont tous égaux à λ.

D'où $\boxed{J_n(\lambda) \text{ est inversible ssi } \lambda \neq 0}$.

Si $\lambda \neq 0$ on a alors

$$(\lambda I_n + N)^{-1} = \lambda^{-1}\left(I_n - (-\lambda^{-1}N)\right)^{-1}$$

De plus on a vu avec les notations précédentes que N est nilpotente et $N^{n+1} = 0_n$, d'où $\lambda^{-1}N$ est nilpotente et $\left(\lambda^{-1}N\right)^{n+1} = 0_n$.

Par formule de Bernoulli, comme I_n et $\lambda^{-1}N$ **commutent**,

$$\begin{aligned} I_n &= \left(I_n^{n+1} - \left(-\lambda^{-1}N\right)^{n+1}\right) \\ &= \left(I_n - (-\lambda^{-1}N)\right) \sum_{k=0}^{n} \left(-\lambda^{-1}N\right)^k I_n^{n-k} \\ &= \left(I_n - (-\lambda^{-1}N)\right) \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \lambda^{-k} N^k \end{aligned}$$

et de même à gauche.

Par conséquent

$$\boxed{(\lambda I_n + N)^{-1} = \lambda^{-1} \textstyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \lambda^{-k} N^k}.$$

Ce qui peut s'écrire

$$J_n(\lambda)^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda^{-1} & -\lambda^{-2} & \lambda^{-3} & \cdots & (-1)^{n-1}\lambda^{-n} \\ 0 & \lambda^{-1} & -\lambda^{-2} & \cdots & (-1)^{n}\lambda^{-(n-1)} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \lambda^{-1} \end{pmatrix}.$$

Solution pour l'exercice 29 · Énoncé p. 278 (Matrices de Pascal)

1. On a

$$\boxed{T_4(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 & \alpha^3 & \alpha^4 \\ 0 & 1 & 2\alpha & 3\alpha^2 & 4\alpha^3 \\ 0 & 0 & 1 & 3\alpha & 6\alpha^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}.$$

De même

$$\boxed{T_6(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 & 10 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 10 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}.$$

Il s'agit d'une matrice dont la transposée est le $\boxed{\text{triangle de Pascal}}$.

2. On a pour tout $(i,j) \in [\![0,n]\!]^2$, si $i > j$ alors $\binom{j}{i} = 0$ et si $i < j$ alors $0^{j-i} = 0$.

Et si $i = j$ alors $\binom{j}{i}0^{j-i} = 1$.

D'où

$$\boxed{T_n(0) = I_n}.$$

3. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

Soit $(i,j) \in [\![0,n]\!]$.

On a

$$\begin{aligned}(T_n(\alpha)T_n(\beta))_{ij} &= \sum_{k=0}^{n} (T_n(\alpha))_{ik}(T_n(\beta))_{kj} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{k}{i}\alpha^{k-i}\binom{j}{k}\beta^{j-k}\end{aligned}$$

Par formule des capitaines on a de plus pour tout $k \in [\![0,n]\!]$,

$$\binom{k}{i}\binom{j}{k} = \binom{j}{i}\binom{j-i}{k-i}.$$

(Cf cours sur les coefficients binomiaux).

Ainsi, avec le changement d'indice $l = k - i$

$$\begin{aligned}
\left(T_n(\alpha)T_n(\beta)\right)_{ij} &= \sum_{k=0}^{n}\binom{j}{i}\binom{j-i}{k-i}\alpha^{k-i}\beta^{j-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{j}{i}\binom{j-i}{k-i}\alpha^{k-i}\beta^{j-k} \\
&= \binom{j}{i}\sum_{k=0}^{n}\binom{j-i}{k-i}\alpha^{k-i}\beta^{j-k} \\
&= \binom{j}{i}\sum_{l=0}^{j-i}\binom{j-i}{l}\alpha^{l}\beta^{j-i-l} \\
&= \binom{j}{i}(\alpha+\beta)^{j-i} \\
&= \left(T_n(\alpha+\beta)\right)_{ij}.
\end{aligned}$$

Et donc

$$\boxed{T_n(\alpha)T_n(\beta) = T_n(\alpha+\beta)}.$$

4. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$.

On a par la question précédente $T_n(\alpha)T_n(-\alpha) = T_n(\alpha+(-\alpha)) = T_n(0) = I_n$.

Donc $\boxed{T_n(\alpha) \text{ est inversible et son inverse est } T_n(-\alpha)}$.

Remarque: on a en fait montré que

$$\begin{aligned}
(\mathbb{R},+) &\to (\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}),\times) \\
\alpha &\mapsto T_n(\alpha)
\end{aligned}$$

est un morphisme de groupes.

Solution pour l'exercice 31 · Énoncé p. 279 · Indication p. 283 (Matrice de Vandermonde)

▷ **Première méthode**: par noyau.

Soit $X \in \mathrm{Ker}(V)$.

Avec

$$X = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \vdots & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

on a

$$AX = 0_n$$

c'est à dire

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

ce qui s'écrit

$$\begin{pmatrix} a_0 + a_1x_1 + \cdots + a_{n-1}x_1^{n-1} \\ a_0 + a_1x_2 + \cdots + a_{n-1}x_2^{n-1} \\ \vdots \\ a_0 + a_1x_n + \cdots + a_{n-1}x_n^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

ou encore

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \sum_{j=0}^{n-1} a_j x_i^j = 0.$$

Avec

$$P = \sum_{j=0}^{n-1} a_j X^j$$

on a donc

$$\forall i \in [\![1, n]\!], P(x_i) = 0.$$

Par conséquent P est un polynôme de degré strictement inférieur à n ayant n racines distinctes, donc $P = 0$.

Donc $\forall j \in [\![0, n-1]\!], a_j = 0$, i.e $X = 0_n$.

Donc $\mathrm{Ker}(V) = \{0_n\}$ et donc $\boxed{V \text{ est inversible}}$.

▷ **Deuxième méthode**: Par image (cette méthode repose en fait sur les polynômes d'interpolation de Lagrange qui seront vus plus tard dans l'année).

Soit $Y \in \mathbb{R}^n$.

Avec $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, pour tout $X = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ on a

$$AX = Y$$

ssi (même calcul)

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \sum_{j=0}^{n-1} a_j x_i^j = y_i.$$

Posons pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,

$$L_i = \prod_{j \neq i} \frac{X - x_j}{x_i - x_j}.$$

On constate que pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$, $L_i(x_j) = \delta_{ij}$.

D'où avec

$$P = \sum_{i=1}^{n} y_i L_i$$

on a P de degré strictement inférieur à n.

En notant $P = \sum_{j=0}^{n-1} a_j X^j$ on a alors

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \sum_{j=0}^{n-1} a_j x_i^j = P(x_i) = \sum_{j=1}^{n} \delta_{ij} y_j = y_i.$$

Et donc $AX = Y$.

D'où V est surjective et donc $\boxed{V \text{ est inversible}}$.

▷ **Troisième méthode**: Par pivot sur les colonnes.

Soient $a_0, ..., a_{n-2} \in \mathbb{C}$.

En effectuant les opérations élémentaires

$$\forall j \in [\![1, n-1]\!], C_n \leftarrow C_n + a_j C_j$$

on obtient que V est équivalente par colonnes à

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-2} & x_1^{n-1} + \sum_{j=0}^{n-2} a_j x^j \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-2} & x_2^{n-1} + \sum_{j=0}^{n-2} a_j x^j \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-2} & x_n^{n-1} + \sum_{j=0}^{n-2} a_j x^j \end{pmatrix}.$$

Donc pour tout polynôme P_{n-1} de degré $n-1$ et unitaire, c'est à dire s'écrivant

$$P_{n-1} = X^{n-1} + \sum_{j=0}^{n-2} a_j X^j$$

on a V équivalent par colonnes à

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-2} & P_{n-1}(x_1) \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-2} & P_{n-1}(x_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-2} & P_{n-1}(x_n) \end{pmatrix}.$$

De même que précédemment, avec $P_{n-2} = X^{n-2} + \sum_{j=0}^{n-3} b_j X^j$ un polynôme unitaire de degré $n-2$, en effectuant $\forall j \in [\![1, n-2]\!], C_{n-1} \leftarrow C_{n-1} + b_j C_j$ on obtient que V est équivalente par colonnes à

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-3} & P_{n-2}(x_1) & P_{n-1}(x_1) \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-3} & P_{n-2}(x_2) & P_{n-1}(x_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-3} & P_{n-2}(x_n) & P_{n-1}(x_n) \end{pmatrix}.$$

Et en faisant de même pour P_{n-3}, P_{n-4}, etc. on obtient que:

Pour toute famille $(P_0, P_1, ..., P_{n-1})$ de polynômes unitaires vérifiant pour tout $j \in [\![0, n-1]\!]$, $\deg(P_j) = j$ on a V est équivalent par colonne à

$$\begin{pmatrix} P_0(x_1) & P_1(x_1) & \cdots & P_{n-1}(x_1) \\ P_0(x_2) & P_1(x_2) & \cdots & P_{n-1}(x_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ P_0(x_n) & P_1(x_n) & \cdots & P_{n-1}(x_n) \end{pmatrix}.$$

Il suffit ensuite de poser pour tout $j \in [\![0, n-1]\!]$,

$$P_j = \prod_{i<j}(X - x_i)$$

qui est bien unitaire de degré j, pour obtenir que V est équivalent par colonnes à une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ * & (x_2 - x_1) & \cdots & \cdots & 0 & \\ * & * & (x_3 - x_1)(x_3 - x_2) & \cdots & 0 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ * & * & * & \cdots & \prod_{i=1}^{n-1}(x_n - x_i) & \end{pmatrix}$$

qui est une matrice triangulaire (inférieure) de coefficients diagonaux non nuls, donc $\boxed{V \text{ est inversible}}$.

▹ **Quatrième méthode**: Par pivot sur les lignes (et par colonnes) et récurrence.

Pour $n \in \mathbb{N}$ notons $\mathcal{P}_n$ l'hypothèse de récurrence:

« Pour tous réels $x_1, ..., x_n$ deux à deux distincts $V(x_1, ..., x_n) = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \cdots & x_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$ est inversible».

▹ **Initialisation** Pour $n = 1$, on a bien pour tout réel x_1, la matrice (1) est inversible.

▹ **Hérédité** Soit $n \in \mathbb{N}$ tq $n \geq 2$. Supposons $\mathcal{P}_{n-1}$.

Soient $x_1, ..., x_n$ deux à deux distincts et

$$V = V(x_1, ..., x_n) = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \cdots & x_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

En effectuant les opérations élémentaires

$$\forall i \in [\![2, n]\!] L_i \leftarrow L_i - L_1$$

on obtient que V est équivalente par ligne à

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 0 & x_2-x_1 & x_2^2-x_1^2 & \cdots & x_2^{n-1}-x_1^{n-1} \\ 0 & x_3-x_1 & x_3^2-x_1^2 & \cdots & x_3^{n-1}-x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & x_n-x_1 & x_n^2-x_1^2 & \cdots & x_n^{n-1}-x_1^{n-1} \end{pmatrix}$$

En effectuant les dilatations

$$\forall i \in [\![2,n]\!] L_i \leftarrow \frac{1}{x_i-x_1} L_i$$

par la formule de Bernoulli on obtient que V est équivalente par ligne à

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 0 & 1 & x_2+x_1 & \cdots & \sum_{k=0}^{n-2} x_2^k x_1^{n-2-k} \\ 0 & 1 & x_3+x_1 & \cdots & \sum_{k=0}^{n-2} x_3^k x_1^{n-2-k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 1 & x_n+x_1 & \cdots & \sum_{k=0}^{n-2} x_n^k x_1^{n-2-k} \end{pmatrix}$$

On effectue la transvection par colonne

$$C_3 \leftarrow C_3 - x_1 C_2$$

on obtient que V est équivalente par lignes et colonnes à

$$\begin{pmatrix} 1 & * & * & * & \cdots & * \\ 0 & 1 & x_2 & x_1^2+x_1x_2+x_2^2 \cdots & \sum_{k=0}^{n-2} x_2^k x_1^{n-2-k} & \\ 0 & 1 & x_3 & x_1^2+x_1x_3+x_3^2 & \cdots & \sum_{k=0}^{n-2} x_3^k x_1^{n-2-k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 1 & x_n & x_1+x_nx_1+x_n^2 \cdots & \sum_{k=0}^{n-2} x_n^k x_1^{n-2-k} & \end{pmatrix}$$

on effectue ensuite

$$C_4 \leftarrow C_4 - x_1 C_3 - x_1^2 C_2$$

on obtient que V est équivalente par lignes et colonnes à

$$\begin{pmatrix} 1 & * & * & * & \cdots & * \\ 0 & 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & \sum_{k=0}^{n-2} x_2^k x_1^{n-2-k} \\ 0 & 1 & x_3 & x_3^2 & \cdots & \sum_{k=0}^{n-2} x_3^k x_1^{n-2-k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & \sum_{k=0}^{n-2} x_n^k x_1^{n-2-k} \end{pmatrix}$$

et en continuant on a donc V équivalente par ligne et par colonne à la matrice par blocs

$$\tilde{V} = \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & V(x_2,...,x_n) \end{pmatrix}.$$

Or par hypothèse de récurrence $V(x_2,...,x_n)$ est inversible car $x_2,...,x_n$ deux à deux distincts, d'où $\tilde{V}$ est inversible (car d'inverse par blocs $\begin{pmatrix} 1 & -LV(x_2,...,x_n)^{-1} \\ 0 & V(x_2,...,x_n)^{-1} \end{pmatrix}$) et donc V est inversible.

- ▹ **Conclusion** Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $x_1,...,x_n$ sont deux à deux distincts, alors $\boxed{V(x_1,...,x_n) \text{ est inversible}}$.

▹ **Autres méthodes**: on verra plus tard dans l'année d'autres preuves que V est inversible, par exemple par son calcul de déterminant (plusieurs preuves possibles ici), par étude de l'application $\begin{aligned} \text{eval} : \mathbb{C}[X] &\to \mathbb{C}^n \\ P &\mapsto (P(x_1),...,P(x_n)) \end{aligned}$, par des choix de base de $C_n[X]$.

Solution pour l'exercice 33 . Énoncé p. 280 (Matrices compagnons)

Notons pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, $E_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ où le 1 est en position j.

On rappelle que pour toute matrice $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, AE_j est la j-ème colonne de A.

On a par produit matriciel (produit d'une matrice par un vecteur de la base canonique)

$$\forall j \in [\![1,n-1]\!], \mathcal{C}_P E_j = E_{j+1}$$

et

$$\mathcal{C}_P E_n = \sum_{i=1}^{n} -a_{i-1} E_{i-1}.$$

Par récurrence finie sur k on obtient donc

$$\forall k \in [\![0,n-1]\!], \mathcal{C}_P^k E_1 = E_{k+1}.$$

- ▹ **Initialisation**: on a $I_n E_1 = E_{1+0}$.
- ▹ **Hérédité**: soit $k \in [\![0,n-2]\!]$ et supposons que $\mathcal{C}_P^k E_1 = E_{k+1}$.

  Alors

$$\mathcal{C}_P^{k+1} E_1 = \mathcal{C}_P \mathcal{C}_P^k E_1 = \mathcal{C}_P E_{k+1} = E_{k+2}.$$

- ▹ **Conclusion**: par récurrence finie

$$\boxed{\forall k \in [\![0,n-1]\!], \mathcal{C}_P^k E_1 = E_{k+1}}.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} P(\mathcal{C}_P) E_1 &= \mathcal{C}_P^n E_1 + \sum_{k=0}^{n-1} \mathcal{C}_P^k E_1 \\ &= -\sum_{i=0}^{n-1} a_i E_{i+1} + \sum_{k=0}^{n-1} E_{k+1} \\ &= 0_n. \end{aligned}$$

Et pour $j \in [\![1, n]\!]$

$$P(\mathcal{C}_P)E_j = P(\mathcal{C}_P)\mathcal{C}_P^{j-1}E_1 = \mathcal{C}_P^{j-1}P(\mathcal{C}_P)E_1 = 0_n.$$

Comme toutes les colonnes de $P(\mathcal{C}_P)$ sont nulles, on a $\boxed{P(\mathcal{C}_P) = 0_n}$.

Montrons en fait le résultat suivant plus fort que l'énoncé:

Pour tout polynôme $T \in \mathbb{K}[X]$, $T(\mathcal{C}_P) = 0_n$ ssi P divise T (c'est à dire il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tq $T = PQ$).

Soit $T \in \mathbb{K}[X]$

- ▷ $\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons T divise P.

  Alors il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $T = PQ$.

  D'où $T(\mathcal{C}_P) = \underbrace{P(\mathcal{C}_P)}_{0_{n,n}} Q(\mathcal{C}_P) = 0_{n,n}$ et donc $\boxed{T \text{ annule } \mathcal{C}_P.}$
- ▷ $\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que T annule $\mathcal{C}_P$.

  Soient Q, R le quotient et le reste de la division euclidienne de T par P.

  Alors $T = PQ + R$ et $R \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$.

  En particulier $T(\mathcal{C}_P) = P(\mathcal{C}_P)Q(\mathcal{C}_P) + R(\mathcal{C}_P)$ et comme P et T annulent $\mathcal{C}_P$ on en déduit

  $$R(\mathcal{C}_P) = 0_{n,n}.$$

  Avec $R = \sum_{k=0}^{n-1} r_k X^k \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ on a donc

  $$\sum_{k=0}^{n-1} r_k \mathcal{C}_P^k = 0_{n,n}$$

  et en particulier

  $$\sum_{k=0}^{n-1} r_k \mathcal{C}_P^k E_1 = 0_n$$

  c'est à dire

  $$\sum_{k=0}^{n-1} r_k E_{k+1} = 0_n.$$

  D'où (en considérant chaque coordonnées)

  $$\forall j \in [\![1, n]\!], r_{j-1} = 0.$$

  Donc $R = 0$.

  Le reste étant nul on a bien $\boxed{P \text{ divise } T}$.

En particulier on a

$$\boxed{\forall T \in \mathbb{K}[X], \deg(T) < n \Rightarrow T(\mathcal{C}_P) \neq 0_n}.$$

Chapitre 11

Arithmétique

Énoncés 304
Petits calculs de restes de lycée 304
Applications des valuations p-adiques 305
Fonctions arithmétiques 307
Quelques nombres remarquables 308
Autour de la division euclidienne et de l'algorithme d'Euclide 310
Factorielles et coefficients binomiaux 312
PGCD et PPCM 314
Congruences 317
Un zeste de polynômes 318
Outils avancés 319
Équations diophantiennes: le cas linéaire 322
Équations diophantiennes: méthodes "réelles« et majoration 322
Équations diophantiennes: réduction modulo n 324
Encore des équations diophantiennes 325
Un peu d'informatique 327
En vrac 329
Indications 331
Solutions 345

Énoncés

Petits calculs de restes de lycée

Exercice 1 (◔☆ Premier petit calcul)
Calculer le reste de la division euclidienne de $2025^{2026^{2027}}$ par 19.

Indication p. 331 · Solution p. 345

Exercice 2 (◔☆ Un peu de repunit)
Soit $a \in \mathbb{N}^*$ un entier premier avec 10.

Montrer qu'il existe un multiple de a dont l'écriture en base 10 ne contient que des 1.

Indication p. 331 · Solution p. 345

Exercice 3 (◔☆ Encore des repunits en base 10)
Montrer qu'excepté 1 il n'existe pas de carré dont l'écriture en base 10 ne contienne que des 1.

Indication p. 331 · Solution p. 345

Exercice 4 (◔★ Critères de divisibilité)
Soit $n \in \mathbb{N}$ et $c_0, c_1, ..., c_r$ les chiffres de l'écriture en base 10 de n.

1. Montrer que n est divisible par 3 ssi $\sum_{k=0}^{r} c_k$ est divisible par 3.
2. Montrer que n est divisible par 11 ssi $\sum_{k=0}^{r} (-1)^k c_k$ est divisible par 11.
3. Déterminer un critère similaire pour la divisibilité par 7.
4. Soit $a \in \mathbb{N}$ premier avec 10.

   Montrer qu'il existe une suite $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ périodique et indépendante de n telle que n est divisible par a ssi $\sum_{k=0}^{r} \alpha_k c_k$ est divisible par a.

Indication p. 331 · Solution p. 346

Exercice 5 (◔☆ Encore un petit calcul)
Montrer que la somme des cubes de trois nombres consécutifs est toujours divisible par 9.

Indication p. 331 · Solution p. 348

Exercice 6 (◔☆ Juste faire un tableau)
Soit $n \in \mathbb{Z}$ qui n'est divisible ni par 2 ni par 3.

Montrer que 24 divise $n^2 - 1$.

Indication p. 331 · Solution p. 348

Exercice 7 (◔☆ Encore des tableaux peu passionnants)

1. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Montrer que parmi n, $n+10$ et $n+14$ exactement un des nombres est divisible par 3.
2. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Montrer que parmi n, $2n+1$, et $4n+1$ exactement un des nombres est divisible par 3.
3. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Montrer que parmi n, $4n^2+1$ et $6n^2+1$ exactement un des nombres est divisible par 5.

Indication p. 331 · Solution p. 348

Exercice 8 (◔☆ Des trous aussi grands que l'on veut)
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe n entiers consécutifs qui ne sont pas premiers.

Indication p. 332 · Solution p. 349

Exercice 9 (◑☆ Somme des chiffres itérée)
On note pour tout entier $n \in N$, $s_{10}(n)$ la somme des chiffres de l'écriture décimale de n.

Déterminer $s_{10}(s_{10}(s_{10}(s_{10}(s_{10}(2^{2026})))))$.

Indication p. 332 · Solution p. 349

Applications des valuations p-adiques

Exercice 10 (◔★ Caractérisation des racines r-ièmes)
Soit $r \in \mathbb{N}^*$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Montrer que

$$\exists x \in \mathbb{N}, x^r = n \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{Q}, x^r = n.$$

Indication p. 332

Exercice 11 (◔★ Divisibilité et puissances)
Soit $r \in \mathbb{N}^*$.

1. Soit $a \in \mathbb{N}$ et p un nombre premier.

Montrer l'équivalence

$$p \mid a \Leftrightarrow p \mid a^r \Leftrightarrow p^r \mid a^r.$$

2. Soient $a, b \in \mathbb{N}$ deux entiers.

Montrer l'équivalence

$$a \mid b \Leftrightarrow a^r \mid b^r.$$

Indication p. 332

Exercice 12 (◔★ Irrationnalité et logarithme)
Soient a et b deux entiers supérieurs à 2, et premiers entre eux.

Montrer que

$$\frac{\ln(a)}{\ln(b)} \notin \mathbb{Q}.$$

Indication p. 332

Exercice 13 (◔☆ Passage à la limite)
Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$.

On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a^n \mid b^{n+2025}$.

Montrer que $a \mid b$.

Indication p. 332 · Solution p. 350

Exercice 14 (◔☆ Puissances multiples)
Soit $a \in \mathbb{N}$.

Soient $r_1, r_2 \in \mathbb{N}^*$. On suppose qu'il existe $b_1 \in \mathbb{N}$ tel que $a = b_1^{r_1}$ et $b_2 \in \mathbb{N}$ tel que $a = b_2^{r_2}$.

Montrer qu'il existe $b \in \mathbb{N}$ tel que $a = b^{r_1 \vee r_2}$.

Indication p. 332 · Solution p. 350

Exercice 15 (◔☆ Encore une caractérisation des puissances)
Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux tels que ab est un carré.

Montrer que a et b sont des carrés.

Indication p. 332 · Solution p. 351

Exercice 16 (◑★ Majoration de valuation et combinatoire)
Soient $p_1, ..., p_r$ des nombres premiers distincts.

On note A l'ensemble des entiers dont les seuls facteurs premiers sont dans $\{p_1, ..., p_r\}$.

Montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$,

$$|A \cap [\![1, N]\!]| \leq \left(1 + \frac{\ln(N)}{\ln(2)}\right)^r.$$

En déduire une nouvelle preuve de l'existence d'une infinité de nombres premiers.

Indication p. 333

Fonctions arithmétiques

Exercice 17 (◑★♠ Somme de puissances de diviseurs ou décomposition des sigmas)
Pour tout $s \in \mathbb{R}$ on note

$$\begin{aligned} \sigma_s : \mathbb{N}^* &\to \mathbb{R}_+ \\ n &\mapsto \sum_{d|n} d^s. \end{aligned}$$

Par exemple, pour tout entier n, $\sigma_0(n)$ est le nombre de diviseurs de n tandis que $\sigma_1(n)$ est la somme des diviseurs de n.

1. Montrer que pour tous n et m **premiers entre eux**, pour tout $s \in \mathbb{R}$,
$$\sigma_s(nm) = \sigma_s(n)\sigma_s(m).$$
2. Soit $p \in \mathcal{P}$ et $k \in \mathbb{N}$. Exprimer pour tout $s \in \mathbb{R}$, $\sigma_s\left(p^k\right)$ en fonction de p, k et s.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que
   - ▷ si $s = 0$ alors
   $$\sigma_0(n) = \prod_{p \in \mathcal{P}} \left(\nu_p(n) + 1\right)$$
   - ▷ si $s \neq 0$ alors
   $$\sigma_s(n) = \prod_{p \in \mathcal{P}} \frac{p^{(\nu_p(n)+1)s} - 1}{p^s - 1}$$

Indication p. 333 · Solution p. 351

Exercice 18 (◔★ Caractérisation des carrés par le nombre de diviseurs)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Montrer que n est un carré ssi $\sigma_0(n)$ est impair.

Indication p. 333

Exercice 19 (◑☆ Diviseurs et carrés)
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on note $\sigma_0(n)$ le nombre de diviseurs de n.

Montrer que

$$\sum_{d|n} \sigma_0(d^2) = \sigma_0(n)^2.$$

Indication p. 333

Quelques nombres remarquables

Exercice 20 (◔★▯ Un peu d'arithmétique des suites de Fibonacci)
On définit une suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$F_0 = 0$$
$$F_1 = 1$$
$$\forall n \in \mathbb{N}, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

1. ▯ Écrire en Python une fonction `fibo` prenant en argument un entier $n \in \mathbb{N}$ et renvoyant F_n. La complexité devra être linéaire en n.

   Expliquer très brièvement pourquoi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, F_{n+1} \wedge F_n = 1.$$

(Pour d'autres exercices sur la suite de Fibonacci regarder par exemple les exercices 30 et 83.)

Indication p. 333 · Solution p. 353

Exercice 21 (◔★▯ Nombres de Mersenne)
Soient $a \geq 2$ et $n \geq 2$ des entiers.

1. Montrer que **si** $a^n - 1$ est premier **alors** $a = 2$ et n est premier.
2. ▯ Que dire de la réciproque ?

Indication p. 333 · Solution p. 354

Exercice 22 (◑★▫ Nombres de Fermat)

1. Soit $b \in \mathbb{N}^*$.

Montrer que **si** $2^b + 1$ est premier **alors** il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $b = 2^n$.

Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $F_n = 2^{2^n} + 1$.

1. ▫ Étudier la primalité de F_n pour $n \in [\![0, 6]\!]$.

2. Montrer que

$$\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2, n \neq m, F_n \wedge F_m = 1.$$

3. En déduire une nouvelle preuve de l'existence d'une infinité de nombres premiers.

Indication p. 333 · Solution p. 355

Exercice 23 (◔☆▫ Nombres de Carmichael)

Soit $n \geq 2$ un entier. On dit que n est un nombre de Carmichael ssi n est non-premier et pour tout $a \in [\![1, n-1]\!]$ premier avec n, $a^{n-1} \equiv 1[n]$.

1. Commenter l'appellation «pseudo-premier» utilisée parfois pour les nombres de Carmichael.

2. ▫ Écrire une fonction python prenant en argument un entier $n \geq 2$ et renvoyant la valeur de vérité de «n est un nombre de Carmichael».

Indication p. 333

Exercice 24 (◕☆▫ Nombres parfaits)

Un entier $n \in \mathbb{N}^*$ est dit *parfait* ssi il est égal à la somme de ses diviseurs stricts c'est à dire avec les notations de la question 17 ssi $\sigma_1(n) = 2n$.

1. ▫ Déterminer tous les nombres parfaits entre 1 et 10000.

2. Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $2^p - 1$ est premier (cf exercice 21).

Montrer que $2^{p-1}(2^p - 1)$ est parfait.

3. Soit n un nombre parfait pair.

Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $2^p - 1$ est premier et $n = 2^{p-1}(2^p - 1)$.

Indication p. 334

Exercice 25 (◔★ Infinité de nombres premiers dans certaines progressions arithmétiques I)

1. Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers congrus à 3 modulo 4.

2. Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers congrus à 5 modulo 6.

Indication p. 334 · Solution p. 357

Exercice 26 (◑★ Infinité de nombres premiers dans certaines progressions arithmétiques II)
Soit p un nombre premier impair.

Montrer que -1 est un carré modulo p ssi $p \equiv 1[4]$.

En déduire qu'il existe une infinité de nombres premiers congrus à 1 modulo 4.

Indication p. 334 · Solution p. 358

Autour de la division euclidienne et de l'algorithme d'Euclide

Exercice 27 (◔★ Un exemple de suite à divisibilité)
Soit $a \in \mathbb{N}$ tel que $a \geq 2$.

On définit

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\to \mathbb{N} \\ n &\mapsto a^n - 1 \end{aligned}$$

1. Montrer que

$$f : (\mathbb{N}, |) \to (\mathbb{N}, |)$$

est croissante, c'est à dire que

$$\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2, m \mid n \Rightarrow f(m) \mid f(n).$$

2. Soit $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ et $(q, r) \in \mathbb{N}^2$ tels que $n = mq + r$.

Montrer que

$$(a^n - 1) \wedge (a^m - 1) = (a^m - 1) \wedge (a^r - 1).$$

3. On munit $\mathbb{N}$ de l'opération $\wedge$.

Montrer que

$$f : (\mathbb{N}, \wedge) \to (\mathbb{N}, \wedge)$$

est un morphisme de monoïde c'est à dire que $f(0) = 0$ et

$$\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2, f(n \wedge m) = f(n) \wedge f(m).$$

Indication p. 334 · Solution p. 358

Exercice 28 (◑☆ XKCD 2835 - Décomposition en base factorielle)
Soit $n \in \mathbb{N}$.

Montrer qu'il existe une et unique suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ nulle à partir d'un certain rang telle que

$$n = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k k!$$

et

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, a_k \in [\![0, k]\!]$$

Indication p. 334

Exercice 29 (◔★ Décomposition en fractions simples)
Soient $r \in \mathbb{N}^*$ et $(a_1, ..., a_r) \in (\mathbb{N}^*)^r$ des entiers deux à deux premiers entre eux. Soit b un entier.

Montrer qu'il existe $m \in \mathbb{Z}$ et $(x_1, ..., x_r) \in \mathbb{Z}^r$ tels que

$$\frac{b}{\prod_{k=1}^{r} a_k} = m + \sum_{k=1}^{r} \frac{x_k}{a_k}$$

et

$$\forall k \in [\![1, r]\!], \quad 0 \leq x_k \leq a_k - 1.$$

Commenter.

Indication p. 335

Exercice 30 (◑★ Encore de l'arithmétique des suites de Fibonacci)
On définit la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ comme à l'exercice 20.

1. Montrer que

$$\forall p \geq 1, \forall n \in \mathbb{N}, F_{n+p} = F_p F_{n+1} + F_{p-1} F_n.$$

2. Montrer que

$$\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2, F_n \wedge F_m = F_{n\wedge m}.$$

Indication p. 335 · Solution p. 360

Exercice 31 (◕☆ Pleins de premiers entre eux)
Soient α, β deux entiers naturels non nuls premiers entre eux.

Soient n et m deux entiers naturels non nuls premiers entre eux.

- Si n et m sont impairs alors $(\alpha^n + \beta^n) \wedge (\alpha^m + \beta^m) = \alpha + \beta$,
- Sinon,
  - Si α et β sont impairs alors $(\alpha^n + \beta^n) \wedge (\alpha^m + \beta^m) = 2$
  - Sinon $(\alpha^n + \beta^n) \wedge (\alpha^m + \beta^m) = 1$.

Indication p. 335

Exercice 32 (◑☆ Une division euclidienne cachée)
Existe-t-il des $a, b \in \mathbb{N}$ tels que $2^a - 1 \mid 2^b + 1$ et $a > 1$. Si oui, les déterminer.

Indication p. 335

Exercice 33 (◕★ Suite récurrente et Euclide simultané)
Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ (c'est à dire un polynôme à coefficients entiers).

On définit une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$a_0 = 0$$
$$\forall k \in \mathbb{N}, a_{k+1} = P(a_k).$$

Montrer que pour tout $(n, m) \in \mathbb{N}^2$,

$$a_n \wedge a_m = |a_{n\wedge m}|.$$

Indication p. 335

Factorielles et coefficients binomiaux

Exercice 34 (◔★♠ Formule de Legendre)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et p un nombre premier.

Montrer que

$$\nu_p(n!) = \sum_{k=1}^{\left\lfloor \frac{\ln(n)}{\ln(p)} \right\rfloor} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor.$$

Indication p. 336

Exercice 35 (◔☆ Application directe de Legendre)
Par combien de zéros se termine l'écriture décimale de 2025! ?

Indication p. 336

Exercice 36 (◔☆ Un petit coefficient multinomial)
Soient n et m deux entiers naturels. Montrer que

$$\frac{(2n)!\,(2m)!}{n!\,m!\,(n+m)!}$$

est entier.

Indication p. 336

Exercice 37 (◔★♠ Divisibilité des coefficients binomiaux)
Soit p un nombre premier. Montrer que

$$\forall k \in [\![1, p-1]\!],\ p \mid \binom{p}{k}.$$

Indication p. 336

Exercice 38 (◔☆ Encore des coefficients binomiaux)
Soit p un nombre premier.

Montrer que

$$\forall k \in [\![0, p-1]\!], \binom{p-1}{k} \equiv (-1)^k [p].$$

Indication p. 336

Exercice 39 (◔★♠ Formule de Wilson)
Soit $n \geq 2$ un entier.

1. Si $n = p$ est premier alors $(p-1)! \equiv -1[p]$.
2. Si $n > 4$ est composé alors $(n-1)! \equiv 0[n]$.

Indication p. 336 · Solution p. 362

Exercice 40 (◕★▯ Wolstenholme)
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose

$$H_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \in \mathbb{Q}$$
$$C_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2} \in \mathbb{Q}$$

et on note

$$H_n = \frac{a_n}{b_n}, (a_n, b_n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*, a_n \wedge b_n = 1$$
$$C_n = \frac{c_n}{d_n}, (c_n, d_n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*, c_n \wedge d_n = 1$$

les représentations comme fractions irréductibles de H_n et C_n.

1. ▯ Déterminer le reste de la division euclidienne de a_p par p^2 pour tout nombre premier $p \in [\![2, 100]\!]$.

   Conjecturer un résultat.
2. ▯ Déterminer le reste de la division euclidienne de c_p par p pour tout nombre premier $p \in [\![2, 100]\!]$.

   Conjecturer un résultat.
3. Démontrer les résultats conjecturés.

Indication p. 336

PGCD et PPCM

Exercice 41 (◔★ Équations en PGCD et PPCM)
Déterminer l'ensemble des solutions de

$$\begin{cases} x \wedge y = 3 \\ x \vee y = 135 \end{cases}$$

d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{N}^2$.

Indication p. 337

Exercice 42 (◑★ Équations en PGCD et PPCM: cas général)
Soient $a, b \in \mathbb{N}$. Déterminer l'ensemble des solutions de

$$\begin{cases} x \wedge y = a \\ x \vee y = b \end{cases}$$

d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{N}^2$.

Indication p. 337

Exercice 43 (◔★ Théorème de structure des couples de Bézout)
Soient a et b deux entiers non tous deux nuls. On pose $\tilde{a} = \frac{a}{a \wedge b}$ et $\tilde{b} = \frac{b}{a \wedge b}$.

Soit $n \in \mathbb{Z}$. On considère l'équation

$$au + bv = n \tag{1}$$

d'inconnue $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$.

1. Pour $n = 0$ montrer que l'ensemble des solutions de l'équation «homogène» est
$$\mathbb{Z}(\tilde{b}, -\tilde{a}) = \{(k\tilde{b}, -k\tilde{a}), k \in \mathbb{Z}\}.$$
2. Montrer que (1) admet une solution ssi $n \in (a \wedge b)\mathbb{Z}$.
3. Dans le cas où $n \in (a \wedge b)\mathbb{Z}$, on note (u_0, v_0) une solution particulière de (1).

   Montrer que l'ensemble des solutions de (1) est
$$\{(u_0 + k\tilde{b}, v_0 - k\tilde{a}), k \in \mathbb{Z}\}.$$
4. Commenter.

Indication p. 337

Exercice 44 (◔★ Couple de Bézout sous contrainte)
Soient a et b deux entiers tels que $b \neq 0$.

Montrer que pour tout n divisible par $a \wedge b$, il existe $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que

$$\begin{cases} au + bv = n \\ 0 \leq u \leq |b| - 1 \end{cases}.$$

Indication p. 337

Exercice 45 (◔★♣ Quelques règles de calcul)
Soit $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$.

1. Montrer que

$$(a \wedge b)(a \vee b) = |ab|.$$

2. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{Z}$,

$$(ka) \wedge (kb) = |k|(a \wedge b)$$
$$(ka) \vee (kb) = |k|(a \vee b)$$

3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a^n \wedge b^n = (a \wedge b)^n$$
$$a^n \vee b^n = (a \vee b)^n$$

Indication p. 337

Exercice 46 (◔★♠ Distributivité)
Soit $(a,b,c) \in \mathbb{Z}^3$.

Montrer que

$$(a \wedge b) \vee c = (a \vee c) \wedge (b \vee c)$$

et

$$(a \vee b) \wedge c = (a \wedge c) \vee (b \wedge c).$$

Indication p. 337

Exercice 47 (◑☆ Toujours la même idée)
Soit $(a,b,c) \in (\mathbb{Z}^*)^3$.

Montrer que

$$\frac{(a \wedge b \wedge c)^2}{(a \wedge b)(b \wedge c)(c \wedge a)} = \frac{(a \vee b \vee c)^2}{(a \vee b)(b \vee c)(c \vee a)}$$

Indication p. 337

Exercice 48 (◑☆ Encore des règles de calculs peu utiles)
Soient $a, b, c \in \mathbb{Z}$ tels que $a \wedge b = 1$.

Montrer que

$$a \wedge (bc) = a \wedge c.$$

Indication p. 337

Congruences

Exercice 49 (◑★♠ Théorème des restes chinois)
Soient $(n_1, n_2) \in (\mathbb{N}^*)^2$ premiers entre eux.

Montrer que pour tout $(y_1, y_2) \in \mathbb{Z}^2$ le système

$$\begin{cases} x \equiv y_1 [n_1] \\ x \equiv y_2 [n_2] \end{cases}$$

admet une solution, et que cette solution est unique modulo $n_1 n_2$.

Indication p. 337

Exercice 50 (◔★ Formulation par les racines n-ièmes)
Soient a et b deux entiers strictement positifs.

1. Montrer que

$$a|b \Leftrightarrow \mathbb{U}_a \subset \mathbb{U}_b.$$

2. Montrer que

$$\mathbb{U}_a \cap \mathbb{U}_b = \mathbb{U}_{a \wedge b}.$$

3. Montrer que

$$\{z_1 \times z_2, (z_1, z_2) \in \mathbb{U}_a \times \mathbb{U}_b\} = \mathbb{U}_{a \vee b}.$$

Indication p. 338

Exercice 51 (◑★♠ Résidus quadratiques)
Soit p un nombre premier différent de 2.

Soit $a \in \mathbb{Z}$. On dit que a est un *résidu quadratique modulo* p ssi il existe $b \in \mathbb{Z}$ tel que $b^2 \equiv a[p]$.

Montrer que pour tout $a \not\equiv 0[p]$, on a

$$a \text{ est un résidu quadratique modulo } p \Leftrightarrow a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1[p].$$

Indication p. 338

Exercice 52 (◔★ RSA)
Soient p et q deux nombres premiers distincts.

Soient e et d deux entiers naturels tels que

$$ed \equiv 1[(p-1)(q-1)].$$

Montrer que pour tout entier M on a

$$(M^e)^d \equiv M[pq].$$

Solution p. 363

Exercice 53 (◑★ Théorème des restes chinois: version isomorphisme d'anneau)
Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on rappelle que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est l'ensemble des classes d'équivalence modulo n que l'on peut munir de $+$ et $\times$ formant ainsi un anneau commutatif.

Soient $r \in \mathbb{N}^*$ et $n_1, ..., n_r \in \mathbb{N}^*$ deux à deux premiers entre eux. Montrer que les anneaux $\mathbb{Z}/(n_1 n_2 \cdots n_r)\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n_2\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/n_r\mathbb{Z}$ sont isomorphes.

Indication p. 338

Un zeste de polynômes

On note $\mathbb{Z}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients entiers.

Exercice 54 (◔★♠ Bernoulli)
Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$.

Montrer que

$$\forall (a,b) \in \mathbb{Z}^2, b-a \mid P(b) - P(a).$$

Indication p. 338

Exercice 55 (◔★ Évidemment pas de formule simple)
Déterminer l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{Z}[X]$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, P(n) \text{ est premier.}$$

Indication p. 338

Exercice 56 (◔★♠ Petit critère d'Eisenstein)
Soit

$$P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{Z}[X]$$

un polynôme à coefficients entiers.

Soit $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que $p \wedge q = 1$.

Montrer que

$$P\left(\frac{p}{q}\right) = 0 \Rightarrow (p \mid a_0 \text{ et } q \mid a_n).$$

Indication p. 338

Outils avancés

Exercice 57 (◑★ Convolution de Dirichlet)
On définit l'ensemble des fonctions arithmétiques par $A = \mathcal{F}(\mathbb{N}^*, \mathbb{C})$.

Pour $f, g \in A$ on définit leur convolution de Dirichlet $f * g$ par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, (f * g)(n) = \sum_{d|n} f(d) g\left(\frac{n}{d}\right).$$

Montrer que $(A, +, *)$ est un anneau commutatif.

Indication p. 339

Exercice 58 (◔☆ LTE light)
Soit $n \in \mathbb{N}$ et $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que $n \mid a - b$.

Montrer que $n^2 \mid a^n - b^n$.

Indication p. 339

Exercice 59 (◕★ LTE)
Soit p un nombre premier différent de 2, x, y deux entiers tels que $x \neq \pm y$. On suppose de plus $\nu_p(x) = 0$, $\nu_p(y) = 0$ et $\nu_p(x-y) > 0$.

On cherche à démontrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$

$$\nu_p(x^n - y^n) = \nu_p(x-y) + \nu_p(n) \tag{1}$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\nu_p(n) = 0$.

Montrer que pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$,

$$x^k y^{n-1-k} \equiv y^{n-1} [p].$$

En déduire l'égalité (1).

2. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\nu_p(n) = 1$.

Montrer que pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$,

$$x^k y^{n-1-k} \equiv y^{n-1} + k(x-y)y^{n-2} [p^2].$$

En déduire l'égalité (1).

3. Soit $n \in \mathbb{N}$.

Montrer l'égalité (1).

Indication p. 339

Exercice 60 (◕★ Formule d'inversion de Moebius)
On définit une fonction $\mu : \mathbb{N}^* \to \mathbb{Z}$ par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \mu(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ admet un carré dans sa décomposition en facteurs premiers.} \\ (-1)^d & \text{si } n \text{ est produit de } d \text{ nombres premiers distincts.} \end{cases}$$

Autrement dit, pour $n \in \mathbb{N}^*$ en notant $\mathcal{P}_n = \{p \in \mathcal{P} \mid \nu_p(n) > 0\}$ l'ensemble des diviseurs premiers de n, on a $\mu(n) = 0$ si il existe $p \in \mathcal{P}_n$ tel que $\nu_p(n) \geq 2$, et $(-1)^{|\mathcal{P}_n|}$ sinon.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\prod_{p \in \mathcal{P}_n} (1-1)$.

En déduire que

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

2. Montrer que la fonction μ est multiplicative, c'est à dire que pour tous $n, m \in \mathbb{N}^*$ tels que $n \wedge m = 1$, on a $\mu(mn) = \mu(m)\mu(n)$.

3. Soit $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{C}$.

On définit la fonction $g : \mathbb{N}^* \to \mathbb{C}$ par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, g(n) = \sum_{d|n} f(d).$$

Montrer la formule d'inversion de Moebius:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, f(n) = \sum_{d|n} \mu(d) g\left(\frac{n}{d}\right).$$

Indication p. 339

Exercice 61 (◕★ Division euclidienne dans les entiers de Gauss)
On rappelle que $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi, (a,b) \in \mathbb{Z}^2\}$ est un sous-anneau de $\mathbb{C}$.

Soit $(a,b) \in \mathbb{Z}[i]^2$ tel que $b \neq 0$.

Montrer qu'il existe $(q,r) \in \mathbb{Z}[i] \times \mathbb{Z}[i]$ tels que

$$a = bq + r$$
$$|r|^2 < |b|^2$$

Indication p. 339 · Solution p. 364

Équations diophantiennes: le cas linéaire

Exercice 62 (◔★♣ Détermination explicite des couples de Bézout)
Soient a et b premiers entre eux et $n \in \mathbb{N}$. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation

$$ax + by = n$$

d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$.

Indication p. 340

Exercice 63 (◔★ Un cas particulier de Bézout positif)
Déterminer l'ensemble des $n \in \mathbb{N}$ tels que l'équation

$$5x + 2y = n$$

admette au moins une solution avec x et y des entiers **positifs**.

Indication p. 340

Exercice 64 (◑★ Cas général)
Soient a et b deux entiers naturels premiers entre eux.

1. Montrer que pour tout $n \geq ab - a - b + 1$ l'équation

   $$ax + by = n$$

   admet au moins une solution $(x, y) \in \mathbb{N}^2$.
2. Montrer que pour $n = ab - a - b$ l'équation

   $$ax + by = n$$

   n'admet pas de solution avec $(x, y) \in \mathbb{N}^2$.

Équations diophantiennes: méthodes "réelles« et majoration

Exercice 65 (◔☆ Pourquoi réfléchir quand on peut trinomer)
Déterminer les entiers n tels que

$$7n^2 - n^4 = 12.$$

Indication p. 340 · Solution p. 366

Exercice 66 (◑★ Majorations successives)

1. Déterminer les couples $(a,b) \in (\mathbb{N}^*)^2$ solutions de

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1.$$

2. Déterminer les triplets $(a,b,c) \in (\mathbb{N}^*)^3$ solutions de

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1.$$

Indication p. 340 · Solution p. 366

Exercice 67 (◔★ Étude de fonction)

Déterminer tous les entiers strictement positifs a et b tels que

$$a^b = b^a.$$

Indication p. 340 · Solution p. 368

Exercice 68 (◔☆ Une identité de Sophie Germain)

Déterminer l'ensemble des $(n,m) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tels que

$$n^4 + 4m^4$$

est premier.

Indication p. 340

Exercice 69 (◕★ Une question du CG 1990)

Déterminer les entiers $n \in \mathbb{N}^*$ tels que l'équation

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k^2} = 1$$

admette une solution $(x_1, ..., x_n) \in (\mathbb{N}^*)^n$.

Indication p. 340 · Solution p. 370

Exercice 70 (◔☆ Équations en vrac)

1. Déterminer tous les entiers positifs n et m tels que

$$n^4 - m^4 = 42.$$

2. Déterminer l'ensemble des entiers naturels n tels que $5^n + 4$ est un carré.

Indication p. 341 · Solution p. 373

Équations diophantiennes: réduction modulo n

Exercice 71 (◑★ Réduction donc impossibilité)

1. Montrer que l'équation

$$a^2 + b^2 = 2023$$

n'admet pas de solution.

2. Montrer que l'équation

$$a^5 - 2b^2 = 528$$

n'admet pas de solutions.

3. Montrer que l'équation

$$a^5 - 2b^2 = 110007$$

n'admet pas de solutions.

Indication p. 341 · Solution p. 373

Exercice 72 (◔★ Une question du Bac 2003)

Déterminer tous les entiers positifs x, y et z solutions de

$$x^2 + y^2 = 7z^2.$$

Indication p. 341 · Solution p. 375

Exercice 73 (◕★ Lemme d'Hensel)

Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$, $p \in \mathcal{P}$ un nombre premier.

Soit $a \in \mathbb{Z}$ tel que $P(a) \equiv 0[p]$ et $P'(a) \not\equiv 0[p]$ (c'est à dire une racine simple modulo p).

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe un entier $x \in \mathbb{Z}$ tel que $x \equiv a[p]$ et $P(x) \equiv 0[p^n]$.

Indication p. 341

Exercice 74 (●☆ Un contre-exemple au principe général de réduction modulaire)
On considère le polynôme

$$P = (X^2 - 2)(X^2 - 17)(X^2 - 34)$$

Montrer que P n'admet pas de racine entière mais que pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $a \in \mathbb{Z}$ tel que $P(a) \equiv 0[n]$.

Indication p. 341

Encore des équations diophantiennes

Exercice 75 (◑★ Paramétrisation des triplets pythagoriciens)
On appelle *triplet pythagoricien* tout triplet $(a, b, c) \in (\mathbb{N}^*)^3$ tel que

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Montrer que, à l'échange de a et b près, l'ensemble des triplets pythagoriciens est

$$\Big\{(k(m^2 - n^2), 2kmn, k(m^2 + n^2)), (k, m, n) \in (\mathbb{N}^*)^3, m > n\Big\}.$$

Indication p. 341

Exercice 76 (◔☆ Petite translation)
Soit p un nombre premier.

Montrer que l'équation

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{p}$$

d'inconnue $(a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2$ admet exactement 3 solutions.

Indication p. 342

Exercice 77 (◔☆ Petite puissance de 2)
Déterminer l'ensemble des entiers positifs a et b tels que

$$3^a = 2^b + 1.$$

Indication p. 342

Exercice 78 (◔☆ Petite division)
Déterminer l'ensemble des entiers positifs a et b tels que

$$a^2 + b^2 = (ab)^2.$$

Indication p. 342

Exercice 79 (◑☆ Encore des majorations)
Déterminer tous les entiers $n \in \mathbb{N}$ tels que $2^n \mid 3^n - 1$.

Indication p. 342

Exercice 80 (◉☆ L'exemple le plus connu de «saut de Viète»)

1. Pour $k \in \mathbb{N}$ on note E_k l'équation

$$x^2 - kxy + y^2 = k$$

d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{N}^2$.

Soit $(a, b) \in \mathbb{N}^2$. Montrer que si (a, b) est solution de E_k alors $\left(b, \frac{b^2-k}{a}\right)$ est aussi solution de E_k.

2. Soient $a, b \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$\frac{a^2+b^2}{ab+1} \text{ est entier } \implies \frac{(a^2+b^2)}{ab+1} \text{ est un carré parfait}$$

.

Indication p. 342

Un peu d'informatique

Exercice 81 (◑★□ Crible mystère I)
On considère la fonction `mystere1` suivante

```python
def mystere1(N):
    """Fonction mystere et donc sans documentation…"""
    lp = []  # Nom peu expressif, à éviter
    ppdp = [i for i in range(N + 1)]  # Nom peu expressif, à éviter
    i = 2
    while i <= N:
        if ppdp[i] == i:
            lp.append(i)
        j = 0
        while j < len(lp) and lp[j] <= ppdp[i] and i * lp[j] <= N:
            ppdp[i * lp[j]] = lp[j]
            j = j + 1
        i = i + 1
    return lp, ppdp

```

1. Étant donné un entier $N \geq 2$ que renvoie `mystere1`(N) ?
2. Déterminer en fonction de N la complexité de la fonction.
3. Commenter.

Indication p. 342 · Solution p. 376

Exercice 82 (◑☆□ Crible mystère II)
On considère la fonction `mystere2` suivante

```python
def mystere2(N):
    """Fonction mystere et donc sans documentation…"""
    lp = []  # Nom peu expressif, à éviter
    pgdp = [i for i in range(N + 1)]  # Nom peu expressif, à éviter
    i = 2
    while i <= N:
        if pgdp[i] == i:
            lp.append(i)
            k = 1
            while i * k <= N:
                pgdp[i * k] = i
                k = k + 1
        i = i + 1
    return lp, pgdp

```

1. Étant donné un entier $N \geq 2$ que renvoie `mystere2`(N) ?
2. Déterminer en fonction de N la complexité de la fonction.

Indication p. 342 · Solution p. 378

Exercice 83 (◔★▫ Complexité de l'algorithme d'Euclide)

1. Rappeler l'algorithme d'Euclide pour le calcul du pgcd de deux entiers naturels.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$ on note F_n le n-ième nombre de Fibonacci (cf exercice 20).

   Déterminer la complexité (en fonction de n) du calcul de $F_{n+1} \wedge F_n$ par algorithme d'Euclide.
3. Commenter.

Indication p. 342

Exercice 84 (◔☆▫ Autour du Projet Euler 37)

Une suite finie de chiffres (en base 10) $c_1, c_2, ..., c_r$ est dite première par troncature à droite ssi pour tout $j \in [\![1, r]\!]$ le nombre $\overline{c_1 c_2 \cdots c_j}$ est premier.

Par exemple la suite de chiffres $7, 1, 9, 3, 3, 3$ est une suite première par troncature à droite car

- ▹ 7 est premier,
- ▹ 71 est premier,
- ▹ 719 est premier,
- ▹ 7193 est premier,
- ▹ 71933 est premier,
- ▹ 719333 est premier.
- ▹ (mais pour tout $c \in [\![0, 9]\!]$, $719333c$ n'est pas premier.)

Montrer qu'il n'existe qu'un nombre fini de suites de chiffres premières par troncature à droite.

Il est conseillé de s'aider des résultats d'un programme python.

Indication p. 343

Exercice 85 (◑☆▫ Projet Euler 72)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on note $f(n)$ le nombre de fractions irréductibles strictement comprises entre 0 et 1 et de dénominateur inférieur ou égal à n.

Par exemple les fractions irréductibles dans $]0, 1[$ et de dénominateur inférieur ou égal à 8 sont $\frac{1}{8}, \frac{1}{7}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{2}{7}, \frac{1}{3}, \frac{3}{8}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{1}{2}, \frac{4}{7}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{2}{3}, \frac{5}{7}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \frac{7}{8}$ et donc $f(8) = 21$.

1. Écrire une fonction Python prenant en argument un entier n et renvoyant $f(n)$. La complexité devra être au plus en $O(n^2 \ln(n))$.
2. Écrire une fonction Python prenant en argument un entier n et renvoyant $f(n)$. La complexité devra être au plus en $O\left(n^{\frac{3}{2}}\right)$.

En vrac

Exercice 86 (◔★ De l'art de choisir ses tiroirs)
Soit $n \in \mathbb{N}$ et $(a_1, ..., a_{n+1}) \in [\![1, 2n]\!]^{n+1}$ deux à deux distincts.

1. Montrer qu'il existe $i, j \in [\![1, n+1]\!]$ distincts tels que $a_i \wedge a_j = 1$.
2. Montrer qu'il existe $i, j \in [\![1, n+1]\!]$ distincts tels que $a_i \mid a_j$.

Indication p. 343

Exercice 87 (◑★ Somme des puissances modulo p)
Soit p un nombre premier et $m \in \mathbb{N}$.

Montrer que **si** $m \not\equiv 0[p-1]$ alors

$$\sum_{k=0}^{p-1} k^m \equiv 0[p].$$

Indication p. 343

Exercice 88 (◔☆ Juste parité et moyenne)
Existe-t-il deux nombres premiers *consécutifs* dont la somme est le produit d'exactement deux nombres premiers ?

Indication p. 343

Exercice 89 (◔☆ Bernoulli itéré)
Montrer que pour tout entier $n \geq 1$ et tout entier a impair on a

$$a^{2^n} \equiv 1[2^{n+2}].$$

Indication p. 343 · Solution p. 378

Exercice 90 (◕☆ Travailler puis plein de disjonctions de cas)
Déterminer tous les entiers strictement positifs a, b, c tels que

$$a \mid bc - 1$$
$$b \mid ac - 1$$
$$c \mid ab - 1.$$

Indication p. 343

Exercice 91 (◕☆ P1 2017)
Soit $a_0 \in \mathbb{N}$.

On considère la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$a_0 = a_0$$
$$\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = \begin{cases} \sqrt{a_n} & \text{si } a_n \text{ est un carré parfait} \\ a_n + 3 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Expliciter une partition (P, I) de $\mathbb{N}$ telle que
- ▷ Si $a_0 \in P$ alors $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est périodique à partir d'un certain rang.
- ▷ Si $a_0 \in I$ alors $a_n \sim 3n$ lorsque $n \to +\infty$ (c'est à dire $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{n} = 3$).

Indication p. 343

Indications

Indication 1 · Énoncé p. 304 (Premier petit calcul)
Remarquer que pour tous a, b entiers la suite des restes de la division euclidienne de a^n par b est périodique (à partir d'un certain rang).

Solution p. 345

Indication 2 · Énoncé p. 304 (Un peu de repunit)
Avec $r_n = \underbrace{111\cdots111}_{n \text{ fois}}$ on montre par tiroirs qu'il existe (n, m) tel que $r_n - r_m$ divisible par a.

Solution p. 345

Indication 3 · Énoncé p. 304 (Encore des repunits en base 10)
Face à un carré, au cas où, regarder modulo 4.

Solution p. 345

Indication 4 · Énoncé p. 304 (Critères de divisibilité)
Écrire $n = \sum_{k=0}^{r} c_k 10^k$ d'où en particulier $a \mid n$ ssi $\sum_{k=0}^{r} c_k 10^k \equiv 0[a]$.

Comme 10 est inversible modulo a, la suite 10^k est périodique modulo a.

Solution p. 346

Indication 5 · Énoncé p. 304 (Encore un petit calcul)
Développer et factoriser ou bien dresser la table des cubes modulo 9.

Solution p. 348

Indication 6 · Énoncé p. 305 (Juste faire un tableau)
Juste faire un tableau de congruence.

Solution p. 348

Indication 7 · Énoncé p. 305 (Encore des tableaux peu passionnants)
Juste faire des tableaux de congruences.

Solution p. 348

Indication 8 · Énoncé p. 305 (Des trous aussi grands que l'on veut)
Les construire, par exemple avec des factorielles.

Solution p. 349

Indication 9 · Énoncé p. 305 (Somme des chiffres itérée)
D'un point de vue algorithmique remarquer:

- un **invariant**: la congruence modulo 9,
- un **variant**: la «taille», a priori $s_{10}(n)$ est bien plus petit que n.

Solution p. 349

Indication 10 · Énoncé p. 305 (Caractérisation des racines r-ièmes)
Un sens est immédiat.

Dans l'autre sens, remarquer que si $x = \frac{a}{b}$ est une fraction irréductible (où $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$) alors $x^r = n$ ssi $a^r = nb^r$.

Passer aux valuations p-adiques pour un nombre premier p.

Indication 11 · Énoncé p. 306 (Divisibilité et puissances)
Lemme d'Euclide (ou de Gauss).

Ou bien plus simplement valuation p-adique.

Indication 12 · Énoncé p. 306 (Irrationnalité et logarithme)
Passer à l'exponentielle puis aux valuations p-adiques.

Indication 13 · Énoncé p. 306 (Passage à la limite)
Prendre les valuations p-adiques, diviser par n et passer à la limite.

Solution p. 350

Indication 14 · Énoncé p. 306 (Puissances multiples)
Passer aux valuations p-adiques.

Solution p. 350

Indication 15 · Énoncé p. 307 (Encore une caractérisation des puissances)
Une somme est divisible par 2 et l'un des termes vaut 0.

Solution p. 351

Indication 16 · Énoncé p. 307 (Majoration de valuation et combinatoire)
Remarque si $n \leq N$, alors pour tout p premier, $v_p(n) \leq \frac{\ln(N)}{\ln(p)} \leq \frac{\ln(N)}{\ln(2)}$.

Indication 17 · Énoncé p. 307 (Somme de puissances de diviseurs ou décomposition des sigmas)

1. Si n et m sont premiers entre eux alors tout diviseur de nm s'écrit de manière unique comme produit d'un diviseur de n et d'un diviseur de m.

   Écrire la somme sur $\mathcal{D}(nm)$ comme une somme double sur $\mathcal{D}(n) \times \mathcal{D}(m)$.
2. On a $\sigma_s(p^k) = \sum_{j \leq k} (p^j)^s$. Distinguer selon $s = 0$ ou $s \neq 0$.
3. Écrire n comme produit de ses facteurs premiers.

Solution p. 351

Indication 18 · Énoncé p. 308 (Caractérisation des carrés par le nombre de diviseurs)
Utiliser par exemple l'exercice 17.

Indication 19 · Énoncé p. 308 (Diviseurs et carrés)
Commencer par traiter l'exercice 17.

Au choix montrer la propriété pour $n = p^k$ puis utiliser la multiplicativité de σ_0 ou bien utiliser la formule de l'exercice 17 pour $s = 0$.

Indication 20 · Énoncé p. 308 (Un peu d'arithmétique des suites de Fibonacci)

1. Pour le script python travailler sur le couple (F_{n+1}, F_n).

   Par récurrence.
2. Par récurrence et algorithme d'Euclide.

Solution p. 353

Indication 21 · Énoncé p. 308 (Nombres de Mersenne)
Bernoulli.

Solution p. 354

Indication 22 · Énoncé p. 309 (Nombres de Fermat)
Écrire une relation de récurrence de la forme $F_n = \prod_{k=0}^{n-1} F_k + 2$ ou $F_{n+b} = (F_n - 1)^{2^b} + 1$.

Solution p. 355

Indication 23 · Énoncé p. 309 (Nombres de Carmichael)

1. Cf petit théorème de Fermat.
2. Pour vérifier les premiers nombres de Carmichael sont 561, 1105 et 1729..

Indication 24 · Énoncé p. 309 (Nombres parfaits)

1. On obtient 6, 28, 496 et 8128.
2. Utiliser la multiplicativité de σ_1 et le fait que $2^p - 1$ est premier.
3. Écrire $n = 2^{p-1}m$ avec m impair et $p \geq 2$.

   Constater que $(2^p - 1)\sigma_1(m) = 2^p m$.

   Par Gauss il existe q tel que $m = q(2^p - 1)$.

   Il reste ensuite à réinjecter pour montrer $q = 1$.

Indication 25 · Énoncé p. 309 (Infinité de nombres premiers dans certaines progressions arithmétiques I)

1. Remarquer qu'un nombre premier impair est congru à 1 ou 3 modulo 4 et que $1 \times 1 \not\equiv 3[4]$.
2. Remarquer qu'un nombre premier plus grand que 5 est congru à 1 ou 5 modulo 6 et que $1 \times 1 \not\equiv 5[6]$.

Solution p. 357

Indication 26 · Énoncé p. 310 (Infinité de nombres premiers dans certaines progressions arithmétiques II)
Il s'agit d'un cas particulier de l'exercice 51.

Adapter la preuve d'Euclide à $(2p_1 \cdots p_r)^2 + 1$.

Solution p. 358

Indication 27 · Énoncé p. 310 (Un exemple de suite à divisibilité)

1. Bernoulli
2. $a^n - 1 = a^r a^{mq} - a^r + a^r - 1$
3. faire simultanément l'algorithme d'Euclide sur (n, m) et $(a^n - 1, a^m - 1)$.

Solution p. 358

Indication 28 · Énoncé p. 311 (XKCD 2835 - Décomposition en base factorielle)
Raisonner par analyse-synthèse.

Comme pour une décomposition en base b, a_1 est le reste de la division euclidienne de n par 2.

Puis a_2 est le reste de la division euclidienne de $\frac{1}{2}(n - a_1)$ par 3, etc.

Remarque: lien vers la référence: https://xkcd.com/2835/

Indication 29 · Énoncé p. 311 (Décomposition en fractions simples)
On peut soit montrer que les $\prod_{j\neq k} a_j$ sont premiers entre eux et bézouter ou bien procéder par récurrence.

Dans ce dernier cas, à l'aide de l'exercice 44 montrer que si a_1, a_2 sont premiers entre eux alors pour tout b il existe $(x_1, s_2) \in \mathbb{Z}^2$ tels que

$$\frac{b}{a_1 a_2} = \frac{x_1}{a_1} + \frac{s_2}{a_2}$$
$$0 \leq x_1 \leq a_1 - 1$$

On peut commenter:
- ▹ L'unicité.
- ▹ La généralisation sous la forme

$$\frac{b}{\prod_{p\in\mathcal{P}} p^{\nu_p(a)}} = m + \sum_{p\in\mathcal{P}} \sum_{k=1}^{\nu_p(a)} \frac{x_{p,k}}{p^k}$$

  où les $x_{p,k}$ entre 0 et $p-1$.
- ▹ La généralisation à $\mathbb{K}[X]$ au lieu de $\mathbb{Z}$: il s'agit de la décomposition en éléments simples (cf SI ou cours de mathématiques dédié).

Indication 30 · Énoncé p. 311 (Encore de l'arithmétique des suites de Fibonacci)
1. Par récurrence sur p.
2. Par exemple reparamétrer en $F_{n+p} \wedge F_n = F_{n+p\wedge n}$ et procéder par récurrence.

Solution p. 360

Indication 31 · Énoncé p. 312 (Pleins de premiers entre eux)
Poser pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \alpha^n + \beta^n$.

Constater que pour tout $m \geq 2n$, $a_n a_{m-n} = a_m + (\alpha\beta)^n a_{m-2n}$.

Procéder alors à un algorithme d'Euclide simultané.

Indication 32 · Énoncé p. 312 (Une division euclidienne cachée)
Avec la division euclidienne $b = aq + r$ constater que $2^b + 1 = 2^r(2^{aq} - 1) + (2^r + 1)$.

Indication 33 · Énoncé p. 312 (Suite récurrente et Euclide simultané)
S'inspirer des exercices précédents.

Par exemple pour $k \in \mathbb{N}$, pour tout n on a $a_{n+k} = \underbrace{P \circ P \circ \cdots \circ P}_{k \text{ fois}}(a_n)$ et en particulier (comme pour tout polynôme R à coefficients entiers $R(a_n) \equiv R(0)\,[a_n]$), on a une écriture de la forme

$$a_{n+k} = a_n q_{n,k} + a_k.$$

Procéder par algorithme d'Euclide simultané.

Indication 34 · Énoncé p. 312 (Formule de Legendre)
Faire un schéma.

Remarquer aussi qu'étant donné $a \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}$ le nombre d'entiers dans $[\![1, n]\!]$ divisibles par a est $\left\lfloor \frac{n}{a} \right\rfloor$.

Indication 35 · Énoncé p. 313 (Application directe de Legendre)
Il suffit de calculer $\min(\nu_2(2025!), \nu_5(2025!))$, et pour calculer ces valuations utiliser la formule de Legendre (exercice 34).

Indication 36 · Énoncé p. 313 (Un petit coefficient multinomial)
Réfléchir à une interprétation combinatoire, ou utiliser immédiatement la formule de Legendre (exercice 34).

Indication 37 · Énoncé p. 313 (Divisibilité des coefficients binomiaux)
Plusieurs méthodes possibles.

Par exemple formule de la capitaine puis Gauss.

Ou de manière plus abstraite remarquer que dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[X]$ on a $(X+1)^p = X^p + 1$ et utiliser le binôme de Newton.

Indication 38 · Énoncé p. 313 (Encore des coefficients binomiaux)
Commencer par traiter l'exercice 37

Indication 39 · Énoncé p. 313 (Formule de Wilson)

1. Regrouper les termes deux à deux.
2. Si n n'est pas le carré d'un nombre premier, regrouper deux termes dont le produit est n.

   Si $n = p^2$ remarquer que $n \mid p \times (2p)$.

Solution p. 362

Indication 40 · Énoncé p. 314 (Wolstenholme)

1. On conjecture que, pour $p \geq 5$, $a_p \equiv 0[p^2]$.
2. On conjecture que, pour $p \geq 5$, $c_p \equiv 0[p]$.
3. Cela revient à étudier

$$\sum_{k=1}^{p-1} \prod_{j \neq k} j$$

modulo p^2 et

$$\sum_{k=1}^{p-1} \left(\prod_{j \neq k} j \right)^2$$

modulo p

Remarquer que cela ressemble très fortement à des relations coefficients racines pour le polynôme

$$(X-1)(X-2)\cdots(X-(p-1))$$

qui est égal dans $\mathbb{Z}/pZ$ à

$$X^{p-1}-1.$$

Indication 41 · Énoncé p. 314 (Équations en PGCD et PPCM)
Plusieurs méthodes. Par exemple regarder les valuations p-adiques. Ou encore poser $d = x \wedge y$ et écrire $x = d\tilde{x}$, $y = d\tilde{y}$ et l'équation sur $\tilde{x}, \tilde{y}$.

Indication 42 · Énoncé p. 315 (Équations en PGCD et PPCM: cas général)
De même que pour 41.

Indication 43 · Énoncé p. 315 (Théorème de structure des couples de Bézout)

1. Si $au + bv = 0$ en simplifiant par $a \wedge b$ on obtient $u\tilde{a} = -v\tilde{b}$. Utiliser ensuite Gauss.
2. Cours (définition du pgcd).
3. On a (u, v) solution de l'équation ssi $(u - u_0, v - v_0)$ solution de l'équation homogène.
4. Plein de commentaires possibles. Par exemple le lien avec tous les théorèmes de structures déjà étudiés. Ou que comme une solution est algorithmiquement calculable par algorithme d'Euclide étendu, toutes les solutions le sont.

   Ou encore une interprétation géométrique (intersection de droites et du réseau $\mathbb{Z}^2$).

Indication 44 · Énoncé p. 315 (Couple de Bézout sous contrainte)
Écrire l'ensemble des solutions de $au + bv = n$ à l'aide de l'exercice 43

Prendre celle minimisant u tout en étant positive.

Indication 45 · Énoncé p. 316 (Quelques règles de calcul)
Utiliser les valuations p-adiques.

Indication 46 · Énoncé p. 316 (Distributivité)
Utiliser les valuations p-adiques.

Indication 47 · Énoncé p. 316 (Toujours la même idée)
Passer aux valuations p-adiques.

Indication 48 · Énoncé p. 317 (Encore des règles de calculs peu utiles)
Utiliser par exemple les valuations p-adiques.

Ou bien se ramener à $a \wedge c = 1$.

Indication 49 · Énoncé p. 317 (Théorème des restes chinois)
Pour l'unicité étudier le système homogène.

Pour l'existence par exemple se ramener aux cas $(1,0)$ et $(0,1)$.

Indication 50 · Énoncé p. 317 (Formulation par les racines n-ièmes)
Comme tous les exercices de racines n-ièmes se rappeler qu'il y a **deux** définitions possibles: celles par extension et celle par compréhension.

Et comme tous les exercices de pgcd, se rappeler de Bézout.

Indication 51 · Énoncé p. 318 (Résidus quadratiques)
Commencer par remarquer que $\left(a^{\frac{p-1}{2}}\right)^2 \equiv 1[p]$ et donc par intégrité $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv \pm 1[p]$.

Montrer ensuite une inclusion et conclure sur l'égalité par calcul des cardinaux.

Remarque: on définit souvent le symbole de Legendre $\left(\frac{a}{p}\right)$ par 0 si $p \mid a$, 1 si a est un résidu quadratique modulo p et -1 sinon. On a alors $\left(\frac{a}{p}\right) \equiv a^{\frac{p-1}{2}}[p]$.

Déterminer les résidus quadratiques modulo p est donc équivalent à déterminer les valeurs du symbole de Legendre.

Par exemple les règles des signes sont les règles usuelles.

La loi de réciprocité quadratique permet de plus de relier $\left(\frac{p}{q}\right)$ et $\left(\frac{q}{p}\right)$. Si p et q sont deux nombres premiers impairs distincts, alors

$$\boxed{\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}}}.$$

Indication 53 · Énoncé p. 318 (Théorème des restes chinois: version isomorphisme d'anneau)
Par récurrence en utilisant l'exercice 49.

Indication 54 · Énoncé p. 318 (Bernoulli)
Bernoulli.

Indication 55 · Énoncé p. 319 (Évidemment pas de formule simple)
Les polynômes constants avec comme constante un nombre premier conviennent.

Montrons que ce sont les seuls. Soit P un tel polynôme.

On a a_0 est premier. De plus pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_0 \mid P(ka_0)$ et donc $P(ka_0) = a_0$.

Donc P coïncide avec a_0 une infinité de fois.

Indication 56 · Énoncé p. 319 (Petit critère d'Eisenstein)
Réécrire $P\left(\frac{p}{q}\right) = 0$ comme

$$\sum_{k=0}^{n} a_k p^k q^{n-k} = 0$$

c'est à dire

$$a_0 q^n + p\left(\sum_{k=1}^{n} a_k p^{k-1} q^{n-k}\right) = 0$$

ou encore

$$\left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k p^k q^{n-k-1}\right) q + a_n p^n = 0.$$

Indication 57 · Énoncé p. 319 (Convolution de Dirichlet)
Les points non automatiques sont les suivants:

- ▷ Montrer que $*$ est commutatif.
- ▷ Montrer que $*$ est associatif.
- ▷ Montrer que $*$ admet un élément neutre.

Pour les deux premiers points constater que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$(f * g)(n) = \sum_{\substack{p,q \\ pq=n}} f(p)g(q)$$

et pour le neutre considérer le Dirac $\delta_0 : n \mapsto \delta_{n,1}$.

Indication 58 · Énoncé p. 319 (LTE light)
Bernoulli. D'un côté $a-b$ est divisible par n. De l'autre côté une somme de n termes tous égaux modulo n.

Indication 59 · Énoncé p. 320 (LTE)

1. On a $x \equiv y[p]$, d'où $x^{n-1-k} \equiv y^{n-1-k}[p]$.

   Utiliser Bernoulli et utiliser $\sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-1-k} \equiv n x^{n-1}[p]$.
2. On a $x^k = (y + (x-y))^k = y^k + k(x-y)y^{k-1} + \cdots$ avec les termes suivants divisibles par $(x-y)^2$ donc par p^2.

   D'où par $\sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-1-k} \equiv 0[p]$ et $\sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-1-k} \equiv n y^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}(x-y)y^{n-2} \equiv n y^{n-1} \not\equiv 0[p^2]$ car $p \mid \frac{n(n-1)}{2}$.
3. Procéder par récurrence sur $\nu_p(n)$, en remarquant que si $n = ab$ alors $x^n - y^n = \left((x^a)^b - (y^a)^b\right)$.

Indication 60 · Énoncé p. 321 (Formule d'inversion de Moebius)

1. Si $n = 1$ alors le produit est 1. Sinon, il est nul car il contient un facteur $1 - 1 = 0$.
2. Utiliser la question précédente ou constater que si n et m sont premiers entre eux alors $\mathcal{P}_{mn} = \mathcal{P}_m \sqcup \mathcal{P}_n$ (union disjointe).
3. Avec les notations de l'exercice 57, on a $g = \mathbf{1} * f$ et $\mathbf{1} * \mu = \delta_0$.

Indication 61 · Énoncé p. 321 (Division euclidienne dans les entiers de Gauss)
Remarquer que tout point de $\mathbb{C}$ est à distance au plus $\frac{\sqrt{2}}{2} < 1$ d'un point de $\mathbb{Z}[i]$.

Solution p. 364

Indication 62 · Énoncé p. 322 (Détermination explicite des couples de Bézout)
Exprimer l'ensemble des solutions sous la forme d'un théorème de structure (solution particulière et solutions homogènes).

On remarque qu'en pratique on peut utiliser l'algorithme d'Euclide étendu pour déterminer une solution particulière.

Indication 63 · Énoncé p. 322 (Un cas particulier de Bézout positif)
Cf l'exercice 64 ou bien faire tout simplement les petits cas en remarquant que l'ensemble est stable par addition.

Indication 65 · Énoncé p. 322 (Pourquoi réfléchir quand on peut trinomer)
Il s'agit d'une équation du second degré.

Solution p. 366

Indication 66 · Énoncé p. 323 (Majorations successives)
Raisonner par exemple par condition nécessaire pour majorer des solutions éventuelles et terminer par disjonction de cas.

Solution p. 366

Indication 67 · Énoncé p. 323 (Étude de fonction)
Étudier $x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$.

Solution p. 368

Indication 68 · Énoncé p. 323 (Une identité de Sophie Germain)
Remarquer que $X^4 + 4 = (X^2 - 2X + 2)(X^2 + 2X + 2)$.

Par conséquent

$$n^4 + 4m^4 = (n^2 - 2nm + 2m^2)(n^2 + 2nm + 2m^2) = ((n-m)^2 + m^2)((n+m)^2 + m^2)$$

d'où la seule possibilité est $m = 1$ et $n - m = 0$.

Indication 69 · Énoncé p. 323 (Une question du CG 1990)
Faire de même que l'exercice 66, en raisonnant par majorations nécessaires.

On pourra aussi constater que si $(x_1, ..., x_n)$ et $(y_1, ..., y_m)$ conviennent, alors $(x_1y_1, x_1y_2, ..., x_1y_m, x_2, ..., x_n)$ convient.

Solution p. 370

Indication 70 · Énoncé p. 324 (Équations en vrac)
Plein d'options pour le premier, de l'identité remarquable $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$ à l'étude d'un carré modulo un entier usuel.

Utiliser par exemple encore une identité remarquable pour le second.

Solution p. 373

Indication 71 · Énoncé p. 324 (Réduction donc impossibilité)
1. Modulo 4.
2. Encore modulo 4.
3. On a $11 - 1 = 10$ divisible par 2 et 5. Donc réduction modulo 11.

Solution p. 373

Indication 72 · Énoncé p. 324 (Une question du Bac 2003)
Étudier les carrés modulo 7.

Solution p. 375

Indication 73 · Énoncé p. 324 (Lemme d'Hensel)
Procéder par récurrence sur n (le cas $n = 0$ est trivial, le cas $n = 1$ donné par $x_1 = a$).

Pour l'hérédité à partir de $n \geq 1$, rechercher x_{n+1} sous la forme $x_{n+1} = x_n + p^n y_n$.

Remarquer qu'alors $P(x_{n+1}) \equiv P(x_n) + p^n y_n P'(x_n)[p^{n+1}]$.

Indication 74 · Énoncé p. 325 (Un contre-exemple au principe général de réduction modulaire)
Il faut donc montrer que parmi, 2, 17 et 34 au moins est toujours un carré modulo n.

Par théorème des restes chinois, il suffit de montrer que pour tout nombre premier p et tout entier k, au moins un des trois nombres $2, 17, 34$ est un carré modulo p^k.

Par le lemme d'Hensel, cf exercice 73, il y a trois cas à traiter:
- $p \notin \{2, 17\}$: le symbole de Legendre étant multiplicatif et $2 \times 17 = 34$ donc au moins l'un vaut 1,
- $p = 17$, on a $6^2 \equiv 2[17]$,
- $p = 2$, le cas restant à faire, utiliser $17 \equiv 1[8]$.

Indication 75 · Énoncé p. 325 (Paramétrisation des triplets pythagoriciens)
Une inclusion est immédiate.

Pour l'autre remarquer par exemple que déterminer un triplet pythagoricien revient à déterminer un point de $\mathbb{U} \cap \mathbb{Q}^2$. Le k correspond alors à la réduction en fraction irréductible et $\frac{n}{m}$ à la tangente de l'angle moitié.

Indication 76 · Énoncé p. 325 (Petite translation)
Avec $a = p + x$, $b = p + y$ on se ramène à $xy = p^2$

Indication 77 · Énoncé p. 325 (Petite puissance de 2)
Étudier modulo 4 : en déduire que $b = 1$ (ce qui donne $a = 1$) ou que a est pair.

Dans le cas a pair, factoriser $3^a - 1$ par Bernoulli en produit de deux puissances de 2.

Indication 78 · Énoncé p. 326 (Petite division)
Majorer ou diviser par $(ab)^2$ (dans le cas $\neq 0$) pour se ramener à 66.

Indication 79 · Énoncé p. 326 (Encore des majorations)
Vérifier que $n = 0$ et $n = 1$ conviennent ; pour $n \geq 2$, regarder modulo 4 pour déduire que n est pair.

Montrer que si $2^{2m} \mid (3^m - 1)(3^m + 1)$ alors $2^{2m-1} \mid 3^m - 1$ ou $2^{2m-1} \mid 3^m + 1$.

Se ramener à un nombre fini de cas.

Indication 80 · Énoncé p. 326 (L'exemple le plus connu de «saut de Viète»)
1. Utiliser les relations coefficients/racines.
2. Faire un principe de descente infinie.

Indication 81 · Énoncé p. 327 (Crible mystère I)
Les noms sont en fait légèrement expressifs: `lp` comme «Liste des nombres Premiers» et `ppdp` comme «liste du Plus Petit Diviseur Premier».

Solution p. 376

Indication 82 · Énoncé p. 327 (Crible mystère II)
Faire d'abord l'exercice 81.

Solution p. 378

Indication 83 · Énoncé p. 328 (Complexité de l'algorithme d'Euclide)
1. Cf cours.
2. Remarquer la division euclidienne suivante pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$F_{n+1} = \underbrace{1}_{\text{quotient}} \times F_n + \underbrace{F_{n-1}}_{\text{reste}}$$
et faire une récurrence.
3. On pourrait montrer à partir de ce résultat que, pour deux entiers de taille N, la complexité générale de l'algorithme d'Euclide est en $O(\ln(N))$, c'est à dire que l'algorithme d'Euclide est très efficace (complexité sous-linéaire) ; le couple (F_{n+1}, F_n) réalise précisément le pire cas de cette borne.

Indication 84 · Énoncé p. 328 (Autour du Projet Euler 37)
On peut déterminer l'arbre des préfixes des suites de chiffres premières par troncature à droite. En remarquant que le nombre est décroissant. En optimisant un peu les chiffres à rajouter voir que l'arbre est fini.

Indication 86 · Énoncé p. 329 (De l'art de choisir ses tiroirs)
1. Montrer en faisant des petits tiroirs de deux entiers consécutifs qu'il existe même i et j tels que a_i et a_j consécutifs.
2. Tout entier a_i s'écrit sous la forme $2^{r_i}q_i$ avec q_i impair.

   Si $q_i = q_j$ alors $a_i \mid a_j$ ou $a_j \mid a_i$.

Indication 87 · Énoncé p. 329 (Somme des puissances modulo p)
Constater que l'on peut se ramener à $m \in [\![0, p-2]\!]$.

Ensuite plusieurs options:

1. Une formule par récurrence sur les S_m,
2. une bijection astucieuse,
3. une relation coefficient/racines sur $X^n - 1$ et des sommes de Newton (plus compliqué).

Indication 88 · Énoncé p. 329 (Juste parité et moyenne)
Il y a peu de nombres premiers pairs.

Ensuite si p_n et p_{n+1} sont *consécutifs* alors $\frac{p_n+p_{n+1}}{2}$ n'est pas premier.

Indication 89 · Énoncé p. 329 (Bernoulli itéré)
Bernoulli.

Solution p. 378

Indication 90 · Énoncé p. 329 (Travailler puis plein de disjonctions de cas)
Supposer $a \leq b \leq c$.

Montrer que a, b, c sont deux à deux premiers entre eux puis que $abc \mid ab + bc + ac - 1$.

En déduire $a \leq 2$.

Traiter la disjonction de cas de manière similaire (majoration puis disjonction).

Indication 91 · Énoncé p. 330 (P1 2017)
Remarquer que la suite est autonome et travailler modulo 3.
- ▷ Si $a_0 \equiv 0[3]$ alors pour tout n, $a_n \equiv 0[3]$. Et si $a_0 \leq (3m)^2$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq (3m)^2$.
- ▷ Si $a_0 \equiv 2[3]$ alors pour tout n, $a_n \equiv 2[3]$ et $a_n = a_0 + 3n$.
- ▷ Il reste le cas $a_0 \equiv 1[3]$.

  Traiter à la main les petits cas.

Remarquer que si $a_0 = 3k+1$ alors comme $(3k-1)^2 = (3k+1) + 9(k^2-k)$, si $k \geq 9$ alors il existera un rang où $a_n < a_0$.

Si ce a_n est congru à 2 modulo 3 alors on a terminé.

Conclure par récurrence forte dans le cas de congruence à 1.

Solutions

Solution pour l'exercice 1 · Énoncé p. 304 · Indication p. 331 (Premier petit calcul)
On a $2025 \equiv 11[19]$.

Il reste donc à calculer $11^{2026^{2027}}$ modulo 19.

On regarde les premières congruences de 11^k modulo 19:
- $11^1 \equiv 11[19]$
- $11^2 \equiv 7[19]$
- $11^3 \equiv 1[19]$

Par conséquent avec $r \in [\![0, 2]\!]$ tel que $2026^{2027} \equiv r[3]$, on a $11^{2026^{2027}} \equiv 11^r[19]$.

Il reste donc à calculer 2026^{2027} modulo 3.

Or $2026 \equiv 1[3]$ donc $2026^{2027} \equiv 1^{2027} \equiv 1[3]$.

Par conséquent $r = 1$ et donc $\boxed{2025^{2026^{2027}} \equiv 11[19]}$.

Solution pour l'exercice 2 · Énoncé p. 304 · Indication p. 331 (Un peu de repunit)
Notons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $r_n = \underbrace{111\cdots111}_{n \text{ fois}}$ c'est à dire $r_n = \sum_{k=0}^{n-1} 10^k$.

On cherche à montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $r_n \equiv 0[a]$.

On remarque que les restes de r_n dans leur division par a sont dans $[\![0, a-1]\!]$.

Comme il y a une infinité de valeurs possibles de n, par le principe des tiroirs (version infinité de chaussettes dans un nombre fini de tiroirs), il existe n, m distincts tels que r_n et r_m ont le même reste par la division par a.

Quitte à les intervertir on peut supposer que $n > m$.

On a alors comme $r_n \equiv r_m[a]$, la congruence $r_n - r_m \equiv 0[a]$.

Or

$$\begin{aligned} r_n - r_m &= \sum_{k=0}^{n-1} 10^k - \sum_{k=0}^{m-1} 10^k \\ &= \sum_{k=m}^{n-1} 10^k \\ &= 10^m \sum_{k=0}^{n-m-1} 10^k \\ &= 10^m r_{n-m}. \end{aligned}$$

Par conséquent $a \mid 10^m r_{n-m}$.

Donc, comme a et 10 sont premiers entre eux, par lemme de Gauss on en déduit que $\boxed{a \mid r_{n-m}}$.

Solution pour l'exercice 3 · Énoncé p. 304 · Indication p. 331 (Encore des repunits en base 10)
Notons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $r_n = \underbrace{111\cdots111}_{n \text{ fois}}$ c'est à dire $r_n = \sum_{k=0}^{n-1} 10^k$.

On a $1 \equiv 1[4]$ et $10 \equiv 2[4]$ puis pour tout $k \geq 2$, $10^k \equiv 0[4]$.

Ainsi $r_1 \equiv 1[4]$ et pour tout $n \geq 2$, $r_n \equiv 1 + 2 \equiv 3[4]$.

Or on a le tableau des carrés modulo 4:

$x \bmod 4$	0	1	2	3
$x^2 \bmod 4$	0	1	0	1

et en particulier tout carré est congru à 0 ou 1 modulo 4.

D'où pour tout $n \geq 2$, r_n n'est pas un carré.

Comme $r_1 = 1 = 1^2$, le seul repunit qui soit un carré est $r_1 = 1$.

Remarque : l'idée de regarder modulo 4 pour un carré est un bon réflexe de condition nécessaire (mais non suffisante) à avoir.

Solution pour l'exercice 4 · Énoncé p. 304 · Indication p. 331 (Critères de divisibilité)
On a

$$n = \sum_{k=0}^{r} c_k 10^k.$$

1. On a $10 \equiv 1[3]$ donc pour tout $k \in \mathbb{N}$, $10^k \equiv 1[3]$.

Par conséquent

$$\begin{aligned} n \equiv \sum_{k=0}^{r} c_k 10^k &\equiv \sum_{k=0}^{r} c_k 1 \ [3] \\ &\equiv \sum_{k=0}^{r} c_k \ [3]. \end{aligned}$$

En particulier on obtient $n \equiv 0[3]$ ssi $\sum_{k=0}^{r} c_k \equiv 0[3]$. D'où le critère de divisibilité par 3.

2. On a $10 \equiv -1[11]$ donc pour tout $k \in \mathbb{N}$, $10^k \equiv (-1)^k[11]$.

Par conséquent

$$n \equiv \sum_{k=0}^{r} c_k 10^k \equiv \sum_{k=0}^{r} c_k (-1)^k [11].$$

En particulier on obtient $n \equiv 0[11]$ ssi $\sum_{k=0}^{r} (-1)^k c_k \equiv 0[11]$. D'où le critère de divisibilité par 11.

3. On a $10^6 \equiv 1[7]$ (par calcul ou petit théorème de Fermat).

Par conséquent en posant pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\alpha_k = \begin{cases} 1 \text{ si } & k \equiv 0[6] \\ 3 \text{ si } & k \equiv 1[6] \\ 2 \text{ si } & k \equiv 2[6] \\ 6 \text{ si } & k \equiv 3[6] \\ 4 \text{ si } & k \equiv 4[6] \\ 5 \text{ si } & k \equiv 5[6] \end{cases}$$

on obtient pour tout $k \in \mathbb{N}$, comme

$$\begin{aligned} 10^k &\equiv 10^{6(k/\!\!/6)+(k\%6)} \ [7] \\ &\equiv \left(10^6\right)^{k/\!\!/6} 10^{k\%6} \ [7] \\ &\equiv 10^{k\%6} \ [7] \\ &\equiv \alpha_k \ [7]. \end{aligned}$$

D'où pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} n &\equiv \sum_{k=0}^{r} c_k 10^k \ [7] \\ &\equiv \sum_{k=0}^{r} c_k \alpha_k \ [7]. \end{aligned}$$

et donc n est divisible par 7 ssi $\sum_{k=0}^{r} \alpha_k c_k$ est divisible par 7.

D'où un critère de divisibilité par 7.

Remarques: comme pour tous les autres critères on a en fait mieux que juste la divisibilité:

- ▷ on a plus précisément une congruence modulo 7,
- ▷ on peut aussi itérer le processus sur l'écriture décimale de la somme pondérée obtenue.

4. Notons pour tout $k \in \mathbb{N}$, α_k le reste de la division euclidienne de 10^k par a.

Comme précédemment on a

$$n \equiv \sum_{k=0}^{r} c_k 10^k \equiv \sum_{k=0}^{r} c_k \alpha_k \ [a].$$

Il reste juste à montrer que la suite $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est périodique.

Comme les α_k sont dans $[\![0, a-1]\!]$, par le principe des tiroirs (version une infinité de chaussettes dans un nombre fini de tiroirs), il existe $i < j$ tels que $\alpha_i = \alpha_j$ c'est à dire

$$10^i \equiv 10^j \ [a].$$

Comme 10 est inversible modulo a (car a et 10 sont premiers entre eux) on a donc

$$10^{j-i} \equiv 1 \ [a].$$

Notons $p = j - i$.

Alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$10^{k+p} \equiv 10^k 10^p \equiv 10^k \ [a].$$

Et donc $\boxed{\text{pour tout } k \in \mathbb{N},\ \alpha_{k+p} = \alpha_k}$.

Solution pour l'exercice 5 · Énoncé p. 304 · Indication p. 331 (Encore un petit calcul)
Première méthode

On peut tout simplement développer.

Soit n un entier. Par la formule du binôme

$$\begin{aligned}(n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3 &= n^3 - 3n^2 + 3n - 1 + n^3 + n^3 + 3n^2 + 3n + 1\\ &= 3n^3 + 6n\\ &= 3n(n^2+2)\end{aligned}$$

et

- Si $n \equiv 0[3]$ alors $3 \mid n$
- sinon $n \equiv \pm 1[3]$ d'où $n^2 + 2 \equiv 0[3]$.

Dans tous les cas $3 \mid n(n^2+2)$ et donc $9 \mid (n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3$.

Deuxième méthode On regarde la table des cubes modulo 9

$x \bmod 9$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$x^3 \bmod 9$	0	1	8	0	1	8	0	1	8

d'où la somme des cubes de trois nombres consécutifs est toujours congrue à 0 modulo 9.

Solution pour l'exercice 6 · Énoncé p. 305 · Indication p. 331 (Juste faire un tableau)
On regarde le tableau des carrés modulo 24, en retirant les entiers congrus à 0 modulo 2 ou 3:

$n \bmod 24$	1	5	7	11	13	17	19	23
$n^2 \bmod 24$	1	1	1	1	1	1	1	1

d'où dans tous les cas $n^2 \equiv 1[24]$ et donc $24 \mid n^2 - 1$.

Solution pour l'exercice 7 · Énoncé p. 305 · Indication p. 331 (Encore des tableaux peu passionnants)

1. On a le tableau de congruences modulo 3, comme $10 \equiv 1[3]$ et $14 \equiv 2[3]$:

$n \bmod 3$	0	1	2
$n + 10 \bmod 3$	1	2	0
$n + 14 \bmod 3$	2	0	1

Dans chaque colonne exactement un des trois nombres est congru à 0 modulo 3.

2. Comme $2 \equiv -1[3]$ et $4 \equiv 1[3]$ on a le tableau de congruence modulo 3:

$n \bmod 3$	0	1	2

$2n+1 \bmod 3$	1	0	2
$4n+1 \bmod 3$	1	2	0

Dans chaque colonne exactement un des trois nombres est congru à 0 modulo 3.

3. Comme $4 \equiv -1[5]$ et $6 \equiv 1[5]$ on a le tableau de congruence modulo 5:

$n \bmod 5$	0	1	2	3	4
$4n^2+1 \bmod 5$	1	0	2	2	0
$6n^2+1 \bmod 5$	1	2	0	0	2

Dans chaque colonne exactement un des trois nombres est congru à 0 modulo 5.

Solution pour l'exercice 8 · Énoncé p. 305 · Indication p. 332 (Des trous aussi grands que l'on veut)
Soit $n \in \mathbb{N}$.

On constate alors que $(n+1)!+2, (n+1)!+3, ..., (n+1)!+(n+1)$ sont n entiers consécutifs.

De plus pour tout $k \in [\![2, n+1]\!]$, $(n+1)!+k$ est divisible par k (car k divise $(n+1)!$). Et comme $(n+1)!+k > k > 1$ on en déduit que $(n+1)!+k$ n'est pas premier.

Solution pour l'exercice 9 · Énoncé p. 305 · Indication p. 332 (Somme des chiffres itérée)
Comme $10 \equiv 1[9]$ on a pour tout $n \in N$,

$$s_{10}(n) \equiv n[9].$$

De plus on a $2^3 \equiv -1[9]$ et donc $2^6 \equiv 1[9]$.

Comme $2026 = 6 \times 337 + 4$, on a

$$\begin{aligned} 2^{2026} &\equiv \left\{2^6\right\}^{337} \times 2^4[9] \\ &\equiv 2^4[9] \\ &\equiv 7[9]. \end{aligned}$$

et donc finalement

$$s_{10}(s_{10}(s_{10}(s_{10}(s_{10}(2^{2026}))))) \equiv 7[9].$$

De plus pour tout $n \in N$, on a n admet une écriture décimale de $\lfloor \log_{10}(n) \rfloor + 1$ chiffres, et donc on a

$$s_{10}(n) \leq 9(\lfloor \log_{10}(n) \rfloor + 1).$$

Par conséquent, comme $\log_{10}(2) < 1$, (c'est environ 0.3) on a

$$s_{10}(2^{2026}) \leq 9(\lfloor \log_{10}(2^{2026}) \rfloor + 1) = 9(\lfloor 2026 \log_{10}(2) \rfloor + 1) \leq 9 \times 2027 < 10^6$$

d'où

$$s_{10}(s_{10}(2^{2026})) \leq 9(\lfloor \log_{10}(s_{10}(2^{2026})) \rfloor + 1) \leq 9(\lfloor \log_{10}(9 \times 2027) \rfloor + 1) \leq 9(5+1) = 54.$$

Par conséquent

$$s_{10}(s_{10}(s_{10}(2^{2026}))) \leq 5 + 9 = 14.$$

Puis

$$s_{10}(s_{10}(s_{10}(s_{10}(2^{2026})))) \leq 9$$

et (l'énoncé est volontairement très «large»)

$$s_{10}(s_{10}(s_{10}(s_{10}(s_{10}(2^{2026}))))) \leq 9.$$

Le seul entier de $[\![0, 9]\!]$ congru à 7 modulo 9 est 7.

Par conséquent

$$\boxed{s_{10}(s_{10}(s_{10}(s_{10}(s_{10}(2^{2026}))))) = 7}.$$

Remarque: ici les bornes sont volontairement très «larges» pour que l'on puisse conclure facilement. Un petit script python montrer que l'on a

$$s_{10}(s_{10}(s_{10}(s_{10}(2^{2026})))) = 7.$$

Solution pour l'exercice 13 · Énoncé p. 306 · Indication p. 332 (Passage à la limite)
On a pour tout nombre premier p, pour tout $n \in \mathbb{N}$, comme $a^n \mid b^{n+2025}$,

$$v_p(a^n) \leq v_p(b^{n+2025})$$

c'est à dire

$$\forall n \in \mathbb{N}, n v_p(a) \leq (n + 2025) v_p(b)$$

ou encore (dans $\mathbb{R}$),

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, v_p(a) \leq \frac{n + 2025}{n} v_p(b).$$

Par Passage à la Limite des Inégalités Larges, quand $n \to +\infty$, on a

$$v_p(a) \leq v_p(b).$$

Comme c'est le cas pour tout nombre premier p, on a donc

$$\boxed{a \mid b}.$$

Solution pour l'exercice 14 · Énoncé p. 306 · Indication p. 332 (Puissances multiples)
Si $a = 0$, alors $b = 0$ convient.

Supposons désormais $a \neq 0$, et donc b_1, b_2 non nuls.

On commence par montrer le résultat suivant

Il existe $b \in \mathbb{N}^*$ tel que $a = b^r$ **ssi** pour tout nombre premier p, $r \mid v_p(a)$.

En effet:

- ▷ $\boxed{\Rightarrow}$ Si il existe $b \in \mathbb{N}^*$ tel que $a = b^r$ alors pour tout nombre premier p, $v_p(a) = rv_p(b)$ et donc $r \mid v_p(a)$.
- ▷ $\boxed{\Leftarrow}$ Si pour tout nombre premier p, $r \mid v_p(a)$ alors pour tout $p \in \mathcal{P}$, $\frac{v_p(a)}{r} \in \mathbb{N}$ et donc $b = \prod_{p\in\mathcal{P}} p^{\frac{v_p(a)}{r}}$ est bien défini.

  Et on a bien $b^r = a$.

Une fois ce résultat montré, on a donc pour tout nombre premier p, $r_1 \mid v_p(a)$ et $r_2 \mid v_p(a)$.

Donc par définition du ppcm, pour tout nombre premier p, $r_1 \vee r_2 \mid v_p(a)$.

Par conséquent il existe $b \in \mathbb{N}$ tel que $a = b^{r_1 \vee r_2}$.

Solution pour l'exercice 15 · Énoncé p. 307 · Indication p. 332 (Encore une caractérisation des puissances)
Supposons qu'il existe $d \in \mathbb{N}^*$ tel que $ab = d^2$.

Soit p un nombre premier. On a

- ▷ $\nu_p(ab) = \nu_p(a) + \nu_p(b) = \nu_p(d^2) = 2\nu_p(d)$,
- ▷ $\nu_p(a \wedge b) = \min\big(\nu_p(a), \nu_p(b)\big) = 0$ car a et b sont premiers entre eux, c'est à dire $\nu_p(a) = 0$ ou $\nu_p(b) = 0$.

En particulier $\nu_p(a) + \nu_p(b)$ est pair et l'un des deux termes vaut 0 et donc est pair.

Ainsi $\nu_p(a)$ et $\nu_p(b)$ sont tous les deux pairs.

On a donc montré que pour tout nombre premier p, $\nu_p(a)$ et $\nu_p(b)$ sont pairs.

D'où $\boxed{a \text{ et } b \text{ sont des carrés}}$.

En effet

$$a = \left(\prod_{p\in\mathcal{P}} p^{\frac{\nu_p(a)}{2}}\right)^2$$

le produit étant bien défini et un entier car $\left(\frac{\nu_p(a)}{2}\right)_{p\in\mathcal{P}}$ est une famille à support fini d'entiers naturels.

Et de même pour b.

Solution pour l'exercice 17 · Énoncé p. 307 · Indication p. 333 (Somme de puissances de diviseurs ou décomposition des sigmas)
Notons dans la suite pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{D}(n)$ l'ensemble des diviseurs **positifs** de n.

Ainsi pour tout $s \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sigma_s(n) = \sum_{d\in\mathcal{D}(n)} d^s.$$

1. Soient n, m premiers entre eux.

On a

$$\begin{aligned}\sigma_s(n)\sigma_s(m) &= \left(\sum_{d_1\in\mathcal{D}(n)} d_1^s\right)\left(\sum_{d_2\in\mathcal{D}(m)} d_2^s\right)\\ &= \sum_{(d_1,d_2)\in\mathcal{D}(n)\times\mathcal{D}(m)} d_1^s d_2^s\\ &= \sum_{(d_1,d_2)\in\mathcal{D}(n)\times\mathcal{D}(m)} (d_1d_2)^s\end{aligned}$$

De plus comme $n\wedge m = 1$ on a

$$\varphi : \begin{array}{l}\mathcal{D}(n)\times\mathcal{D}(m) \longrightarrow \mathcal{D}(nm)\\ (d_1,d_2) \qquad\quad \longmapsto d_1d_2\end{array}$$

est bijective.

On peut le voir sur la Décomposition en Produit de Facteurs Premiers, ou de manière équivalente en remarquant que

$$\psi : \begin{array}{l}\mathcal{D}(nm) \longrightarrow \mathcal{D}(n)\times\mathcal{D}(m)\\ d \qquad\quad \longmapsto (d\wedge n, d\wedge m)\end{array}$$

est une bijection réciproque de φ (encore une fois car n et m n'ont pas de facteurs premiers en commun).

D'où

$$\sum_{(d_1,d_2)\in\mathcal{D}(n)\times\mathcal{D}(m)} (d_1d_2)^s = \sum_{d\in\mathcal{D}(nm)} d^s = \sigma_s(nm).$$

Et donc $\boxed{\sigma_s(nm) = \sigma_s(n)\sigma_s(m)}$.

2. Comme p est premier, les diviseurs de p^k admettent p comme unique facteur premier, d'où les diviseurs de p^k sont les p^j pour $j\in[\![0,k]\!]$.

$$\mathcal{D}(p^k) = \{p^j \mid j\in[\![0,k]\!]\}.$$

En particulier, par somme géométrique,

$$\begin{aligned}\sigma_s(p^k) &= \sum_{j=0}^{k} (p^j)^s\\ &= \sum_{j=0}^{k} (p^s)^j\\ &= \begin{cases} k+1 & \text{si } s=0\\ \frac{p^{(k+1)s}-1}{p^s-1} & \text{si } s\neq 0\end{cases}.\end{aligned}$$

Ainsi

$$\boxed{\sigma_s(p^k) = \begin{cases} k+1 & \text{si } s=0\\ \frac{p^{(k+1)s}-1}{p^s-1} & \text{si } s\neq 0\end{cases}}.$$

3. On écrit n comme produit de ses facteurs premiers, $n = \prod_{p\in\mathcal{P}} p^{\nu_p(n)}$.

Comme pour deux nombres premiers distincts $p_1, p_2 \in \mathcal{P}$, $p_1^{\nu_{p_1}(n)}$ et $p_2^{\nu_{p_2}(n)}$ sont premiers entre eux, on a par la première question,

$$\sigma_s(n) = \prod_{p\in\mathcal{P}} \sigma_s\left(p^{\nu_p(n)}\right).$$

Et donc par la deuxième question

$$\boxed{\sigma_s(n) = \begin{cases} \prod_{p\in\mathcal{P}} (\nu_p(n)+1) & \text{si } s=0 \\ \prod_{p\in\mathcal{P}} \frac{p^{(\nu_p(n)+1)s}-1}{p^s-1} & \text{si } s\neq 0 \end{cases}}$$

Solution pour l'exercice 20 · Énoncé p. 308 · Indication p. 333 (Un peu d'arithmétique des suites de Fibonacci)

1. Une version itérative est

```python
def fibo(n):
    """Prend en argument un entier n et renvoie le n-ième terme de la suite de Fibonacci"""
    a, b = 0, 1
    for i in range(n):
        a, b = b, a + b
    return a

```

et une version récursive est

```python
def fibo_rec(n):
    """Prend en argument un entier n et renvoie récursivement (F_n,F_{n+1})"""
    if n == 0:
        return (0, 1)
    else:
        a, b = fibo_rec(n - 1)
        return (b, a + b)


def fibo(n):
    """Prend en argument un entier n et renvoie le n-ième terme de la suite de Fibonacci"""
    return fibo_rec(n)[0]

```

On peut montrer par récurrence forte sur $n \in \mathbb{N}$ que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_n \in \mathbb{N}$.

2. On remarque que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$$

et donc par invariance par transvection du pgcd,

$$F_{n+1} \wedge F_n = F_n + F_{n-1} \wedge F_n = F_{n-1} \wedge F_n.$$

On procède donc par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

▷ **Initialisation**

Pour $n = 0$, $F_0 = 0$ et $F_1 = 1$ donc $F_0 \wedge F_1 = 1$.

▷ **Hérédité**

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $F_{n+1} \wedge F_n = 1$.

On a que

$$F_{n+2} \wedge F_{n+1} = F_{n+1} + F_n \wedge F_{n+1} = F_n \wedge F_{n+1} = 1.$$

▷ **Conclusion**

Par récurrence, on a donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \boxed{F_{n+1} \wedge F_n = 1}.$$

Remarque : on remarque qu'une preuve algorithmique est aussi possible, en suivant un algorithme d'Euclide, la propriété que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_{n+1} \wedge F_n = 1$ étant un invariant de boucle.

Solution pour l'exercice 21 · Énoncé p. 308 · Indication p. 333 (Nombres de Mersenne)

1. On remarque que par formule de Bernoulli on a

$$a^n - 1 = (a-1)\left(\sum_{k=0}^{n-1} a^k\right).$$

et donc

$$a - 1 | a^n - 1.$$

D'où

- ▷ Si $a > 2$ alors $a - 1 > 1$ et (comme $n \geq 2$) $a - 1 < a^n - 1$ et donc $a^n - 1$ n'est pas premier.
- ▷ Si n est non premier, il existe $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $n = pq$ avec $p, q > 1$. Alors $a^n - 1 = (a^p)^q - 1$ et est donc divisible par $a^p - 1$ différent de 1 et de $a^n - 1$ (car $p, q > 1$).

Par contraposée on a donc montré que $\boxed{\text{si } a^n - 1 \text{ est premier alors } a = 2 \text{ et } n \text{ est premier}}$.

2. On peut par exemple utiliser le programme suivant

```python
# Pour déterminer les nombres premiers on propose un algorithme de crible d'Ératosthène:
def crible(n):
    """Prend en argument un entier n.
    Renvoie un tuple (est_premier, premiers) où est_premier est un tableau de booléens de taille n indiquant si chaque entier inférieur à n est premier et premiers est la liste des nombres premiers inférieurs à n.
    """
    if n < 2:
        return []
    premiers = []  # La liste des nombres premiers
    est_premier = [True for _ in range(n)]  # est_premier[i] indique si i est premier
    est_premier[0] = False
    est_premier[1] = False
    for i in range(2, n):
        if est_premier[i]:
            premiers.append(i)
            for j in range(i * i, n, i):
                est_premier[j] = False
    return est_premier, premiers


```

```python
def mersenne(n):
    """Prend en argument un entier n et affiche la liste des nombres de Mersennes inférieurs à 2**n - 1 et leur primalité éventuelle"""
    N = 2**n
    est_premier, premiers = crible(N)
    for p in range(n + 1):
        if est_premier[p]:
            m = 2**p - 1
            print(f"2^{p} - 1 = {m} est {'premier' if est_premier[m] else 'composé'}")
    return None


# Affiche les nombres de Mersennes inférieurs à 2**23 - 1 et leur primalité éventuelle
mersenne(23)

```

On obtient

```
2^2 - 1 = 3 est premier
            2^3 - 1 = 7 est premier
            2^5 - 1 = 31 est premier
            2^7 - 1 = 127 est premier
            2^11 - 1 = 2047 est composé
            2^13 - 1 = 8191 est premier
            2^17 - 1 = 131071 est premier
            2^19 - 1 = 524287 est premier
            2^23 - 1 = 8388607 est composé
```

et $2^{11}-1 = 2047 = 23 \times 89$ et $2^{23}-1 = 8388607 = 47 \times 178481$ ne sont pas premiers.

Solution pour l'exercice 22 · Énoncé p. 309 · Indication p. 333 (Nombres de Fermat)

1. Supposons que b n'est pas une puissance de 2.

Il existe alors $\alpha \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}$ impair et $q \geq 3$ tels que $b = 2^\alpha q$.

On a alors par Bernoulli, comme q est impair,

$$\begin{aligned} 2^b + 1 &= 2^{2^\alpha q} + 1 \\ &= \left(2^{2^\alpha}\right)^q - (-1)^q \\ &= \left(2^{2^\alpha} - (-1)\right)\left(\sum_{k=0}^{q-1} \left(2^{2^\alpha}\right)^k (-1)^{q-1-k}\right) \end{aligned}$$

donc $2^{2^\alpha}+1$ divise 2^b+1 et est différent de 1 et de 2^b+1 car $q > 1$.

Donc 2^b+1 n'est pas premier.

Par contraposée, on a donc montré que $\boxed{\text{si } 2^b+1 \text{ est premier alors } b \text{ est une puissance de 2}}$.

2. On peut par exemple utiliser le programme suivant

```python
# Par exemple pour déterminer si un nombre est premier, plutôt qu'un crible d'Ératosthène, on peut tester les nombres plus petits que la racine carrée de ce nombre (un crible serait plus efficace pour tester plusieurs nombres).


def est_premier(n):
```

```python
    """Prend en argument un entier n et renvoie True si il est premier, False sinon"""
    # Pour gagner du temps on traite que les diviseurs impairs
    if n < 2 or n % 2 == 0:
        return False
    if n == 2:
        return True
    k = 3
    while k * k <= n:
        if n % k == 0:
            return False
        k = k + 2
    return True


def fermat(n):
    """Prend en argument un entier n et affiche la liste des n premiers nombres de Fermat et leur primalité éventuelle"""
    for p in range(n):
        f = 2 ** (2**p) + 1
        print(f"F_{p} = {f} est {'premier' if est_premier(f) else 'composé'}")
    return None


fermat(7)

```

On obtient

```
F_0 = 3 est premier
F_1 = 5 est premier
F_2 = 17 est premier
F_3 = 257 est premier
F_4 = 65537 est premier
F_5 = 4294967297 est composé
F_6 = 18446744073709551617 est composé
```

et $F_5 = 4294967297 = 641 \times 6700417$ et $F_6 = 18446744073709551617 = 274177 \times 67280421310721$ ne sont pas premiers.

3. Soient $n, m \in \mathbb{N}$ tels que $n \neq m$.

Quitte à intervertir n et m, on peut supposer que $n < m$.

On a alors

$$F_m - 1 = 2^{2^m} = \left(2^{2^n}\right)^{2^{m-n}} = (F_n - 1)^{2^{m-n}}$$

c'est à dire

$$F_m = (F_n - 1)^{2^{m-n}} + 1.$$

Par le binôme

$$F_m = 1 + \sum_{k=0}^{2^{m-n}} \binom{2^{m-n}}{k} F_n^k (-1)^{2^{m-n}-k}$$

i.e

$$F_m = 1 + 1 + \left(\sum_{k=1}^{2^{m-n}} \binom{2^{m-n}}{k} F_n^{k-1} (-1)^{2^{m-n}-k}\right) F_n$$

d'où par invariance du pgcd par transvection, et comme F_n est impair,

$$F_m \wedge F_n = F_n \wedge 2 = 1.$$

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_n > 1$ et donc admet au moins un diviseur premier.

Notons p_n un tel diviseur premier.

Alors pour tous $n, m \in \mathbb{N}$ tels que $n \neq m$, on a $F_n \wedge F_m = 1$ et donc $p_n \neq p_m$.

D'où il existe une infinité de nombres premiers.

Solution pour l'exercice 25 · Énoncé p. 309 · Indication p. 334 (Infinité de nombres premiers dans certaines progressions arithmétiques I)

1. La remarque clef est qu'un produit de nombres congrus à 1 modulo 4 est aussi congru à 1 modulo 4. Par conséquent (contraposée) si un produit de termes n'est pas congru à 1 modulo 4 alors l'un des facteurs n'est pas congru à 1 modulo 4.

Soient $p_1, ..., p_r$ des nombres premiers distincts de 3 et congrus à 3 modulo 4.

Posons

$$N = 4p_1 \times p_2 \times \cdots p_r + 3.$$

Alors N admet une décomposition en facteurs premiers. Par la remarque préliminaire, ces facteurs premiers (congrus à 1 ou 3 modulo 4 car N impair) ne peuvent pas tous être congrus à 1 modulo 4 (car $N \not\equiv 1[4]$) et il existe donc q premier tel que $q \equiv 3[4]$ et $q \mid N$.

De plus pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, on a $N \equiv 3[p_i]$ et par conséquent (comme p_i ne divise pas 3), p_i ne divise pas N. Enfin $N \equiv 4p_1 \times \cdots p_r[3]$ et (par théorème de Gauss) 3 ne divise pas $4 \times p_1 \times \cdots p_r$.

On en déduit que $q \notin \{3, p_1, p_2, ..., p_r\}$.

On a donc montré qu'étant donné un ensemble fini de nombres premiers congrus à 3 modulo 4 on peut construire un nombre premier congru à 3 modulo 4 qui n'est pas dans cet ensemble (et différent de 3).

Par conséquent (par l'absurde ou par argument combinatoire) il existe une infinité de nombres premiers congrus à 3 modulo 4 (et plus grands que 3).

2. On procède de même. Soient $p_1, ..., p_r$ des nombres premiers congrus à 5 modulo 6 et distincts de 5.

Posons

$$N = 6p_1 ... p_r + 5.$$

Alors N admet une décomposition en produit de facteurs premiers.

- ▷ Comme $N \equiv 1[2]$, 2 n'est pas parmi ces facteurs.
- ▷ Comme $N \equiv 2[3]$, 3 n'est pas parmi ces facteurs.
- ▷ Comme 5 ne divise pas $6 \times p_1 \times \cdots p_r$ (Gauss), 5 n'est pas parmi ces facteurs.
- ▷ Pour tout i, $N \equiv 5[p_i]$ et donc p_i n'est pas parmi ces facteurs.

Or tout nombre premier plus grand que 3 est congru à 1 ou 5 modulo 6 (car sinon divisible par 2 ou 3).

Comme un produit de facteurs tous congrus à 1 modulo 6 est aussi congru à 1 modulo 6 au moins un des facteurs premiers est congru à 5 modulo 6.

On a donc exhibé un nombre premier congru à 5 modulo 6 et n'étant pas dans $\{2,3,5,p_1,...,p_r\}$.

Comme précédemment cela permet de conclure sur l'existence d'une infinité de tels nombres premiers.

Remarque: cette méthode ne se généralise pas forcément, par exemple il existe une infinité de nombres premiers congrus à 1 modulo 4 (cf plus loin) mais une telle preuve ne peut pas s'adapter à ce cas.

Solution pour l'exercice 26 · Énoncé p. 310 · Indication p. 334 (Infinité de nombres premiers dans certaines progressions arithmétiques II)
Par l'exercice 51, on a -1 est un carré modulo p (premier impair) ssi $(-1)^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1[p]$ donc ssi $\frac{p-1}{2}$ est pair i.e ssi $p \equiv 1[4]$.

Soient $p_1,...,p_r$ des nombres premiers.

Posons

$$N = (2 \times p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_r)^2 + 1.$$

Alors N admet une décomposition en produit de facteurs premiers.

Pour tout $i \in [\![1,r]\!]$, $N \equiv 1[p_i]$ et donc p_i ne divise pas N.

De plus N est impair, donc tout facteur premier q de N est impair ; alors $(2 \times p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_r)^2 \equiv -1[q]$, autrement dit -1 est un carré modulo q, et donc (par ce qui précède) q est congru à 1 modulo 4.

Par conséquent il existe un nombre premier distinct de $p_1,...,p_r$ et congru à 1 modulo 4.

Et donc il y a une infinité de nombres premiers congrus à 1 modulo 4.

Solution pour l'exercice 27 · Énoncé p. 310 · Indication p. 334 (Un exemple de suite à divisibilité)

1. Soient $n,m \in \mathbb{N}$ tels que $m \mid n$.

Soit $q \in \mathbb{N}$ tel que $n = mq$.

On a par la formule de Bernoulli,

$$\begin{aligned} a^n - 1 &= a^{mq} - 1 \\ &= (a^m)^q - 1^q \\ &= (a^m - 1)\left(\sum_{k=0}^{q-1} (a^m)^k\right) \end{aligned}$$

et en particulier $a^m - 1 \mid a^n - 1$.

D'où $\boxed{f \text{ est croissante pour la divisibilité}}$.

2. On a

$$\begin{aligned} a^n - 1 &= a^{mq+r} - 1 \\ &= a^{mq}a^r - a^r + a^r - 1 \\ &= a^r(a^{mq} - 1) + (a^r - 1). \end{aligned}$$

par la formule de Bernoulli,

$$a^{mq} - 1 = (a^m)^q - 1^q = (a^m - 1)\left(\sum_{k=0}^{q-1} (a^m)^k\right)$$

et donc en particulier

$$a^m - 1 \mid a^{mq} - 1.$$

Par invariance du pgcd par transvection on a donc

$$\boxed{(a^n - 1) \wedge (a^m - 1) = (a^r - 1) \wedge (a^m - 1)}.$$

3. On observe que lorsqu'on effectue un algorithme d'Euclide pour calculer le pgcd de $f(n)$ et $f(m)$ on effectue de manière simultanée un algorithme d'Euclide pour calculer le pgcd de n et m.

Une façon de rédiger cela est d'effectuer une preuve algorithmique, ou bien d'effectuer une récurrence forte sur le variant de boucle.

Procédons par récurrence forte.

Pour $m \in \mathbb{N}$, notons

$$\mathcal{P}_m : \forall n \in \mathbb{N}, f(n) \wedge f(m) = f(n \wedge m).$$

▷ **Initialisation**

Pour $m = 0$, comme $f(0) = 0$, on a bien

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(n) \wedge f(0) = f(n) = f(n \wedge 0).$$

D'où $\mathcal{P}_0$.

▷ **Hérédité**

Soit $m \in \mathbb{N}^*$.

Supposons que pour tout $k \in [\![0, m-1]\!]$, $\mathcal{P}_k$ est vraie.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Effectuons la division euclidienne de n par m

$$\begin{aligned} n &= mq + r \\ r &\in [\![0, m-1]\!]. \end{aligned}$$

Par la question précédente,

$$f(n) \wedge f(m) = f(m) \wedge f(r).$$

Comme $r < m$, par $\mathcal{P}_r$ on a donc

$$f(m) \wedge f(r) = f(m \wedge r).$$

Et comme $n = mq + r$, on a $m \wedge r = m \wedge n$.

Ainsi

$$f(n) \wedge f(m) = f(m \wedge n).$$

D'où $\mathcal{P}_m$.

▷ **Conclusion**

On a donc montré par récurrence forte que

$$\forall m \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \boxed{f(n) \wedge f(m) = f(n \wedge m)}.$$

Solution pour l'exercice 30 · Énoncé p. 311 · Indication p. 335 (Encore de l'arithmétique des suites de Fibonacci)

1. Pour $p \in \mathbb{N}$ notons $\mathcal{R}_p$:

$$\mathcal{R}_p : \forall n \in \mathbb{N}, F_{n+p} = F_p F_{n+1} + F_{p-1} F_n$$

et montrons par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$, que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\mathcal{R}_p$.

▷ **Initialisation**

Pour $p = 1$, on a bien

$$\forall n \in \mathbb{N}, F_{n+1} = \underbrace{1}_{F_1} F_{n+1} + \underbrace{0}_{F_{1-1}} F_n.$$

▷ **Hérédité**

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\mathcal{R}_p$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

On a:

$$\begin{aligned}
F_{n+(p+1)} &= F_{(n+1)+p} && (\text{par } \mathcal{R}_p) \\
&= F_p F_{n+2} + F_{p-1} F_{n+1} && (\text{par définition de la suite } (F_n)_{n\in\mathbb{N}}) \\
&= F_p(F_{n+1} + F_n) + F_{p-1} F_{n+1} && (\text{développement et factorisation}) \\
&= (F_p + F_{p-1}) F_{n+1} + F_p F_n && (\text{par définition de la suite } (F_n)_{n\in\mathbb{N}}) \\
&= F_{p+1} F_{n+1} + F_p F_n
\end{aligned}$$

D'où on a bien montré

$$\forall n \in \mathbb{N}, F_{n+(p+1)} = F_{p+1} F_{n+1} + F_{(p+1)-1} F_n$$

ce qui est $\mathcal{R}_{p+1}$.

▷ **Conclusion**

On a montré $\mathcal{R}_1$ et $\forall p \in \mathbb{N}^*, \mathcal{R}_p \Rightarrow \mathcal{R}_{p+1}$.

Par récurrence, on a donc bien montré que

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}, F_{n+p} = F_p F_{n+1} + F_{p-1} F_n.$$

2. Soient $(n,m) \in \mathbb{N}^2$, sans perte de généralité, $n \geq m$. Si $n = m$ il n'y a rien à faire.

Sinon comme $n = m + (n-m)$ on a par la question précédente

$$F_n = F_{m+(n-m)} = F_{n-m} F_{m+1} + F_{n-m-1} F_m$$

par conséquent (invariance du pgcd par transvection)

$$F_m \wedge F_n = F_m \wedge \left(F_{n-m} F_{m+1} + F_{n-m-1} F_m\right) = F_m \wedge \left(F_{n-m} F_{m+1}\right)$$

et comme $F_m \wedge F_{m+1} = 1$ (cf exercice 20) on a

$$F_m \wedge \left(F_{n-m} F_{m+1}\right) = F_m \wedge F_{n-m}.$$

On a donc montré

$$\boxed{\forall (n,m) \in \mathbb{N}^2, n \geq m, F_m \wedge F_n = F_m \wedge F_{n-m}}.$$

L'idée est ensuite d'effectuer un algorithme d'Euclide simultané sur (n,m) et (F_n, F_m).

Une rédaction possible (ce n'est pas la seule) est de procéder par récurrence forte.

(La récurrence peut porter sur $n-m$, $n+m$, le plus petit des deux ou tout simplement en fixant un paramètre.)

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{H}_n$: «$\forall m \leq n, F_m \wedge F_n = F_{n \wedge m}$».

- **Initialisation**

  Pour $n = 0$, on a bien

  $$\forall m \in \mathbb{N}, F_0 \wedge F_m = 0 \wedge F_m = F_m = F_{0 \wedge m}$$

  et c'est donc bien le cas en particulier pour $m \leq 0$.

  Donc $\mathcal{H}_0$ est vraie.

- **Hérédité**

  Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $\mathcal{H}_k$.

  Soit $m \leq n$.

  - Si $m = 0$ on a bien $F_0 \wedge F_n = F_n = F_{0 \wedge n}$. De même si $m = n$, on a bien $F_n \wedge F_n = F_n = F_{n \wedge n}$.
  - Sinon on a vu que

    $$F_m \wedge F_n = F_m \wedge F_{n-m}$$

    Il y a alors deux possibilités:
    - Si $m \leq n-m$ alors comme $n - m \leq n-1$, par hypothèse de récurrence forte, $\mathcal{H}_{n-m}$ est vraie et donc

      $$F_m \wedge F_{n-m} = F_{n-m \wedge m} = F_{n \wedge m}.$$

    - Si $n - m < m$ alors comme $m \leq n-1$, par hypothèse de récurrence forte, $\mathcal{H}_m$ est vraie et donc

      $$F_m \wedge F_{n-m} = F_{n-m} \wedge F_m = F_{n-m \wedge m} = F_{n \wedge m}.$$

Par conséquent on a dans tous les cas

$$F_m \wedge F_n = F_m \wedge F_{n-m} = F_{n-m\wedge m} = F_{n\wedge m}.$$

On a donc bien $F_m \wedge F_n = F_{n\wedge m}$.

▷ **Conclusion**

Par récurrence, on a donc bien montré que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \forall m \in [\![0, n]\!], F_n \wedge F_m = F_{n\wedge m}}$$

Remarque: d'autres méthodes étaient possibles.

Par exemple de $F_m \wedge F_n = F_m \wedge F_{n-m}$ on en déduit par récurrence sur $q \in \mathbb{N}$ immédiate que pour tout $q \in \mathbb{N}$ tel que $n - qm \geq 0$ on a

$$F_m \wedge F_n = F_m \wedge F_{n-qm}$$

ce qui simplifie la preuve algorithmique en prenant q le quotient de la division euclidienne de n par m.

Solution pour l'exercice 39 · Énoncé p. 313 · Indication p. 336 (Formule de Wilson)

1. Comme p est premier on a $x^2 \equiv 1[p]$ ssi $(x-1)(x+1) \equiv 0[p]$ ssi $x \equiv \pm 1[p]$, c'est à dire que les seuls éléments modulo p qui sont leurs propres inverses sont 1 et -1.

Ainsi tout élément entre 2 et $p-2$ est distinct de son inverse et dans le produit

$$2 \times 3 \times \cdots (p-2)$$

on peut regrouper chaque élément avec son inverse pour obtenir

$$2 \times 3 \times \cdots (p-2) \equiv 1[p].$$

Par exemple modulo 11 on effectue le regroupement

$$\begin{aligned} 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 &\equiv (2 \times 6) \times (3 \times 4) \times (5 \times 9) \times (7 \times 8)[p] \\ &\equiv 1 \times 1 \times 1 \times 1 \qquad [p] \end{aligned}$$

Et par conséquent en multipliant par $1 \times (p-1) \equiv -1[p]$ on en déduit

$$(p-1)! \equiv -1[p].$$

Remarque: Une autre méthode pour démontrer ce résultat est d'utiliser des polynômes dans $\frac{\mathbb{Z}}{p}\mathbb{Z}[X]$: comme les polynômes $X^{p-1} - 1$ et $(X-1)(X-2)\cdots(X-(p-1))$ coïncident en $p-1$ points (par le petit théorème de Fermat) et sont unitaires de degré $p-1$ on en déduit qu'ils sont égaux. Les relations de Viète entre coefficients et racines permettent alors de conclure.

Remarque: Pour formaliser ce regroupement le plus simple est de regrouper selon la relation d'équivalence $a \sim b$ ssi $a = b$ ou $ab \equiv 1[p]$. Alors toutes les classes d'équivalence contiennent deux éléments sauf celles de 1 et de -1.

2. On procède par disjonction de cas.

▷ Supposons que n n'est pas le carré d'un nombre premier.

Soit par exemple $a \geq 2$ le plus petit diviseur non trivial de n (qui est donc premier) et b tel que $n = ab$.

Comme n est composé, $a, b < n$, et comme n n'est pas le carré d'un nombre premier, $b \neq a$.

De plus dans le produit

$$(n-1)! = 1 \times 2 \times \cdots \times \cdots a \times \cdots \times b \times \cdots (n-1)$$

apparaît le facteur ab et donc $n \mid (n-1)!$.

Par exemple modulo 8 on a

$$\begin{aligned} 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 &\equiv (2 \times 4) \times \cdots [n] \\ &\equiv 0 \qquad\qquad [n]. \end{aligned}$$

▷ Supposons que n est le carré d'un nombre premier p.

On a $p \times (2p) = 2p^2 = 2n$ qui est divisible par n.

De plus comme $n > 4$, $p > 2$ et donc $2p < p^2 - 1$ (car $(p-1)^2 - 2 > 0$).

Donc dans le produit

$$(n-1)! = 1 \times 2 \times \cdots \times \cdots p \times \cdots \times 2p \times \cdots (n-1)$$

apparaît le facteur $p \times 2p$ et donc $n \mid (n-1)!$.

Par exemple modulo 9,

$$\begin{aligned} 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 &\equiv (3 \times 6) \times \cdots [n] \\ &\equiv 0 \qquad\qquad [n]. \end{aligned}$$

Remarque: il reste le cas $n = 4$ à traiter.

On a alors $(4-1)! \equiv 2[4]$.

Solution pour l'exercice 52 · Énoncé p. 318 (RSA)

Posons $a = ed$.

Comme $a \equiv 1[p-1]$: si $p \nmid M$, le petit théorème de Fermat donne $M^{p-1} \equiv 1[p]$, donc $M^{a-1} \equiv 1[p]$ (car $(p-1) \mid (a-1)$) et $M^a \equiv M[p]$; et si $p \mid M$, alors $M^a \equiv 0 \equiv M[p]$. Dans les deux cas $M^a \equiv M[p]$.

De même, si $q \nmid M$ on a $M^{a-1} \equiv 1[q]$ donc $M^a \equiv M[q]$, et si $q \mid M$ alors $M^a \equiv 0 \equiv M[q]$; dans tous les cas $M^a \equiv M[q]$.

Comme $p \mid M^a - M$ et $q \mid M^a - M$ et que p et q premiers entre eux on conclut que $pq \mid M^a - M$ c'est à dire $M^a \equiv M[pq]$.

Remarque: ce résultat est à la base de l'algorithme RSA très utilisé en cryptographie. En effet, en posant $n = pq$, pour chiffrer le message M la connaissance de e et de n suffit. Mais pour le déchiffrer la connaissance de d est nécessaire. Et pour retrouver d à partir de e et n il faut calculer p et q, ce qui est un problème complexe.

Solution pour l'exercice 61 · Énoncé p. 321 · Indication p. 339 (Division euclidienne dans les entiers de Gauss)
On propose deux preuves: une première adaptant la preuve usuelle dans $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{K}[X]$, et une seconde utilisant $\mathbb{Z}[i] \subset \mathbb{C}$ et une intuition géométrique.

▷ **Version 1**

Considérons

$$\{|a - b\gamma|^2, \gamma \in \mathbb{Z}[i]\} \subset \mathbb{N}$$

qui est un sous-ensemble non vide de $\mathbb{N}$.

Il existe alors $\boxed{q \in \mathbb{Z}[i]}$ tel que

$$|a - bq|^2 = \min_{\gamma \in \mathbb{Z}[i]} (|a - b\gamma|^2).$$

Posons $\boxed{r = a - bq}$. Il reste à montrer que $|r|^2 < |b|^2$.

Supposons par l'absurde que $|r| \geq |b|$.

Pour tout $\omega \in \{1, i, -1, -i\}$, on a

$$|a - b(q + \omega)|^2 = |r - b\omega|^2 = |r|^2 + |b|^2 - 2\,\mathrm{Re}(\overline{r}b\omega).$$

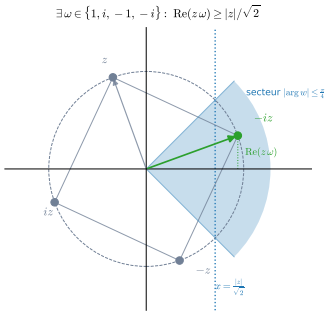
Mais pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ il existe $\omega \in \{1, i, -1, -i\}$ tel que $\mathrm{Re}(z\omega) \geq \frac{|z|}{\sqrt{2}}$.

En effet avec $z = |z|\ e^{i\theta}$, on a pour tout $k \in [\![0, 3]\!]$, comme $i^k \in \{1, i, -1, -i\}$,

$$\mathrm{Re}\big(zi^k\big) = |z| \cos\Big(\theta + k\frac{\pi}{2}\Big).$$

Or les quatre arguments $\theta + k\frac{\pi}{2}$, $k \in [\![0, 3]\!]$, étant espacés de $\frac{\pi}{2}$, l'un d'eux, disons $\theta + k_0\frac{\pi}{2}$, appartient à $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ modulo 2π. Sur cet intervalle $\cos(\theta + k_0\frac{\pi}{2}) \geq \cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, d'où, en posant $\omega = i^{k_0}$,

$$\mathrm{Re}(z\omega) = |z| \cos\Big(\theta + k_0\frac{\pi}{2}\Big) \geq \frac{|z|}{\sqrt{2}}.$$



Par conséquent, en choisissant $\omega \in \{1, i, -1, -i\}$ tel que $\mathrm{Re}(\overline{r}b\omega) \geq \frac{|\overline{r}b|}{\sqrt{2}} = \frac{|r||b|}{\sqrt{2}}$, on a,

$$\begin{aligned}|a-b(q+\omega)|^2 &\leq |r|^2+|b|^2-2\frac{|r\|b|}{\sqrt{2}}\\ &\leq |r|^2+|b|^2-\sqrt{2}|b|^2\\ &< |r|^2\end{aligned}$$

ce qui contredit l'hypothèse de minimalité.

D'où

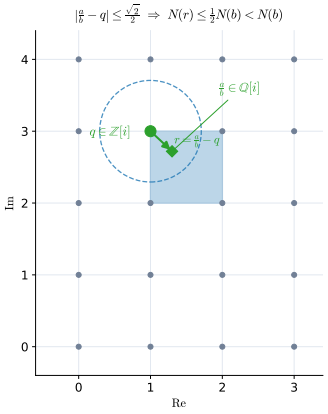
$$\boxed{|r|^2<|b|^2.}$$

▷ **Version 2**

On a

$$\frac{a}{b}\in\mathbb{C}$$

(c'est même un élément de $\mathbb{Q}[i]$).



Or pour tout $z\in\mathbb{C}$ il existe $q\in\mathbb{Z}[i]$ tel que $|z-q|\leq\frac{1}{\sqrt{2}}$.

En effet avec $x,y\in\mathbb{Z}$ tels que

$$|\operatorname{Re}(z)-x|\leq\frac{1}{2}$$
$$|\operatorname{Im}(z)-y|\leq\frac{1}{2}$$

on a alors

$$|z-(x+iy)|^2=|\operatorname{Re}(z)-x|^2+|\operatorname{Im}(z)-y|^2\leq\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}.$$

et donc $q=x+iy$ convient.

Par conséquent en posant $\boxed{q\in\mathbb{Z}[i]}$ tel que $|\frac{a}{b}-q|\leq\frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\boxed{r=a-bq}$, on a

$$a=bq+r$$

et

$$|r|^2 = |a-bq|^2 = |b|^2\ |\frac{a}{b} - q|^2$$
$$\leq |b|^2\ \frac{1}{2}$$

et donc en particulier

$$\boxed{|r|^2 < |b|^2}.$$

Solution pour l'exercice 65 · Énoncé p. 322 · Indication p. 340 (Pourquoi réfléchir quand on peut trinomer)
Le plus simple est de reconnaître un **trinôme du second degré**.

Avec $x = n^2$, n est solution de l'équation ssi

$$x^2 - 7x + 12 = 0.$$

Il s'agit d'un trinôme du second degré de discriminant

$$\Delta = 7^2 - 4 \times 12 = 1 > 0$$

et donc ayant deux racines réelles

$$\frac{7 \pm 1}{2}.$$

Donc n est solution ssi $n^2 = 4$ ou $n^2 = 3$.

Or $n^2 = 4$ admet deux solutions entières: $n = 2$ et $n = -2$.

Et $n^2 = 3$ n'admet aucune solution entière (passer par exemple aux valuations 3-adiques pour montrer qu'il n'y a pas de solutions rationnelles ou majorer et remarquer que $\pm 1, \pm 2$ ne sont pas solutions).

On conclut donc que l'ensemble des solutions entières est

$$\boxed{\{-2, 2\}}.$$

Solution pour l'exercice 66 · Énoncé p. 323 · Indication p. 340 (Majorations successives)

1. Il y a plusieurs méthodes.

Première option: majoration

Soient a et b deux entiers strictement positifs vérifiant

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1.$$

Quitte à changer l'ordre on peut supposer que $0 < a \leq b$.

Dans ce cas on a

$$0 < \frac{1}{b} \leq \frac{1}{a}$$

et donc

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\leq\frac{2}{a}.$$

d'où on déduit

$$0<a\leq 2.$$

Il suffit alors de regarder $a=1$ et $a=2$.

- ▹ Pour $a=1$, $\frac{1}{b}+1=1$ n'admet pas de solution.
- ▹ Pour $a=2$, $\frac{1}{b}+\frac{1}{2}=1$ admet $b=2$ comme solution.

La seule solution est donc

$$\boxed{(a,b)=(2,2).}$$

Deuxième option: résolution dans $\mathbb{R}$

Si a et b sont solutions alors $a\neq 1$ et

$$b=\frac{a}{a-1}.$$

Donc comme a et b sont entiers $a-1\mid a$ et donc $a-1\mid a-(a-1)$.

On en déduit que $a-1=1$ donc $a=2$.

Et donc $b=2$.

La seule solution est donc

$$\boxed{(a,b)=(2,2).}$$

2. Soient a , b et c trois entiers strictement positifs vérifiant

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1.$$

Quitte à changer l'ordre on peut supposer que $0<a\leq b\leq c$.

Dans ce cas on a

$$0<\frac{1}{c}\leq\frac{1}{b}\leq\frac{1}{a}$$

et donc

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\leq\frac{3}{a}.$$

d'où on déduit

$$0<a\leq 3.$$

Il suffit alors de regarder $a=1$, $a=2$ et $a=3$.

- ▹ Pour $a=1$, $1+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$ n'admet pas de solution.
- ▹ Pour $a=2$, $\frac{1}{2}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$ revient à

$$\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{2}.$$

Comme $0<b\leq c$, par le même raisonnement que précédemment on a

$$\frac{1}{2}\leq\frac{2}{b}$$

c'est à dire $b\leq 4$. De plus $b\geq a=2$. Il suffit donc de regarder $b=2$, $b=3$ et $b=4$.

- Pour $b=2$,

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{c}=\frac{1}{2}$$

n'admet pas de solution.

- Pour $b=3$,

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{c}=\frac{1}{2}$$

admet $c=6$ comme solution.

- Pour $b=4$,

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{c}=\frac{1}{2}$$

admet $c=4$ comme solution.

- Pour $a=3$, $\frac{1}{3}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$ revient à

$$\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{2}{3}.$$

Comme $0<b\leq c$, par le même raisonnement que précédemment on a

$$\frac{2}{3}\leq\frac{2}{b}$$

c'est à dire $b\leq 3$. De plus $b\geq a=3$. Il suffit donc de regarder $b=3$.

- Pour $b=3$,

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{c}=\frac{2}{3}$$

admet $c=3$ comme solution.

Les solutions vérifiant $a\leq b\leq c$ sont donc $(2,3,6)$, $(2,4,4)$ et $(3,3,3)$.

En comptant les permutations de ces solutions, on obtient donc $6+3+1$ c'est à dire

10 triplets solutions.

Solution pour l'exercice 67 · Énoncé p. 323 · Indication p. 340 (Étude de fonction)
On observe que $a=b$ est toujours solution.

Fixons a et résolvons

$$a^x = x^a$$

d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

En passant au ln l'équation se réécrit

$$\frac{\ln(x)}{x} = \frac{\ln(a)}{a}.$$

Posons

$$\begin{aligned} f :]0, +\infty[&\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{\ln(x)}{x} - \frac{\ln(a)}{a} \end{aligned}$$

et étudions la fonction f.

La fonction f est dérivable sur son ensemble de définition, et sa dérivée est, pour tout $x > 0$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln(x) \times 1}{x^2} = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}.$$

La fonction f est donc
- ▹ **croissante** sur $]0, e^1[$
- ▹ puis **décroissante** sur $]e^1, +\infty[$.

Comme de plus $f(a) = 0$,

- ▹ Si $a > e^1$ on a le tableau de variations

  et l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $]0, a[$ et n'admet aucune solution dans $]a, +\infty[$.
- ▹ Si $1 < a < e^1$ on a le tableau de variations

  et l'équation $f(x) = 0$ n'admet aucune solution dans $]0, a[$ et admet une unique solution dans $]a, +\infty[$.

Retournons au problème initial.

Quitte à réordonner on peut supposer $a < b$.

Si $a > e^1$ il n'y a donc pas de solution.

Comme a est un entier strictement positif et que $e^1 < 3$ il suffit donc de regarder $a = 1$ et $a = 2$.

- ▹ Pour $a = 1$, $1^b = b^1$ n'admet pas de solution $b > 1$.
- ▹ Pour $a = 2$, $2^b = b^2$ admet $b = 4$ comme solution, et par l'étude précédente c'est la seule.

On conclut donc que la seule solution avec $a < b$ est $a = 2$ et $b = 4$.

Par conséquent l'ensemble des solutions est

$$\boxed{\{(n, n), n \in \mathbb{N}^*\} \cup \{(2, 4), (4, 2)\}}.$$

Remarque: il aurait été bien plus simple de, dès le début
- ▹ supposer $a < b$
- ▹ transformer le problème en

$$\frac{\ln(a)}{a} = \frac{\ln(b)}{b}$$

et étudier $\frac{\ln(x)}{x}$ sur $]0,+\infty[$. On en déduit directement que

$$a < e^1 < b.$$

Solution pour l'exercice 69 · Énoncé p. 323 · Indication p. 340 (Une question du CG 1990)
On remarque tout d'abord que si n et m conviennent alors avec

$$\frac{1}{x_1^2} + \cdots + \frac{1}{x_n^2} = 1$$

et

$$\frac{1}{y_1^2} + \cdots + \frac{1}{y_m^2} = 1$$

on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{(x_1y_1)^2} + \cdots + \frac{1}{(x_1y_m)^2} + \frac{1}{x_2^2} + \cdots + \frac{1}{x_n^2} &= \left(\frac{1}{y_1^2} + \cdots + \frac{1}{y_m^2}\right)\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \cdots + \frac{1}{x_n^2} \\ &= \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \cdots + \frac{1}{x_n^2} = 1\end{aligned}$$

et donc $n+m-1$ convient aussi.

On cherche donc ce qui se passe pour les petits cas, en espérant ensuite reconstituer tous les entiers assez grands à partir de ces derniers.

- Pour $n = 1$ on a bien

$$\frac{1}{1^2} = 1$$

- Pour $n = 2$, si

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = 1$$

alors en supposant $1 < x_1 \leq x_2$ on a

$$1 = \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} \leq \frac{2}{x_1^2} \leq \frac{2}{4} = \frac{1}{2} < 1$$

et donc pas de solutions.

- Pour $n = 3$, de même si

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \frac{1}{x_3^2} = 1$$

alors en supposant $1 < x_1 \leq x_2 \leq x_3$ on a

$$1 = \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \frac{1}{x_3^2} \leq \frac{3}{x_1^2} \leq \frac{3}{4} < 1$$

et donc pas de solutions.

- ▷ Pour $n = 4$ on peut remarquer directement que

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} = 1.$$

Donc $n = 4$ convient.

- ▷ Pour $n = 5$, on majore comme dans les exercices précédents. Plus précisément si

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \frac{1}{x_3^2} + \frac{1}{x_4^2} + \frac{1}{x_5^2} = 1$$

, en se ramenant à $1 < x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4 \leq x_5$ on obtient

$$1 \leq \frac{5}{x_1^2}$$

donc $1 < x_1 \leq \sqrt{5}$. Il suffit de regarder $x_1 = 2$.

Dans ce cas on obtient

$$\frac{1}{x_2^2} + \frac{1}{x_3^2} + \frac{1}{x_4^2} + \frac{1}{x_5^2} = \frac{3}{4}$$

et donc de même

$$\frac{3}{4} \leq \frac{4}{x_2^2}$$

d'où $x_1 = 2 \leq x_2 \leq \sqrt{\frac{16}{3}} < 3$. Il suffit donc de regarder $x_2 = 2$.

Dans ce cas on obtient

$$\frac{1}{x_3^2} + \frac{1}{x_4^2} + \frac{1}{x_5^2} = \frac{1}{2}$$

et donc de même

$$\frac{1}{2} \leq \frac{3}{x_3^2}$$

d'où $x_2 = 2 \leq x_3 \leq \sqrt{6} < 3$. Il suffit donc de regarder $x_3 = 2$.

Dans ce cas on obtient

$$\frac{1}{x_4^2} + \frac{1}{x_5^2} = \frac{1}{4}$$

et donc de même

$$\frac{1}{4} \leq \frac{2}{x_4^2}$$

d'où $x_3 = 2 \leq x_4 \leq \sqrt{8} < 3$. Il suffit donc de regarder $x_4 = 2$.

Dans ce cas on obtient

$$\frac{1}{x_5^2} = 0$$

qui n'admet pas de solution.

- Pour $n = 6$ on peut de même que précédemment effectuer des majorations en chaîne pour se ramener à un nombre fini de cas à traiter.

  Plus précisément, en ordonnant de même que précédemment $1 < x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4 \leq x_5 \leq x_6$ on obtient successivement

  $$1 \leq \frac{6}{x_1^2}$$

  c'est à dire $1 < x_1 \leq \sqrt{6} < 3$ et il suffit donc de regarder $x_1 = 2$. On obtient alors

  $$\frac{3}{4} \leq \frac{5}{x_2^2}$$

  c'est à dire $x_1 = 2 \leq x_2 \leq \sqrt{\frac{20}{3}} < 3$ et il suffit donc de regarder $x_2 = 2$. On obtient alors

  $$\frac{1}{2} \leq \frac{4}{x_3^2}$$

  c'est à dire $x_2 = 2 \leq x_3 \leq \sqrt{8} < 3$ et il suffit donc de regarder $x_3 = 2$. On obtient alors

  $$\frac{1}{4} \leq \frac{3}{x_4^2}$$

  c'est à dire $x_3 = 2 \leq x_4 \leq \sqrt{12} < 4$ et il suffit donc de regarder $x_4 = 2$ ou $x_4 = 3$. Pour $x_4 = 2$ on obtiendrait que la somme restante est nulle, ce qui est impossible. Il suffit donc de regarder $x_4 = 3$. On obtient alors

  $$\frac{1}{4} - \frac{1}{9} \leq \frac{2}{x_5^2}$$

  c'est à dire $x_4 = 3 \leq x_5 \leq \sqrt{\frac{72}{5}} < 4$ il suffit donc de regarder $x_5 = 3$.

  On obtient alors

  $$\frac{1}{x_6^2} = \frac{5}{36} - \frac{1}{9}$$

  et $x_6 = 6$ convient.

  Par conséquent on obtient une solution qui est $(2, 2, 2, 3, 3, 6)$.
- Le cas $n = 7$ se construit à partir des précédents car $7 = 4 + 4 - 1$.
- Pour $n = 8$ après avoir effectué des majorations et regardé un nombre fini de cas on obtient que $(2, 2, 2, 3, 3, 9, 9, 18)$ est solution.
- Tous les entiers ≥ 9 conviennent. En effet par le cas $n = 4$, si m convient alors $m + 3$ convient. Et les cas $6, 7, 8$ conviennent.

En conclusion les entiers n qui conviennent sont $\boxed{\text{tous les entiers sauf 2, 3, 5}}$.

Solution pour l'exercice 70 · Énoncé p. 324 · Indication p. 341 (Équations en vrac)

1. On regarde modulo 4.

On a pour tous $n, m \in \mathbb{N}$, $n^4 = \left(n^2\right)^2$ est congru à 0 ou 1 modulo 4. Donc $n^4 - m^4$ est congru à 0, 1, -1.

Or

$$42 \equiv 2[4]$$

et par conséquent | il n"y a pas de solution |.

2. On cherche donc les n tels que l'équation

$$5^n + 4 = a^2.$$

Ce qui peut se réécrire

$$5^n = a^2 - 4.$$

En reconnaissant une identité remarquable, cela revient à

$$(a-2)(a+2) = 5^n.$$

Par conséquent, comme 5 est premier, on en déduit que $a-2$ et $a+2$ sont des puissances de 5, i.e il existe r et s entiers tels que

$$\begin{aligned} a+2 &= 5^r \\ a-2 &= 5^s. \end{aligned}$$

Leur différence est donc, en supposant quitte à changer l'ordre que $r \geq s$,

$$\begin{aligned} (a+2) - (a-2) = 4 &= 5^r - 5^s \\ &= 5^s(5^{r-s} - 1). \end{aligned}$$

La seule possibilité est donc $s = 0$ et $r - s = 1$.

On en déduit que si n est solution alors $5^n + 4 = 9$.

On vérifie que $5^1 + 4 = 9$.

Par conséquent il existe une unique solution qui est

$$\boxed{n = 1}$$

Solution pour l'exercice 71 · Énoncé p. 324 · Indication p. 341 (Réduction donc impossibilité)

1. On regarde modulo 4.

Comme un carré est congru à 0 ou 1 modulo 4 on a

$$a^2 + b^2 \equiv 0, 1 \text{ ou } 2 \bmod 4.$$

Mais

$$2023 \equiv 3 \bmod 4.$$

Donc | il n"y a pas de solution |.

2. On regarde modulo 4.

Tout d'abord comme a^5 est de même parité que a, on a a est pair. Soit $\tilde{a} \in \mathbb{Z}$ tel que $a = 2\tilde{a}$. Alors l'équation devient

$$2^5\tilde{a}^5 - 2b^2 = 528$$

et donc

$$b^2 = 16\tilde{a}^5 - 264$$

en particulier b est pair.

Soit $\tilde{b} \in \mathbb{Z}$ tel que $b = 2\tilde{b}$. Alors l'équation devient

$$4\tilde{a}^5 - \tilde{b}^2 = 66$$

et donc modulo 4 on obtient

$$-\tilde{b}^2 \equiv 2 \bmod 4$$

ce qui est impossible.

Donc | il n"y a pas de solution |.

3. On regarde modulo 11.

On a $110007 \equiv 7 \bmod 11$.

La table des carrés et des puissances 5-ièmes modulo 11 est

$x \bmod 11$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$x^2 \bmod 11$	0	1	4	9	5	3	3	5	9	4	1
$x^5 \bmod 11$	0	1	10	1	1	1	10	10	10	1	10

D'où le tableau de possibilités

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	9	3	4	1	5	5	1	4	3	9
1	1	10	4	5	2	6	6	2	5	4	10
2	10	8	2	3	0	4	4	0	3	2	8
3	1	10	4	5	2	6	6	2	5	4	10
4	1	10	4	5	2	6	6	2	5	4	10
5	1	10	4	5	2	6	6	2	5	4	10
6	10	8	2	3	0	4	4	0	3	2	8
7	10	8	2	3	0	4	4	0	3	2	8
8	10	8	2	3	0	4	4	0	3	2	8
9	1	10	4	5	2	6	6	2	5	4	10
10	10	8	2	3	0	4	4	0	3	2	8

Et il est donc impossible d'avoir

$$a^5 - 2b^2 \equiv 7 \bmod 11.$$

L'équation n'admet donc $\boxed{\text{pas de solution}}$.

Remarque: Pourquoi modulo 11 ? On cherche un entier n pour lequel les puissances 2 et 5 sont simples modulo n. Comme le ppcm de 2 et 5 est 10 on cherche par exemple n tel que $\varphi(n) = 10$ ce qui permet de simplifier toutes les puissances 10ème. Ici 11 convient car 11 est premier et $11 - 1 = 10$.

Solution pour l'exercice 72 · Énoncé p. 324 · Indication p. 341 (Une question du Bac 2003)
On observe que $x = y = z = 0$ est solution.

Montrons que c'est la seule.

Soit $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ une solution. Sans perte de généralité on peut supposer $x \neq 0$.

On peut écrire modulo 7

$$x^2 \equiv -y^2 \bmod 7.$$

Supposons que $7 \nmid x$. Comme $7 \nmid x$, comme 7 est premier, x est inversible modulo 7.

En notant ξ un inverse de x modulo 7, i.e un entier tel que

$$x\xi \equiv 1 \bmod 7$$

et en multipliant par ξ^2 on en déduit

$$(\xi y)^2 \equiv -1 \bmod 7.$$

Or la table des carrés modulo 7 est:

$x \bmod 7$	0	1	2	3	4	5	6
$x^2 \bmod 7$	0	1	4	2	2	4	1

et on aboutit donc à une contradiction.

Donc pour toute solution non nulle $7 \mid x$.

Si $7 \mid x$ alors $7 \mid y$ et donc en posant $x = 7\tilde{x}$ et $y = 7\tilde{y}$ on obtient

$$7\tilde{x}^2 + 7\tilde{y}^2 = z^2$$

donc on peut écrire $z = 7\tilde{z}$. Et obtient alors

$$\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 = 7\tilde{z}^2.$$

On obtient donc une solution $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ avec $0 < \tilde{x} < x$.

Par principe de descente infinie il n'existe pas de solution non nulle.

Remarque: ici le point clé est que -1 n'est pas carré modulo le nombre premier 7. Un résultat très classique est que -1 est un carré modulo le nombre premier impair p ssi $p \equiv 1 \bmod 4$.

Solution pour l'exercice 81 · Énoncé p. 327 · Indication p. 342 (Crible mystère I)

1. On note $\texttt{spf}(k)$ le plus petit diviseur premier d'un entier $k \geq 2$ (de sorte que $\texttt{spf}(p) = p$ lorsque p est premier). Les indices de `ppdp` vont de 0 à N. On montre par récurrence (forte) sur $i \in [\![2, N+1]\!]$ l'invariant suivant :

au début de l'itération de la boucle «`while i<=N:`» associée à la valeur i :

- `lp` contient, dans l'ordre croissant, tous les nombres premiers strictement inférieurs à i ;
- pour tout $k \in [\![2, i]\!]$ tel que $k \leq N$,

$$\texttt{ppdp}[k] = \begin{cases} \min(\{p \in \texttt{lp} \mid p \text{ divise } k\}) & \text{si } \exists p \in \texttt{lp}\ ,\ p \text{ divise } k \\ k & \text{sinon.} \end{cases}$$

Comme `lp` contient à cet instant tous les premiers $< i$, ce membre de droite vaut toujours $\texttt{spf}(k)$: le premier cas s'applique dès que $\texttt{spf}(k) < i$, et sinon $\texttt{spf}(k) = i = k$ (k est alors premier) et le second cas donne aussi $k = \texttt{spf}(k)$. Bref, l'invariant affirme que $\boldsymbol{\texttt{ppdp}[k] = \texttt{spf}(k) \text{ pour tout } k \in [\![2, \min(i, N)]\!]}$.

Initialisation ($i = 2$). Avant la première itération, `lp` est vide (aucun premier < 2) et `ppdp[k] = k` pour tout k ; comme $\texttt{spf}(2) = 2$, l'invariant est vrai.

Hérédité. Supposons l'invariant vrai au début de chaque itération $2, ..., i$ (avec $i \leq N$), et décrivons l'itération i.

- Par hypothèse $\texttt{ppdp[i]} = \texttt{spf}(i)$, qui vaut i si et seulement si i est premier. Le test `ppdp[i] == i` (ligne 7) ajoute donc i à `lp` exactement lorsque i est premier : après la ligne 8, `lp` contient tous les premiers $\leq i$, dans l'ordre croissant.
- La boucle interne (lignes 10–12) écrit `ppdp[i*lp[j]] = lp[j]`. Les indices modifiés $i \cdot \texttt{lp}[j] \geq 2i > i$ ne touchent aucune case $k \leq i$: l'invariant reste vrai sur $[\![2, \min(i, N)]\!]$.
- Reste la case $k = i+1$ (lorsque $i+1 \leq N$). Si $i+1$ est premier, il n'a jamais pu être marqué — un marquage écrit à un indice $i'' \cdot \texttt{lp}[j]$, produit d'au moins deux facteurs ≥ 2, donc composé — d'où $\texttt{ppdp[i+1]} = i+1 = \texttt{spf}(i+1)$. Si $i+1$ est composé, écrivons $i+1 = i'p$ avec $p = \texttt{spf}(i+1)$; comme p est le plus petit facteur premier du composé $i+1$, on a $p^2 \leq i+1$, donc $i' \geq p \geq 2$, et $2i' \leq i'p = i+1 \leq 2i$ donne $i' \leq i$. À l'itération $i' \leq i$, l'hypothèse de récurrence donne $\texttt{ppdp[i']} = \texttt{spf}(i')$; comme tout diviseur premier de i' est $\geq p$, on a $p \leq \texttt{spf}(i') = \texttt{ppdp[i']}$, et $p \in \texttt{lp}$ (p premier et $p \leq i'$, ajouté au plus tard au début de l'itération i' si $p = i'$), et $i'p = i+1 \leq N$. La boucle interne de l'itération i' atteint bien l'indice de p (les $\texttt{lp}[j] < p$ vérifient $\texttt{lp}[j] < p \leq \texttt{ppdp}[i']$ et $i'\ \texttt{lp}[j] < i'p \leq N$, donc elle ne s'arrête pas avant) et exécute donc `ppdp[i+1] =` $p = \texttt{spf}(i+1)$. Enfin, cette case n'est marquée qu'à cette seule itération : tout marquage $i''q = i+1$ (avec $q \in \texttt{lp}$ premier) vérifie $q \leq \texttt{ppdp}[i''] = \texttt{spf}(i'')$ par récurrence forte, puisque $i'' \leq (i+1)/2 \leq i$; or q divise $i+1$ donc $q \geq p$, et si $q > p$ alors p divise i'' (car p divise $i+1$ et $p \neq q$), d'où $\texttt{spf}(i'') \leq p < q$, contradiction ; donc $q = p$ et $i'' = i'$. Ainsi, au début de l'itération $i+1$, on a bien $\texttt{ppdp[i+1]} = p = \texttt{spf}(i+1)$.

L'invariant est donc vrai au début de l'itération $i+1$, ce qui achève la récurrence.

Conclusion. À la sortie de la boucle ($i = N + 1$), l'invariant donne : `lp` est la liste des nombres premiers $\leq N$, et `ppdp[k]` $=$ `spf`(k) pour tout $k \in [\![2, N]\!]$. Ainsi, pour tout entier $N \geq 2$, `mystere1`(N) renvoie un tuple constitué de
- ▷ la liste des nombres premiers inférieurs ou égaux à N
- ▷ une liste de longueur $N + 1$ dont le k-ième élément (pour tout k entre 2 et N) est le plus petit diviseur premier de k (et 0 en 0, 1 en 1, inchangés depuis l'initialisation).

2. Le corps de la boucle interne (ligne 11) effectue un marquage `ppdp[i*lp[j]] = lp[j]` en temps constant ; comptons le nombre total de tels marquages.

Soit $n \geq 2$ un nombre composé, $n \leq N$. Alors n s'écrit de manière unique $n = pQ$ avec p le plus petit diviseur premier de n et tous les diviseurs premiers de Q supérieurs ou égaux à p. Autrement dit, l'écriture de n sous la forme $n = i * \texttt{lp}[j]$ (ligne 11) où `lp[j] <= ppdp[i]` (et `j < len(lp)` pour la bonne définition, et `i * lp[j] <= N` car $n \leq N$) existe et est unique : elle correspond à $i = Q$ et $\texttt{lp}[j] = p$. Chaque entier composé $\leq N$ est donc marqué **exactement une fois**, et les nombres premiers ne sont jamais marqués.

Le nombre total d'exécutions du corps de la boucle interne est ainsi majoré par le nombre d'entiers composés $\leq N$, donc par N. En ajoutant, pour chacune des $N - 1$ valeurs de i, le coût $O(1)$ de l'itération externe et du test d'arrêt de la boucle interne, on effectue $O(N)$ opérations élémentaires au total : la complexité est en

$$\boxed{O(N)}.$$

(C'est la condition d'arrêt `lp[j] <= ppdp[i]`, qui interrompt la boucle interne dès le plus petit diviseur premier de i, qui garantit ce marquage unique et rend le crible linéaire.)

3. On peut effectuer plusieurs commentaires:
- ▷ Tout d'abord l'algorithme du crible d'Ératosthène peut **s'adapter** sans complexité supplémentaire pour non seulement renvoyer la liste des nombres premiers mais aussi déterminer les plus grands (ou plus petits) diviseurs premiers.
- ▷ A priori, par un raisonnement similaire à celui de la première question, la complexité de l'algorithme d'Ératosthène vu en cours est en $O(n \ln(\ln(n)))$. Il se trouve qu'avec l'algorithme légèrement modifié de la question 2 on obtient en fait une complexité en $O(n)$. On parle parfois de **crible linéaire** pour cet algorithme. Mais si en théorie $n \ll n \ln(\ln(n))$ quand $n \to +\infty$, en pratique cette différence est extrêmement faible.
- ▷ Enfin, on s'est intéressé ici à la complexité «temporelle» des algorithmes, c'est à dire au nombre d'opérations élémentaires nécessaires. Cette approche admet deux critiques:
  - ▷ en pratique les temps d'accès dans la liste `lp` mais surtout les calculs de produit ne sont plus nécessairement en temps constant si les entiers sont grands,
  - ▷ surtout, il faudrait dans de tels algorithmes considérer la complexité «**spatiale**», c'est à dire la taille utilisée en mémoire pour stocker les variables et liste.

Solution pour l'exercice 82 · Énoncé p. 327 · Indication p. 342 (Crible mystère II)

1. On montre par récurrence sur i (éventuellement à rédiger) qu'à l'étape i de la boucle «`while i<=N:`»:

- ▷ `lp` contient tous les nombres premiers inférieurs à i c'est à dire

$$\texttt{lp}_i = [p \in \mathcal{P} \mid p \leq i]$$

- ▷ `pgdp` est la liste telle que pour tout k (plus grand que 2), `pgdp[k]` est
  - ▷ le plus grand diviseur premier de k présent dans la liste `lp` si il y en a
  - ▷ k si il n'admet pas de diviseur dans cette liste

c'est à dire

$$\forall k \in [\![2, N]\!], \texttt{pgdp}_i[k] = \begin{cases} \max(\{p \in \texttt{lp}_i \mid p \text{ divise } k\}) & \text{si } \exists p \in \texttt{lp}_i \text{ , } p \text{ divise } k \\ k & \text{sinon.} \end{cases}$$

Et par conséquent pour tout entier $N \geq 2$, `mystere2`(N) renvoie un tuple constitué de

- ▷ la liste des nombres premiers inférieurs à N
- ▷ une liste de longueur $N+1$ dont le k-ième élément (pour tout k entre 2 et N) est le plus grand diviseur premier de k (et 0 en 0, 1 en 1).

2. À l'étape i de la boucle `while` on effectue dans tous les cas $O(1)$ opérations (le `if` et `i = i + 1`) et si i est premier on effectue ensuite $\left\lfloor \frac{N}{i} \right\rfloor$ (le nombre de k t.q $i \times k \leq N$) fois un nombre constant d'opérations (un produit, une affectation puis une somme).

La complexité est donc en

$$O(N) + O\left(\sum_{\substack{p \text{ premier} \\ p \leq N}} \left\lfloor \frac{N}{p} \right\rfloor \right).$$

En admettant l'équivalent (peut s'obtenir à partir d'un encadrement de $\pi(x)$, cf DM idoine), $\sum_{\substack{p \text{ premier} \\ p \leq n}} \frac{1}{p} \sim \ln(\ln(n))$ lorsque $n \to +\infty$, cela donne finalement une complexité en

$$\boxed{O(N \ln(\ln(N)))}.$$

Solution pour l'exercice 89 · Énoncé p. 329 · Indication p. 343 (Bernoulli itéré)

On procède par exemple par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

- ▷ **Initialisation**

Pour $n = 1$ on a, pour tout entier a impair, $a^2 \equiv 1[8]$.

- ▷ **Hérédité**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et supposons que pour tout entier a impair, $a^{2^n} \equiv 1[2^{n+2}]$ c'est à dire que

$$2^{n+2} \mid a^{2^n} - 1.$$

Soit $a \in \mathbb{Z}$ impair. Par identité remarquable on a la factorisation

$$a^{2^{n+1}} - 1 = (a^{2^n} - 1)(a^{2^n} + 1)$$

par hypothèse de récurrence, 2^{n+2} divise $a^{2^n} - 1$, et par imparité de a, 2 divise $a^{2^n} + 1$.

Par conséquent 2^{n+2+1} divise $a^{2^{n+1}}-1$.

▷ **Conclusion**

Par récurrence on a bien pour tout entier $n \geq 1$ et tout entier a impair

$$a^{2^n} \equiv 1[2^{n+2}].$$

On remarque que la récurrence proposée correspond en fait à la factorisation directe.

$$a^{2^n}-1 = (a-1)(a+1)(a^2+1)(a^4+1)\cdots\left(a^{2^{n-1}}+1\right).$$

Chapitre 12

Suites et Limites

Énoncés 381
Calculs explicites 381
Définitions équivalentes 386
Petites manipulations 386
Encadrements théoriques 389
Autour des valeurs d'adhérence 393
Exemples et contre-exemples 395
Densité 397
Vers la topologie 398
Autour de Cesàro 399
Vers les séries 403
Développement asymptotiques de suites non explicites 406
Limsup et liminf 409
Indications 412
Solutions 423

Énoncés

Faire régulièrement les exercices idoines du cahier de calcul.

Calculs explicites

Exercice 1 (◔★ Puissances)
Donner **sans justification**, si elle existe, la limite quand $n \to +\infty$ de chacune des expressions suivantes (sans se préoccuper de la bonne définition des suites)

1. $\frac{4n-2n^2+\sqrt{n}}{8(n+1)^2-5n^3}$
2. $\frac{3n^2+\sqrt{n^5}}{n(n+8)}$
3. $\frac{3n^3-n(n^2+2)}{5n^3+\sqrt{n}-n}$
4. $(-2(n+1)^3+3n^2+1)(n+5)^{-2}$
5. $\frac{\sqrt{3n+\sqrt{n}}+2}{\sqrt{(n+1)^2-n^2}}$
6. $\left(2(n+1)^5-2n^5-10(n-1)^4\right)^{-1}n^3$
7. $\frac{n^3-4n^2+n-n^5}{4n^3+7n-3\sqrt{n^3}}$
8. $(n+1)^4-\left(n^2+3\right)^2+5(n+1)$
9. $\frac{(n+1)^6+1}{1+n^6}$
10. $\frac{(n+2)^2-(n-1)^2-6n}{\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{n}}}}$

Solution p. 423

Exercice 2 (◔★ Géométrique)
Donner **sans justification**, si elle existe, la limite quand $n \to +\infty$ de chacune des expressions suivantes (sans se préoccuper de la bonne définition des suites)

1. $(3^n+2)(4^{-n}+2^n)$
2. $\frac{2^{3n}-3^{2n}}{5^n-7}$
3. $\frac{(-2)^n+3^{-n}}{4^{-n}+4^n-2(-1)^n}$
4. $\left(\sqrt{2}^n-3^n+5^{-2n}\right)\left(\frac{4}{3^n}+\frac{3}{4^n}\right)$
5. $\left((-3)^n+3^n\right)\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$
6. $\frac{7+5(-4)^n}{2^{2n}-5}\times\frac{(-3)^n-\sqrt{7}^n}{2^n-3^n}$

Solution p. 423

Exercice 3 (◔★ Puissances et géométriques)
Donner **sans justification**, si elle existe, la limite quand $n \to +\infty$ de chacune des expressions suivantes (sans se préoccuper de la bonne définition des suites)

1. $\frac{n-\sqrt{n}+2^{-3n}}{(n+5)^3-n^5}$
2. $\frac{(-1)^n+n}{n}$
3. $\left(\left(\frac{1}{3}\right)^n-(n+1)^3+\frac{n}{2^n+n}\right)\left(\frac{1}{n^2+5}+\frac{(-1)^n}{2^n}\right)$
4. $\frac{\sqrt{n}3^n-3n^5 2^n-(n+\sqrt{n})^2}{3n^2-\sqrt{n+7}+\left(\sqrt{3}\right)^n}$
5. $\frac{\ln(n^7)}{n+1}$
6. $\left((3n+2)^3 2^n-(6n-2)^2 2^n\right)\left(\frac{n^5}{3^n}-\frac{3}{n2^n}\right)$

Solution p. 423

Exercice 4 (◑★▫ Algorithme babylonien)
Soit $a>0$. Soit $u_0>0$. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = u_0$$
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right).$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on considère l'erreur relative

$$\delta_n = \frac{x_n - \sqrt{a}}{\sqrt{a}}.$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\delta_{n+1} = \frac{\delta_n^2}{2(1+\delta_n)}.$$

4. Conclure qu'il existe $C>0$ et $q \in]0,1[$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, |\ \delta_n\ | \leq C q^{2^n}.$$

On parle alors de **convergence quadratique**.

5. ▫ Illustrer numériquement cette convergence dans le cas $a=2$ et $u_0=2$.

Commenter.

Indication p. 412 · Solution p. 423

Exercice 5 (◔★ Quelques sommes quasi-explicites)
Déterminer les limites éventuelles des suites suivantes

1. Selon $q \in \mathbb{C}$,

$$\left(\sum_{k=0}^{n} q^k\right)_{n\in\mathbb{N}}.$$

2. Pour $\alpha > 0$,

$$\left(\frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n} \lfloor k\alpha \rfloor\right)_{n\in\mathbb{N}^*}.$$

3.

$$\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{k!}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Indication p. 412 · Solution p. 429

Exercice 6 (◔★♣ Des limites plus qu'usuelles)

1. Soit $a \in \mathbb{R}$.

Montrer que

$$\left(1+\frac{a}{n}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^a.$$

2. Montrer qu'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \gamma.$$

Indication p. 412 · Solution p. 431

Exercice 7 (◑☆ Suite quasi-arithmético-géométrique)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{C})^{\mathbb{N}}$.

On suppose qu'il existe $a \in \mathbb{C}$ tel que $|a| < 1$ et $b \in \mathbb{C}$ tels que

$$u_{n+1} - au_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} b.$$

Montrer que

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{b}{1-a}.$$

Indication p. 412

Exercice 8 (●☆ Des découpages plus ardus)

1. Soit $x \in \mathbb{R}$.

Déterminer, si elle existe, la limite quand $n \to +\infty$ de

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k+x}{n}\right)^n.$$

2. Déterminer, si elle existe, la limite quand $n \to +\infty$ de

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^k.$$

Indication p. 412

Exercice 9 (◑★ Un extrait cesàresque d'oral PC)
Montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k}\frac{2^k}{2^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2.$$

Indication p. 413 · Solution p. 432

Exercice 10 (◑★ Suite récurrente de complexes)
On considère la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} z_0 & = i \\ \forall n \in \mathbb{N}, z_{n+1} & = \frac{z_n + |z_n|}{2}. \end{cases}$$

1. Faire un schéma.

2. Montrer que la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

Indication p. 413

Exercice 11 (◑★ Bifurcation selon la condition initiale: cas pratique)
Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = x$$
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n^2}{2^n}.$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$.

Déterminer une expression explicite de u_n en fonction de x et de $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{2^k}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{2^k}$.

1. Montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.

2. En déduire qu'il existe $L \in \mathbb{R}$ tel que $S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} L$.

3. Conclure qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ tel que

- ▹ Si $x > \ell$ alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$,
- ▹ Si $x < \ell$ alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Indication p. 413 · Solution p. 434

Exercice 12 (◕★ Bifurcation selon la condition initiale: cas théorique)
Soient

- ▹ $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ croissante et tendant vers $+\infty$ en $+\infty$,
- ▹ $g \in \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R}_+)$ décroissante et tendant vers 0 en $+\infty$,
- ▹ $x \in \mathbb{R}_+^*$.

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = x$$
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)g(n).$$

1. Montrer que si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas croissante alors elle est décroissante à partir d'un certain rang.

2. Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

3. Conclure que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ ou $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

4. Montrer qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ tel que

- ▹ Si $x > \ell$ alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$,
- ▹ Si $x < \ell$ alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Indication p. 413

Définitions équivalentes

Exercice 13 (◔★ Définitions équivalentes de limites finies)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{C}$.

Montrer l'équivalence entre les propositions suivantes:

(i) $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - \ell\ | \leq \varepsilon$.
(ii) $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N, |u_n - \ell\ | \leq \varepsilon$.
(iii) $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq 3N^2, |u_n - \ell\ | \leq \varepsilon$.
(iv) $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - \ell\ | < \varepsilon$.
(v) $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - \ell\ |^2 < \varepsilon$.
(vi) $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - \ell\ | \leq \frac{\varepsilon}{12}$.
(vii) $\forall \varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - \ell\ | \leq \varepsilon$.

Exercice 14 (◔★ Définitions équivalentes de limites infinies)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Montrer l'équivalence entre les propositions suivantes:

(i) $\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \geq A$.
(ii) $\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N, u_n \geq A$.
(iii) $\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n > A$.
(iv) $\forall A \in \mathbb{R}_+, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \geq A$.
(v) $\forall A \in \mathbb{N}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \geq A$.

Exercice 15 (◔★ Définitions équivalentes de densité)
Soit $A \subset \mathbb{R}$.

Montrer l'équivalence entre les propositions suivantes:

(i) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, A \cap]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\neq \varnothing$.
(ii) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, A \cap [x - \varepsilon, x + \varepsilon] \neq \varnothing$.
(iii) $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$ t.q $a < b, A \cap]a, b[\neq \varnothing$.
(iv) $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$ t.q $a < b, A \cap [a, b] \neq \varnothing$.
(v) $\forall r \in \mathbb{Q}, \forall n \in \mathbb{N}^*, A \cap]r - \frac{1}{n}, r + \frac{1}{n}[\neq \varnothing$.

Petites manipulations

Exercice 16 (◔★♣ Quelques applications directes)

1. Montrer que la somme d'une suite convergente et d'une suite divergente est divergente.

2. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles.

On suppose que les deux suites convergent et on note ℓ_1 et ℓ_2 leurs limites respectives.

Montrer que **si** $\ell_1 < \ell_2$ **alors** à partir d'un certain rang, $u_n < v_n$.

3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Montrer que **si** $u_n \to 0$ quand $n \to +\infty$ **alors** $\prod_{k=1}^{n} u_k \to 0$ quand $n \to +\infty$.

Exercice 17 (◔★ Retour à la logique)
Soit $\mathcal{P}(n)$ un prédicat dépendant de $n \in \mathbb{N}$.

Montrer que

$$(\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \mathcal{P}(n)) \Rightarrow (\forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N, \mathcal{P}(n))$$

et traduire en français cet énoncé.

Que dire de la réciproque ?

Exercice 18 (◔★♠ Maximum et convergence)
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles.

On suppose qu'il existe $\ell_u, \ell_v \in \overline{\mathbb{R}}$ telles que

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_u$$
$$v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_v.$$

Montrer que

$$\max(u_n, v_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \max(\ell_u, \ell_v)$$
$$\min(u_n, v_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \min(\ell_u, \ell_v).$$

Indication p. 413

Exercice 19 (◔★ Laplacien unidimensionnel discret)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1} = 0.$$

Que dire de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Indication p. 413 · Solution p. 438

Exercice 20 (◔★ Suites à valeurs entières convergentes)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ une suite à valeurs **entières**.

Montrer l'équivalence entre
(i) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
(ii) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire (c'est à dire constante à partir d'un certain rang.)

Indication p. 414

Exercice 21 (◑★ Vrac I)
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [0,1]^{\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [0,1]^n$ deux suites à valeurs dans $[0,1]$.

1. Montrer que **si** $u_n + v_n \to 2$ lorsque $n \to +\infty$ **alors** $u_n \to 1$ et $v_n \to 1$ lorsque $n \to +\infty$.
2. Montrer que **si** $u_n v_n \to 1$ lorsque $n \to +\infty$ **alors** $u_n \to 1$ et $v_n \to 1$ lorsque $n \to +\infty$.

Indication p. 414 · Solution p. 439

Exercice 22 (◔★ Une petite astuce)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.
Montrer que **si** $\left(\frac{u_n}{u_n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \neq 1$, **alors** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Indication p. 414 · Solution p. 440

Exercice 23 (◔☆ Rien à voir avec Cesàro)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose

$$M_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k.$$

1. Montrer que **si** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée **alors** $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
2. Montrer que **si** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante (dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) **alors** $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
3. Que dire des réciproques des propriétés précédentes ?

Indication p. 414 · Solution p. 440

Exercice 24 (◑☆ Faire le grand écart nuit à la convergence)
Montrer que toute suite réelle convergente admet un plus petit élément ou admet un plus grand élément.

Indication p. 414

Exercice 25 (◔☆ Adjacence ou explicite)
Soit $t \in]0,1[$.

On considère les suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par

$$(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$$
$$\forall n \in \mathbb{N}, (u_{n+1}, v_{n+1}) = (tu_n + (1-t)v_n, (1-t)u_n + tv_n).$$

Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent et déterminer leurs limites.

Indication p. 414 · Solution p. 442

Encadrements théoriques

Exercice 26 (◔★ Protocritère de d'Alembert)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs.

On suppose qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell.$$

1. Montrer que pour tout $q > \ell$ la suite $\left(\frac{u_n}{q^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
2. En déduire que pour tout $q > \ell$ on a
$$u_n = o_{n\to+\infty}(q^n).$$
3. Montrer que pour tout $0 \leq q < \ell$ on a
$$q^n = o_{n\to+\infty}(u_n).$$
4. Que peut-on dire si $q = \ell$?

Indication p. 415 · Solution p. 442

Exercice 27 (◔★ Protocritère de Cauchy)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs.

On suppose qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\lim_{n\to+\infty} (u_n)^{\frac{1}{n}} = \ell.$$

1. Montrer que pour tout $q > \ell$ la suite $\left(\frac{u_n}{q^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
2. En déduire que pour tout $q > \ell$ on a
$$u_n = o_{n\to+\infty}(q^n).$$
3. Montrer que pour tout $0 \leq q < \ell$ on a
$$q^n = o_{n\to+\infty}(u_n).$$
4. Que peut-on dire si $q = \ell$?

Indication p. 415 · Solution p. 444

Exercice 28 (◔★ Deux cas particuliers des protocritères)
1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$.

   On suppose que
   $$\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}.$$
   Montrer que
   $$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$.

   On suppose que
   $$(u_n)^{\frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}.$$
   Montrer que
   $$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$
3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$.

   Montrer que
   $$\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2} \Rightarrow (u_n)^{\frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}.$$

Indication p. 415

Exercice 29 (◕★ Encadrement par des suites récurrentes)
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs.

Soit $u_0 > 0$. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = u_0$$
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{a_n + u_n}$$

1. On suppose dans cette question que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **constante**. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
2. On suppose dans cette question que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **majorée**. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.
3. On suppose dans cette question que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **convergente**. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Indication p. 415 · Solution p. 445

Exercice 30 (◔★♣ Début du critère spécial des séries alternées)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite réelle **décroissante** et **convergeant vers 0**.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k u_k.$$

1. Montrer que les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.
2. En déduire que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Indication p. 415

Exercice 31 (◑★ Moyennes mixtes)
Soient α et β deux réels strictement positifs.

1. On définit les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$(a_0, b_0) = (\alpha, \beta)$$
$$\forall n \in \mathbb{N}, (a_{n+1}, b_{n+1}) = \left(\sqrt{a_n b_n}, \frac{a_n + b_n}{2}\right)$$

1.1. Expliquer brièvement pourquoi ces suites sont bien définies.

1.2. Montrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

1.3. En déduire que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

1.4. Montrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ont la même limite.

Cette limite est appelée moyenne arithmético-géométrique de α et β et parfois notée $\mathrm{agm}(\alpha, \beta)$.

2. On définit les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$(a_0, b_0) = (\alpha, \beta)$$
$$\forall n \in \mathbb{N}, (a_{n+1}, b_{n+1}) = \left(\frac{1}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_n} + \frac{1}{b_n}\right)}, \frac{a_n + b_n}{2}\right).$$

Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = \sqrt{\alpha\beta}.$$

3. On définit les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$(a_0, b_0) = (\alpha, \beta)$$
$$\forall n \in \mathbb{N}, (a_{n+1}, b_{n+1}) = \left(\frac{1}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_n} + \frac{1}{b_n}\right)}, \sqrt{a_n b_n}\right).$$

Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = \frac{1}{\mathrm{agm}\left(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}\right)}.$$

Indication p. 415 · Solution p. 450

Exercice 32 (◑★ Attention aux quantifications)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ une suite telle que

$$\forall A > 0, \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq \frac{A}{n} + \frac{1}{A}.$$

Montrer que

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Indication p. 416 · Solution p. 452

Autour des valeurs d'adhérence

Exercice 33 (◔★♣ Construction d'extractrices)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ une suite.

1. Soit $A \subset \mathbb{C}$. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes
   (i) $\exists \varphi$ extractrice , $\forall n \in \mathbb{N}, u_{\varphi(n)} \in A$.
   (ii) $\forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N, u_n \in A$.
   (iii) $\{n \in \mathbb{N} \mid u_n \in A\}$ est infini.
2. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes
   (i) $\exists \varphi$ extractrice , $u_{\varphi(n)} \to \alpha$.
   (ii) $\forall \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N, |u_n - \alpha| \leq \varepsilon$.
   (iii) $\forall \varepsilon > 0, \{n \in \mathbb{N} \mid |u_n - \alpha| \leq \varepsilon\}$ est infini

Indication p. 416

Exercice 34 (◔★ Extractions croisées)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite.

On suppose que les suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent.

Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Indication p. 416 · Solution p. 453

Exercice 35 (◔★♠ Convergence et unicité de la valeur d'adhérence)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite **bornée**.

On suppose qu'il existe un réel $\ell \in \mathbb{R}$ tel que:

«pour toute extractrice φ, **si** $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge **alors** $u_{\varphi(n)} \to \ell$ quand $n \to +\infty$.»

Montrer que $u_n \to \ell$ quand $n \to +\infty$.

Indication p. 416

Exercice 36 (◑★ Unicité des valeurs d'adhérences des coordonnées)
Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites réelles.

On suppose que lorsque $n \to +\infty$,

$$a_n + b_n + c_n \to 0$$
$$e^{a_n} + e^{b_n} + e^{c_n} \to 3$$

et on cherche à montrer que lorsque $n \to +\infty$,

$$a_n \to 0, b_n \to 0, c_n \to 0.$$

1. Montrer que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bornées.
2. Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tels que
$$\left(e^\alpha + e^\beta + e^\gamma\right) - ((1+\alpha) + (1+\beta) + (1+\gamma)) = 0.$$
Montrer que $(\alpha, \beta, \gamma) = (0, 0, 0)$.
3. Soit φ une extraction telle que les suites extraites $\left(a_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, $\left(b_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(c_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent. Que dire de leurs limites respectives ?
4. Conclure.

Indication p. 416

Exercice 37 (◑☆ Un exemple de valeurs d'adhérences)
Déterminer l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $\left(\cos(\sqrt{n})\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Indication p. 416

Exercice 38 (◕☆ Adhérence lorsque l'écart tend vers 0)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

On suppose que

$$\lim_{n\to+\infty}(u_{n+1}-u_n)=0.$$

Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un intervalle fermé de $\overline{\mathbb{R}}$.

Indication p. 416

Exercice 39 (◑★ Extractions monotones ou «Vue sur la mer»)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

On considère l'ensemble

$$V=\{n\in\mathbb{N}\mid \forall m>n, u_m<u_n\}.$$

1. On suppose que V est infini. Montrer qu'il existe une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ strictement décroissante.
2. Faire un schéma.
3. On suppose V fini. Montrer qu'il existe une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante.
4. En déduire la propriété suivante:

   «De toute suite réelle on peut extraire une suite monotone».
5. En utilisant la question précédente, proposer une autre démonstration du théorème de Bolzano-Weierstrass.

Indication p. 416 · Solution p. 453

Exemples et contre-exemples

Exercice 40 (◔★ Attention à la continuité)
Déterminer, si elle existe,

$$\lim_{n\to+\infty}\lfloor 2-\frac{1}{n}\rfloor$$

Commenter.

Indication p. 417 · Solution p. 455

Exercice 41 (◔★ Étude de contre-exemples)

1. Étudier le caractère borné et la convergence éventuelle de la suite $\left((-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Étudier le caractère majoré et la limite éventuelle de $\left(n(1+(-1)^n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Étudier les variations et la limite éventuelle de $\left(n+3(-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. Étudier l'ensemble des valeurs d'adhérence et la convergence éventuelle de $\left(n^{(-1)^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Indication p. 417

Exercice 42 (◕☆ Arithméticogéométrique par puissance de 2)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe bornée.

On suppose qu'il existe $b\in\mathbb{C}$ tel que

$$u_n+\frac{u_{2n}}{2}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} b.$$

Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Indication p. 417

Exercice 43 (◔★ Forme indéterminée)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\left(\mathbb{R}_+^+\right)^{\mathbb{N}}$ une suite strictement positive.

Expliciter deux suites strictement positives $(a_n)_{n\in\mathbb{N}},(b_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\left(\mathbb{R}_+^+\right)^{\mathbb{N}}$ telles que

$$a_n\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}1$$
$$b_n\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty$$
$$\forall n\in\mathbb{N},(a_n)^{b_n}=u_n.$$

Commenter.

Indication p. 417

Exercice 44 (◑★ Un peu de construction de contre-exemples)

1. Telle que $u_{n+1}-u_n\to 0$ lorsque $n\to+\infty$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.
2. Telle que $u_{n+1}-u_n\to 0$ lorsque $n\to+\infty$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée, et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

Indication p. 417

Exercice 45 (◕☆ Un peu de construction de contre-exemples bis)
Existe-t-il une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_{n+1}-u_n \to 0$ lorsque $n\to+\infty$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée, et $\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge ?

Indication p. 417

Exercice 46 (◔☆ Un contre-exemple à la réciproque de Cauchy implique d'Alembert);)
Soit $\ell \in \mathbb{R}_+$.

Exhiber une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $(u_n)^{\frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ et $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

Indication p. 417

Densité

Exercice 47 (◔★ Densité des dyadiques)
On pose

$$D = \left\{\frac{a}{2^n}, (a,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}\right\}.$$

Montrer que D est dense dans $\mathbb{R}$.

Indication p. 417

Exercice 48 (◑☆ Suite de rationnels convergeant vers un irrationnel)
Soit $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

Soient $(p_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{N}^*)^{\mathbb{N}}$ tels que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{p_n}{q_n} = x.$$

Montrer que, lorsque $n\to+\infty$, on a $q_n\to+\infty$ et $|p_n|\to+\infty$.

Indication p. 417 · Solution p. 455

Exercice 49 (◔☆ Caractérisation de la densité à l'aide d'ouvert)
La définition de parties ouvertes est celle de l'exercice 51.

Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes:
(i) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, A \cap]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\neq \varnothing$
(ii) pour toute partie U ouverte non vide de $\mathbb{R}$, $A \cap U \neq \varnothing$.

Indication p. 418

Vers la topologie

Exercice 50 (◑★♠ Complétude de $\mathbb{R}$)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite de réels.

On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **une suite de Cauchy** si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p \geq N, \forall q \geq N, |u_p - u_q| \leq \varepsilon.$$

1. Montrer que toute suite convergente est de Cauchy.
2. À l'aide du théorème de Bolzano-Weierstrass montrer que toute suite de Cauchy est convergente.

Indication p. 418

Exercice 51 (◔★ Ouverts)
Une partie U de $\mathbb{R}$ est dite **ouverte** ssi

$$\forall x \in U, \exists \varepsilon > 0,]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset U.$$

1. Donner un exemple de partie ouverte. Donner un exemple de partie non-ouverte.
2. Montrer que
- ▷ Une union quelconque de parties ouvertes est ouverte.
- ▷ Une intersection finie de parties ouvertes est ouverte.

3. Donner un exemple d'intersections de parties ouvertes qui n'est pas ouverte.

Indication p. 418

Exercice 52 (◕★ Vers Baire)
On utilise dans cet exercice la notion de partie ouverte définie à l'exercice 51.

On cherche à montrer le théorème de Baire: «Une intersection dénombrable d'ouverts denses est dense».

1. Donner un exemple de partie ouverte dense.
2. Soit U un ouvert dense et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \alpha < \beta$. Montrer qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2, a < b$ tel que
$$[a, b] \subset U \cap]\alpha, \beta[.$$

Soient $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille de parties ouvertes et denses.

Soit V un ouvert de $\mathbb{R}$.

1. Montrer qu'il existe $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tels que
$$[a_0, b_0] \subset U_0 \cap V$$
$$\forall n \in \mathbb{N}, [a_{n+1}, b_{n+1}] \subset U_{n+1} \cap]a_n, b_n[.$$
2. Montrer que
$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n] \neq \varnothing.$$
3. En déduire que
$$\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n\right) \cap V \neq \varnothing.$$
4. Conclure.

Indication p. 418

Autour de Cesàro

Exercice 53 (◔★♠ Cesàro)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose
$$M_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k.$$

1. Montrer que **si** $u_n \to 0$ quand $n \to +\infty$, **alors** $M_n \to 0$ quand $n \to +\infty$.
2. Soit $\ell \in \mathbb{C}$.

   Montrer que **si** $u_n \to \ell$ quand $n \to +\infty$, **alors** $M_n \to \ell$ quand $n \to +\infty$.
3. Que dire de la réciproque ?

Indication p. 418

Exercice 54 (◔★ Cesàro version cut-off)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose

$$M_n = \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{n}\right) u_k.$$

1. Montrer que **si** $\sum_{k=0}^{n} u_k \to 0$ quand $n \to +\infty$, **alors** $M_n \to 0$ quand $n \to +\infty$.
2. Que dire de la réciproque ?

Indication p. 418

Exercice 55 (◔★ Cesàro infini)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose

$$M_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} u_k.$$

Soit $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Montrer que **si** $u_n \to \ell$ quand $n \to +\infty$, **alors** $M_n \to \ell$ quand $n \to +\infty$.

Indication p. 418

Exercice 56 (◔★ Cesàro géométrique)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose

$$G_n = \left(\prod_{k=1}^{n} u_k\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Soit $\ell \in [0, +\infty]$. Montrer que **si** $u_n \to \ell$ quand $n \to +\infty$, **alors** $G_n \to \ell$ quand $n \to +\infty$.

Indication p. 418

Exercice 57 (◔★ Cesàro pondéré)
Soit $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs telle que

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \rho_k = +\infty.$$

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ une suite complexe.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose

$$M_n = \frac{\sum_{k=1}^{n} \rho_k u_k}{\sum_{k=1}^{n} \rho_k}.$$

Soit $\ell \in \mathbb{C}$.

Montrer que **si** $u_n \to \ell$ quand $n \to +\infty$, **alors** $M_n \to \ell$ quand $n \to +\infty$.

Indication p. 419

Exercice 58 (◑☆ Cesàro-Stolz)
Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite réelle strictement croissante et non majorée.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ une suite complexe.

Soit $\ell \in \mathbb{C}$.

Montrer que **si** $\frac{u_{n+1}-u_n}{v_{n+1}-v_n} \to \ell$ quand $n \to +\infty$ **alors** $\frac{u_n}{v_n} \to \ell$ quand $n \to +\infty$.

Indication p. 419

Exercice 59 (◑★ Variante binomiale de Cesàro)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ une suite complexe.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose

$$B_n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u_k.$$

Soit $\ell \in \mathbb{C}$.

Montrer que **si** $u_n \to \ell$ quand $n \to +\infty$, **alors** $B_n \to \ell$ quand $n \to +\infty$.

Indication p. 419 · Solution p. 457

Exercice 60 (◔★ Cesàro produit)
Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ deux suites complexes.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose

$$C_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$.

Montrer que **si** lorsque $n \to +\infty$, $a_n \to \alpha$ et $b_n \to \beta$ **alors** lorsque $n \to +\infty$, $C_n \to \alpha\beta$.

Indication p. 419

Exercice 61 (◑★ Cesàro version spé)
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$ deux suites de termes positifs.

On suppose que

$$u_n = o_{n\to+\infty}(v_n)$$

et

$$\sum_{k=0}^{n} v_k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Montrer que

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = o_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right).$$

Indication p. 419

Exercice 62 (◔★♠ Un début de méthode générale)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs.

On suppose qu'il existe $\alpha > 0$ et $\ell > 0$ tels que

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{u_{n+1}^{\alpha}} - \frac{1}{u_n^{\alpha}}\right) = \ell.$$

Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ tel que

$$u_n \sim \frac{C}{n^{\frac{1}{\alpha}}}.$$

Indication p. 419

Exercice 63 (◔★ Lien entre Cauchy et d'Alembert)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs.

Soit $\ell \in \mathbb{R}_+$.

1. Montrer que **si** $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to \ell$ quand $n \to +\infty$ **alors** $(u_n)^{\frac{1}{n}} \to \ell$ quand $n \to +\infty$.
2. Commenter le lien entre l'exercice 26 et l'exercice 27.

Indication p. 419

Exercice 64 (◔★ Gendarmes version équivalent)
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$,$(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites réelles.

On suppose qu'ÀPCR

$$g_n \leq u_n \leq d_n$$

et que

$$g_n \sim d_n.$$

Montrer que

$$u_n \sim g_n.$$

Indication p. 419

Exercice 65 (◔★ Toujours de la place)
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites.

On suppose que

$$u_n = o_{n\to+\infty}(v_n).$$

Montrer qu'il existe une $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$u_n = o_{n\to+\infty}(w_n) \quad \text{et} \quad w_n = o_{n\to+\infty}(v_n).$$

Indication p. 419

Vers les séries

Les exercices de cette partie seront revus dans le chapitre sur les séries.

Exercice 66 (◔★♣ Divergence grossière)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

Montrer que **si** $u_n \to .\neg 0$ quand $n \to +\infty$ **alors** $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

Que dire de la réciproque ?

Indication p. 419 · Solution p. 458

Exercice 67 (◔★ Sommes de Riemann)
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}.$$

1. Montrer que si $\alpha \leq 1$ alors $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.
2. Montrer que si $\alpha > 1$ alors $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Indication p. 420

Exercice 68 (◔★ Critères de d'Alembert et de Cauchy)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

1. On suppose qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ tel que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell.$$

- ▹ Montrer que si $\ell \in]1, +\infty]$ alors $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.
- ▹ Montrer que si $\ell \in [0, 1[$ alors $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
- ▹ Que dire si $\ell = 1$?

2. On suppose qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ tel que

$$\lim_{n\to+\infty} (u_n)^{\frac{1}{n}} = \ell.$$

- ▹ Montrer que si $\ell \in]1, +\infty]$ alors $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.
- ▹ Montrer que si $\ell \in [0, 1[$ alors $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
- ▹ Que dire si $\ell = 1$?

Indication p. 420

Exercice 69 (◑★ Critère de Raabe-Duhamel)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

On suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\right).$$

1. Montrer que si $\alpha < 1$ alors $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.
2. Montrer que si $\alpha > 1$ alors $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
3. Que dire si $\alpha = 1$?

Indication p. 420 · Solution p. 458

Développement asymptotiques de suites non explicites

Exercice 70 (◑★ Sinus itéré)
On considère la suite définie par

$$u_0 \in]0,1]$$
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sin(u_n).$$

1. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 1.$$

2. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente on note ℓ sa limite.
3. Montrer que $\sin(\ell) = \ell$ puis en déduire que $\ell = 0$.
4. Étudier la convergence éventuelle de la suite

$$\left(\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}.$$

5. Conclure que

$$u_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}.$$

Indication p. 420 · Solution p. 463

Exercice 71 (◑★ Une méthode classique: cas infini)
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 \in \mathbb{R}_+^*$$
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}.$$

1. Montrer que

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

2. Montrer que

$$u_{n+1}^2 - u_n^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2$$

3. En déduire que

$$u_n^2 \sim 2n.$$

4. Conclure que

$$u_n \sim \sqrt{2n}.$$

Indication p. 420

Exercice 72 (◑★ En autonomie: suite récurrente)
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 \in \mathbb{R}$$
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + e^{-u_n}.$$

Montrer que

$$u_n \sim \ln(n).$$

Indication p. 420 · Solution p. 464

Exercice 73 (◑★ Intersection avec la tangente)

1. Représenter sur le même graphe les courbes d'équations $y = \tan(x)$ et $y = x$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'équation
$$\tan(x) = x$$
admet une et unique solution sur l'intervalle $]n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}[$. On note x_n cette solution.
3. Montrer que $x_n = n\pi + o_{n\to+\infty}(n)$.
4. Montrer que $x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} + o_{n\to+\infty}(1)$.
5. Montrer que $x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + o_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)$.

Indication p. 421

Exercice 74 (◑☆ En autonomie: suite implicite)
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on considère le polynôme

$$P_n(X) = X^n + X^{n-1} + X^{n-2} + \cdots + X^2 + X - 1.$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ P_n admet une unique racine positive notée x_n puis que

$$x_n = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} + o_{n\to+\infty}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n\right).$$

Indication p. 421

Exercice 75 (◔★ Une perturbation régulière, ou pourquoi les chimistes ont raison)
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on considère l'équation

$$x^3 + \frac{1}{n}x - 1 = 0 \tag{1}$$

d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ l'équation (1) admet une et unique solution. On note cette solution $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.
3. On note ℓ la limite. Déterminer un équivalent simple de $(x_n - \ell)_{n\in\mathbb{N}}$.

Indication p. 421

Exercice 76 (◑★ Une perturbation singulière, ou pourquoi il faut écouter les physiciens)
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on considère l'équation

$$\frac{1}{n}x^3 + x^2 + 1 = 0 \tag{1}$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ l'équation (1) admet une et unique solution. On note cette solution $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle ?
3. Déterminer un équivalent simple de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Indication p. 421

Limsup et liminf

Exercice 77 (◑★♠ Limsup et liminf)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \overline{\mathbb{R}}^{\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose

$$s_n = \sup_{k\geq n}(u_k) \quad \text{et} \quad i_n = \inf_{k\geq n}(u_k).$$

1. Montrer que la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et que la suite $(i_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
2. Expliquer pourquoi les deux suites $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(i_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent dans $\overline{\mathbb{R}}$.

On définit les limites supérieures et inférieures de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to+\infty} u_n &= \lim_{n\to+\infty} s_n,\\ &= \lim_{n\to+\infty} \sup_{k\geq n}(u_k),\\ &= \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geq n}(u_k)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to+\infty} u_n &= \lim_{n\to+\infty} i_n,\\ &= \lim_{n\to+\infty} \inf_{k\geq n}(u_k), = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\geq n}(u_k).\end{aligned}$$

1. Montrer que
$$\liminf_{n\to+\infty} u_n \leq \limsup_{n\to+\infty} u_n.$$
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée ssi $\limsup_{n\to+\infty} u_n < +\infty$.

   Énoncer un résultat similaire pour la lim inf.
3. Soit $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

   Montrer que
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \quad \Leftrightarrow \quad \liminf_{n\to+\infty} u_n = \ell = \limsup_{n\to+\infty} u_n.$$

Indication p. 421

Exercice 78 (◔★ Limsup, liminf et opérations)
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ deux suites bornées.

On utilise les notations de l'exercice 77 et on note que comme les suites sont bornées les lim sup et lim inf sont des réels.

1. Montrer que

$$\limsup_{n\to+\infty}(u_n + v_n) \leq \limsup_{n\to+\infty} u_n + \limsup_{n\to+\infty} v_n.$$

2. Soit $\lambda > 0$. Montrer que

$$\limsup_{n\to+\infty}(\lambda u_n) = \lambda \limsup_{n\to+\infty} u_n.$$

3. Montrer que

$$\limsup_{n\to+\infty}(-u_n) = -\liminf_{n\to+\infty} u_n.$$

4. On suppose de plus que les deux suites sont positives.

Montrer que

$$\limsup_{n\to+\infty}(u_n v_n) \leq \limsup_{n\to+\infty} u_n \cdot \limsup_{n\to+\infty} v_n.$$

5. Énoncer des résultats similaires pour la lim inf.

Indication p. 421

Exercice 79 (◕★ Limsup, liminf et valeurs d'adhérences)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite réelle bornée.

On note

$$\mathrm{Adh}\big((u_n)_{n\in\mathbb{N}}\big) = \Big\{\ell \in \mathbb{R} \ \mid\ \exists \varphi \ \text{ extractrice t.q } \ u_{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell\Big\}.$$

On utilise les notations de l'exercice 77 et on note que comme la suite est bornée les lim sup et lim inf sont des réels.

l'ensemble des valeurs d'adhérences de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. Montrer que

$$\limsup_{n\to+\infty} u_n = \max\Big(\mathrm{Adh}\big((u_n)_{n\in\mathbb{N}}\big)\Big)$$

2. Énoncer un résultat similaire pour la lim inf.

Indication p. 421

Exercice 80 (◕★ Lemme de Fekete)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite réelle sous-additive c'est à dire telle que

$$\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2, u_{m+n} \leq u_m + u_n.$$

Montrer qu'il existe $\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ tel que

$$\frac{u_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell.$$

Indication p. 422 · Solution p. 466

Indications

Indication 4 · Énoncé p. 382 (Algorithme babylonien)
Poser $f : x \mapsto \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right)$ avec le bon ensemble de définition.

Faire ensuite un schéma.

1. Déterminer un intervalle stable.
2. Étude $u_{n+1} = f(u_n)$, par exemple monotonie, minoration et continuité. Au pire regarder la question suivante.
3. Injecter.
4. Une récurrence ou bien passer au log et faire comme pour les suites arithmético-géométriques.
5. Par exemple tracer en échelle log l'erreur en fonction de n.

Solution p. 423

Indication 5 · Énoncé p. 383 (Quelques sommes quasi-explicites)

1. Calcul explicite.
2. Encadrement explicite.
3. Sortir le plus grand terme. Essayer de majorer le reste. Se rendre compte qu'il faut sortir un terme de plus. Réussir.

Solution p. 429

Indication 6 · Énoncé p. 383 (Des limites plus qu'usuelles)

1. On rappelle que $\frac{\ln(1+x)}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$.
2. Télescoper ou s'inspirer du DM7 (Stirling).

Solution p. 431

Indication 7 · Énoncé p. 383 (Suite quasi-arithmético-géométrique)
Se ramener à $b = 0$.

Donner un nom (par exemple δ_n) à l'écart $u_{n+1} - au_n$.

Exprimer ensuite pour tout n, u_n en fonction de n et de $(\delta_k)_{0\leq k\leq n}$.

Découper la somme selon la valeur de k.

Indication 8 · Énoncé p. 384 (Des découpages plus ardus)
Faire d'abord les autres exercices de la feuille de TD (notamment ceux sur Cesàro).

Pour le premier découper à αn pour $\alpha \in]0,1[$.

Pour le second découper à n^β avec $\beta \in]0,1[$.

Indication 9 · Énoncé p. 384 (Un extrait cesàresque d'oral PC)
Par exemple découper pour k petit et k grand.

Solution p. 432

Indication 10 · Énoncé p. 384 (Suite récurrente de complexes)
Travailler en module et argument.

À un moment , remarquer que si $\sin(x) \neq 0$ alors

$$\cos(x) = \frac{1}{2}\frac{\sin(2x)}{\sin(x)}$$

peut aider.

Indication 11 · Énoncé p. 385 (Bifurcation selon la condition initiale: cas pratique)
1. Passer au ln et faire une variation de la constante.
2. Pour majorer une somme il suffit de majorer le terme général, par exemple par une autre suite géométrique ou par comparaison avec une intégrale (ou alors calculer explicitement la somme par transformée d'Abel ou dérivation d'une série géométrique).
3. La suite est croissante.
4. Que dire de $e^{2^n y}$ selon le signe de y.

Solution p. 434

Indication 12 · Énoncé p. 385 (Bifurcation selon la condition initiale: cas théorique)
1. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n+1} < u_n$. Appliquer f, multiplier par g.
2. On rappelle qu'une fonction continue sur un segment est bornée.
3. Remarquer qu'une suite décroissante ÀPCR est majorée.
4. Remarquer qu'en notant $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ la suite,$x \mapsto u_n(x)$ est croissante pour $n \in \mathbb{N}$ fixé.

Indication 18 · Énoncé p. 387 (Maximum et convergence)
Traiter à part le cas où une des limites est infinie.

Dans le cas où les deux limites sont finies, remarquer pour tous réels x et y on a

$$\max(x,y) + \min(x,y) = x + y$$
$$\max(x,y) - \min(x,y) = |x - y|.$$

Indication 19 · Énoncé p. 387 (Laplacien unidimensionnel discret)
On peut résoudre l'équation de récurrence linéaire homogène d'ordre 2 (ÉRLHO2) ou bien en posant $\Delta : (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (u_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'opérateur de dérivation discrète se rendre compte que l'équation revient à résoudre $\Delta^2 u = 0$ et que vous savez résoudre $\Delta v = w$ (somme télescopique).

Solution p. 438

Indication 20 · Énoncé p. 387 (Suites à valeurs entières convergentes)
Un sens est immédiat.

Dans l'autre sens, prendre par exemple la définition de la limite avec $\varepsilon = \frac{1}{3}$ et faire un schéma.

Indication 21 · Énoncé p. 388 (Vrac I)

1. Plusieurs façons de procéder
   - ▷ Par compacité si ℓ_u est une valeur d'adhérence de u montrer que $\ell_u = 1$. Conclure par l'exercice 35.
   - ▷ Par contraposée, montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne cv pas vers 1, alors par la majoration, $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne cv pas vers 1.
   - ▷ Remarquer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq 1 - u_n \leq (1 - u_n) + (1 - v_n)$ et conclure par encadrement.
2. Mêmes arguments.

Solution p. 439

Indication 22 · Énoncé p. 388 (Une petite astuce)
Les homographies s'inversent.

Solution p. 440

Indication 23 · Énoncé p. 388 (Rien à voir avec Cesàro)

1. Inégalité triangulaire.
2. Constater que (barycentre), pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M_{n+1} = \frac{n}{n+1}M_n + \frac{1}{n+1}u_{n+1}$ et que si la suite est croissante alors $u_{n+1} \geq M_n$.
3. Pour le premier contre-exemple prendre des termes qui se compensent par exemple $((-1)^n n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   Pour le second prendre des termes tq $u_{n+1} \geq M_n$.

Solution p. 440

Indication 24 · Énoncé p. 388 (Faire le grand écart nuit à la convergence)
Si ce n'est pas le cas, montrer par exemple que la suite ne converge pas (car les écarts sont « grands »).

Indication 25 · Énoncé p. 389 (Adjacence ou explicite)
Montrer que les suites sont adjacentes (faire un schéma).

Ou bien obtenir une expression explicite pour les deux suites pour conclure.

Solution p. 442

Indication 26 · Énoncé p. 389 (Protocritère de d'Alembert)

1. Montrer que le quotient de deux termes successifs tend vers une limite strictement inférieure à 1 donc est inférieure à 1 ÀPCR.
2. Remarquer que si $\ell < q$ alors $\ell < \frac{q+\ell}{2} < q$.
3. Faire de même.
4. Que dire de $(n^\alpha)_{n\in\mathbb{N}^*}$ selon la valeur de α ?

Solution p. 442

Indication 27 · Énoncé p. 390 (Protocritère de Cauchy)
Traiter tout d'abord l'exercice 26.

Traiter ensuite l'exercice 68.

Solution p. 444

Indication 28 · Énoncé p. 390 (Deux cas particuliers des protocritères)

1. Cf exercice 26.
2. Cf exercice 27.
3. Cf exercice 63.

Indication 29 · Énoncé p. 391 (Encadrement par des suites récurrentes)

1. Étude de suite $u_{n+1} = f(u_n)$.
2. Remarquer que $a \mapsto \sqrt{a+x}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$.
3. Soit $\varepsilon > 0$. Encadrer ÀPCR par les suites vérifiant $u^+_{n+1} = \sqrt{(a+\varepsilon)+u^+_n}$ et $u^-_{n+1} = \sqrt{(a-\varepsilon)+u^-_n}$.

Solution p. 445

Indication 30 · Énoncé p. 391 (Début du critère spécial des séries alternées)

1. Calculer pour $n \in \mathbb{N}$, $S_{2(n+1)} - S_{2n}$, $S_{2(n+1)+1} - S_{2n+1}$ et $S_{2n+1} - S_{2n}$.
2. Suites adjacentes. Remarquer que l'on dispose de plus d'un contrôle du reste.

Indication 31 · Énoncé p. 392 (Moyennes mixtes)

1. Montrer par récurrence et par IAG, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$.
2. Remarquer que le produit $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constant. Et que par exemple on a les mêmes variations que dans la première question.
3. Que dire de $\left(\left(\frac{1}{a_n}, \frac{1}{b_n}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$?

Solution p. 450

Indication 32 · Énoncé p. 393 (Attention aux quantifications)
Attention à ne pas écrire $\lim u_n$ avant de montrer la convergence !

Remarquer au brouillon que pour tout A, pour tout $\varepsilon > 0$ ÀPCR, $|u_n| \leq \frac{1}{A} + \varepsilon$.

Au propre, fixer $\varepsilon > 0$ puis $A = \frac{2}{\varepsilon}$ et utiliser la définition.

Solution p. 452

Indication 33 · Énoncé p. 393 (Construction d'extractrices)
Cf cours.

Indication 34 · Énoncé p. 393 (Extractions croisées)
À l'aide de $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ montrer que les termes pairs et impairs convergent vers la même limite.

Méditer sur une généralisation.

Solution p. 453

Indication 35 · Énoncé p. 394 (Convergence et unicité de la valeur d'adhérence)
Sinon exhiber une suite extraite bornée et «loin de ℓ». Par BW en extraire une suite convergeant, mais ne convergeant pas vers ℓ.

Indication 36 · Énoncé p. 394 (Unicité des valeurs d'adhérences des coordonnées)

1. À l'aide des exponentielles majorer les suites.

   À l'aide de la somme en déduire des minorations.
2. Une somme de termes positifs est nulle si et seulement si tous les termes sont nuls. Et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x \geq 1 + x$.
3. C'est $(0, 0, 0)$.
4. Faire une triple extraction pour avoir une extraction commune. Utiliser l'exercice 35.

Indication 37 · Énoncé p. 394 (Un exemple de valeurs d'adhérences)
Montrer qu'il s'agit de $[-1, 1]$.

Regarder aussi l'exercice 38.

Indication 38 · Énoncé p. 395 (Adhérence lorsque l'écart tend vers 0)
L'ensemble des valeurs d'adhérence est toujours fermé.

Pour montrer qu'il s'agit d'un intervalle, prendre a et b des valeurs d'adhérence, $c \in [a, b]$ et $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe une infinité d'entiers n tels que $u_n \in [c - \varepsilon, c + \varepsilon]$.

Indication 39 · Énoncé p. 395 (Extractions monotones ou «Vue sur la mer»)
Faire d'abord l'exercice 33.

Solution p. 453

Indication 40 · Énoncé p. 395 (Attention à la continuité)
A priori si f n'est pas continue on ne peut pas «passer à la limite à l'intérieur de la fonction».

Solution p. 455

Indication 41 · Énoncé p. 396 (Étude de contre-exemples)
Faire des schémas. On obtient:

1. Borné non convergente.
2. Non majoré, sans limite.
3. Non croissante, de limite $+\infty$.
4. Unique valeur d'adhérence $\{0\}$, non convergente.

Indication 42 · Énoncé p. 396 (Arithméticogéométrique par puissance de 2)
Que dire de ℓ si $u_{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$?

Indication 43 · Énoncé p. 396 (Forme indéterminée)
Quitte à passer au ln il suffit de trouver $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $b_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $\frac{\ln(u_n)}{b_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Par exemple que dire de $(\ln(u_n))^2 + n^2$?

La forme indéterminée «$1^{+\infty}$» peut donc correspondre à n'importe quel comportement de suite.

Indication 44 · Énoncé p. 396 (Un peu de construction de contre-exemples)

1. Harmonique.
2. Faire une analogie avec les fonctions. Par exemple que dire de $x \mapsto \cos(\sqrt{x})$.

Indication 45 · Énoncé p. 397 (Un peu de construction de contre-exemples bis)
Oui. Par exemple changer de signe sur des plages de grandes longueurs.

Alternativement définir la suite en fonction de ses sommes de Cesàro précédente (cf astuce de Riemann).

Indication 46 · Énoncé p. 397 (Un contre-exemple à la réciproque de Cauchy implique d'Alembert);)
Par exemple, pour $a, b \in \mathbb{R}_+$ que dire de $\left(a^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} b^{\lceil \frac{n}{2} \rceil}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Indication 47 · Énoncé p. 397 (Densité des dyadiques)
Même preuve que pour les décimaux.

Indication 48 · Énoncé p. 397 (Suite de rationnels convergeant vers un irrationnel)
Supposer que $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers $+\infty$ (pour cela nier formellement).

En extraire une sous-suite bornée, et donc en extraire une sous-suite convergente donc constante (car entière). Borné et extraire pour le numérateur ensuite.

Solution p. 455

Indication 49 · Énoncé p. 398 (Caractérisation de la densité à l'aide d'ouvert)
Remarquer que dans un sens les $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$ sont ouverts, et que dans l'autre si $B \subset C$ et alors $A \cap B \subset A \cap C$.

Indication 50 · Énoncé p. 398 (Complétude de $\mathbb{R}$)
1. Utiliser la définition de la limite.
2. Montrer que toute suite de Cauchy est bornée. Extraire une suite convergente. Montrer que la suite initiale converge vers la même limite.

Indication 51 · Énoncé p. 398 (Ouverts)
1. Un intervalle ouvert (le démontrer). Un intervalle fermé (le démontrer).
2. Pour l'union être inclus dans l'un suffit. Pour l'intersection finie, un minimum de réels strictement positifs est strictement positif.
3. Que dire de $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}]-1-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}[$.

Indication 52 · Énoncé p. 399 (Vers Baire)
1. Par exemple faire une réunion d'intervalles ouverts centrés sur une partie dense.
2. Prendre un point dans l'intersection (existe par densité) et un petit intervalle ouvert autour (existe par caractère ouvert). Dans un intervalle ouvert on peut placer un intervalle fermé.
3. Construire par récurrence à l'aide de la question précédente.
4. Suites adjacentes version segments emboîtés.
5. Constater que l'intersection précédente est contenue dans les deux.
6. RAS

Indication 53 · Énoncé p. 399 (Cesàro)
Découper en deux temps (cf cours, à savoir refaire).

Indication 54 · Énoncé p. 400 (Cesàro version cut-off)
Dans le cas positif faire des schémas de rectangles et de triangles, puis se ramener au cas réel, puis au cas complexe.

Alternativement remarquer qu'il s'agit exactement de Cesàro (en commençant à 0).

Indication 55 · Énoncé p. 400 (Cesàro infini)
Adapter la preuve de Cesàro.

Indication 56 · Énoncé p. 400 (Cesàro géométrique)
Passer au ln. Utiliser Cesàro.

Indication 57 · Énoncé p. 401 (Cesàro pondéré)
Adapter la preuve de Cesàro.

Indication 58 · Énoncé p. 401 (Cesàro-Stolz)
Remarquer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{u_n - u_0}{v_n - v_0} = \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (v_{k+1} - v_k) \frac{u_{k+1} - u_k}{v_{k+1} - v_k}}{\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (v_{k+1} - v_k)}.$$

Indication 59 · Énoncé p. 401 (Variante binomiale de Cesàro)
Essayer d'adapter la preuve de Cesàro.

Se rendre compte de la dépendance en n des coefficients binomiaux.

Mais à k fixé $\binom{n}{k}$ est un polynôme en n.

Solution p. 457

Indication 60 · Énoncé p. 402 (Cesàro produit)
Adapter la preuve de Cesàro, en coupant à des deux côtés (faire un schéma).

Indication 61 · Énoncé p. 402 (Cesàro version spé)
Adapter la preuve de Cesàro.

Voir aussi le cours de l'année prochaine et le « théorème de sommation de relation de comparaison de séries à termes positifs, cas divergent ».

Indication 62 · Énoncé p. 402 (Un début de méthode générale)
Utiliser Cesàro.

Indication 63 · Énoncé p. 403 (Lien entre Cauchy et d'Alembert)
Cesàro sur le ln.

Indication 64 · Énoncé p. 403 (Gendarmes version équivalent)
Attention à ne pas écrire des bêtises à cause des signes.

Faire comme la preuve du théorème des gendarmes.

Indication 65 · Énoncé p. 403 (Toujours de la place)
Moyenne géométrique mais en prenant un module.

Indication 66 · Énoncé p. 404 (Divergence grossière)
Par contraposée, en exprimant u_n en fonction de S_n et S_{n-1}.

La réciproque est fausse, trouver un contre-exemple.

Solution p. 458

Indication 67 · Énoncé p. 404 (Sommes de Riemann)
Comparer avec une intégrale.

Indication 68 · Énoncé p. 405 (Critères de d'Alembert et de Cauchy)
Faire tout d'abord les exercices 26 et 27.

Indication 69 · Énoncé p. 405 (Critère de Raabe-Duhamel)
Passer au ln.

De même que pour 68, prendre un β entre 1 et α et comparer à un calcul explicite (série harmonique).

Solution p. 458

Indication 70 · Énoncé p. 406 (Sinus itéré)
Faire un schéma et utiliser le plan d'étude général.

Pour la fin on pourra utiliser $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o_{x\to 0}(x^3)$ et Cesàro.

Solution p. 463

Indication 71 · Énoncé p. 406 (Une méthode classique: cas infini)
1. Étude de suite $u_{n+1} = f(u_n)$.
2. Calcul explicite.
3. Cesàro.
4. Racine.

Indication 72 · Énoncé p. 407 (En autonomie: suite récurrente)
Des étapes possibles sont:

1. Montrer que
$$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$
2. Montrer que
$$e^{u_{n+1}} - e^{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$
3. En déduire que
$$u_n \sim \ln(n).$$

Solution p. 464

Indication 73 · Énoncé p. 407 (Intersection avec la tangente)
Schéma et TVI pour commencer.

Réécrire la relation implicite comme $x_n - n\pi = \arctan(x_n)$.

Relier de manière générale étudier $\arctan(x)$ revient à étudier $\arctan\left(\frac{1}{x}\right)$.

Indication 74 · Énoncé p. 407 (En autonomie: suite implicite)
Suite géométrique.

Indication 75 · Énoncé p. 408 (Une perturbation régulière, ou pourquoi les chimistes ont raison)
Toujours commencer par un TVI.

Ensuite utiliser le tableau de variation pour obtenir une monotonie et majoration.

Ou se contenter du caractère borné et utiliser l'unicité de la valeur d'adhérence.

Indication 76 · Énoncé p. 408 (Une perturbation singulière, ou pourquoi il faut écouter les physiciens)
À l'aide d'une remise à l'échelle bien choisie se ramener à un exercice proche de 75

Indication 77 · Énoncé p. 409 (Limsup et liminf)

1. Inclusion.
2. Théorème de limite monotone.
3. Commencer par montrer que pour p, q deux entiers
$$\inf_{k\geq q}(u_k) \geq \sup_{k\geq p}(u_k)$$
puis en déduire en deux temps que
$$\sup_{q\in\mathbb{N}} \inf_{k\geq q}(u_k) \leq \inf_{p\in\mathbb{N}} \sup_{k\geq p}(u_k).$$
4. Dans un sens majorer la suite des sup.

   Dans l'autre sens, on rappelle que si une suite est majorée ÀPCR alors elle est majorée.
5. Dans un sens par exemple repasser aux ε.

   Dans l'autre sens utiliser par exemple un encadrement.

   Alternativement utiliser l'exercice 35.

Indication 78 · Énoncé p. 410 (Limsup, liminf et opérations)
Faire d'abord le passage au sup puis le passage à la limite (ou à l'inf).

Indication 79 · Énoncé p. 410 (Limsup, liminf et valeurs d'adhérences)
Il faut donc:

- ▹ montrer les valeurs d'adhérences sont inférieures ou égales à la lim sup;
- ▹ la lim sup est une valeur d'adhérence.

Indication 80 · Énoncé p. 411 (Lemme de Fekete)
Commencer par montrer que pour tout k,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{u_n}{n} \leq \frac{\lfloor n /\!\!/ k \rfloor}{n} u_k + \frac{1}{n} \max_{0 \leq r \leq k-1} (u_r).$$

Solution p. 466

Solutions

Solution pour l'exercice 1 · Énoncé p. 381 (Puissances)
Les réponses sont

1. 0
2. $+\infty$
3. $\frac{2}{5}$
4. $-\infty$
5. $\sqrt{\frac{3}{2}}$
6. $\frac{1}{60}$
7. $-\infty$
8. $+\infty$
9. 1
10. 0

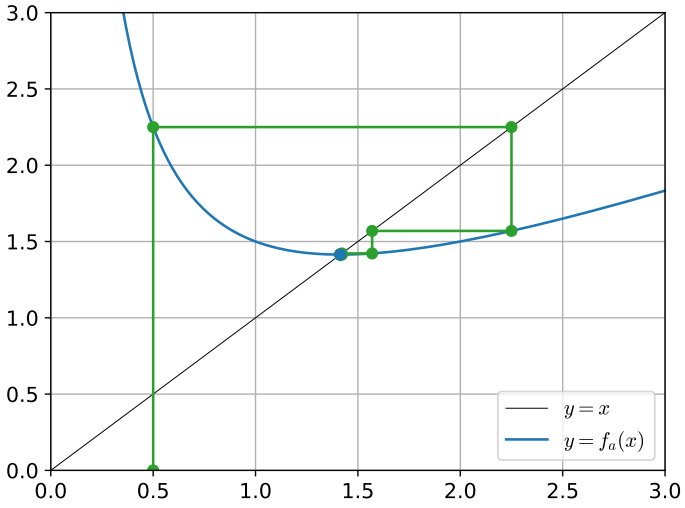
Solution pour l'exercice 2 · Énoncé p. 381 (Géométrique)
Les réponses sont

1. 0
2. $-\infty$
3. 0
4. 4
5. pas de limite
6. -5

Solution pour l'exercice 3 · Énoncé p. 382 (Puissances et géométriques)
Les réponses sont

1. 0
2. 1
3. $-\infty$
4. $+\infty$
5. 0
6. $-\infty$

Solution pour l'exercice 4 · Énoncé p. 382 · Indication p. 412 (Algorithme babylonien)
On obtient le schéma suivant:



1. Soit $f_a : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ définie par

$$\begin{aligned} f_a : \mathbb{R}_+^* &\to \mathbb{R}_+^* \\ x &\mapsto \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right). \end{aligned}$$

Alors f_a est bien définie et $\mathbb{R}_+^*$ est stable par f_a.

La relation de l'énoncé se réécrit donc

$$\begin{aligned} u_0 &= u_0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} &= f_a(u_n). \end{aligned}$$

Comme $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$, par récurrence immédiate on obtient que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \mathbb{R}_+^*$.

2. La fonction f_a est dérivable et

$$\forall x > 0, f_a(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{a}{x^2}\right).$$

Comme de plus $f_a(\sqrt{a}) = \sqrt{a}$ on en déduit le tableau de variations

x	0		$\sqrt{a}$		$+\infty$
$f_{a'}(x)$	‖	$-$	0	$+$	
f_a	‖ $+\infty$	↘	$\sqrt{a}$	↗	$+\infty$

par conséquent, pour tout $n \geq 1$, comme $u_n = f_a(u_{n-1})$ on a $u_n \geq \sqrt{a}$.

Or en posant $g_a : x \mapsto f_a(x) - x$ on observe que g_a est dérivable de dérivée $g_a' : x \mapsto \frac{1}{2}\left(-1 - \frac{a}{x^2}\right)$ d'où le tableau de variations

x	0		$\sqrt{a}$		$+\infty$
$g_{a'}(x)$	$-$		$-$		
g_a	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

d'où

$$\forall x \geq \sqrt{a}, f_a(x) \leq x.$$

On en déduit donc

$$\forall n \geq 1, \boxed{\sqrt{a} \leq u_{n+1} \leq u_n}.$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante ÀPCR et minorée, par conséquent, par théorème de convergence monotone, elle converge.

Notons ℓ sa limite.

Par PLIL on a $\ell \geq \sqrt{a}$ (et en particulier > 0).

Alors par passage à la limite dans la relation de récurrence on obtient (comme f_a est continue, ou bien par opérations sur les limites)

$$\ell = \frac{1}{2}\left(\ell + \frac{a}{\ell}\right)$$

c'est à dire $\ell^2 = a$. Comme $\ell > 0$ on en déduit $\ell = \sqrt{a}$.

D'où finalement

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{a}}.$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$.

On a:

- ▹ par définition de la suite $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\delta_{n+1} = \frac{u_{n+1}-\sqrt{a}}{\sqrt{a}}$,
- ▹ par définition de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right)$,
- ▹ par définition de la suite $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $u_n = \sqrt{a}(1 + \delta_n)$.

Il suffit ensuite de faire le calcul:

$$\begin{aligned}\delta_{n+1} &= \frac{u_{n+1}-\sqrt{a}}{\sqrt{a}}\\ &= \frac{1}{\sqrt{a}}\left(\frac{1}{2}\left(u_n+\frac{a}{u_n}\right)-\sqrt{a}\right)\\ &= \frac{1}{2\sqrt{a}}\left(\sqrt{a}(1+\delta_n)+\frac{a}{\sqrt{a}(1+\delta_n)}-2\sqrt{a}\right)\\ &= \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{a}}\left((1+\delta_n)+\frac{1}{1+\delta_n}-2\right)\\ &= \frac{1}{2}\frac{(1+\delta_n)^2+1-2(1+\delta_n)}{1+\delta_n}\\ &= \frac{1}{2}\frac{(\delta_n)^2}{1+\delta_n}.\end{aligned}$$

D'où on a bien

$$\forall n\in\mathbb{N},\boxed{\delta_{n+1}=\frac{\delta_n^2}{2(1+\delta_n)}}$$

4. On a

- ▷ si $u_0=\sqrt{a}$ alors pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\delta_n=0$ et on a bien l'inégalité demandée quel que soit (C,q).
- ▷ sinon, $\delta_0\neq 0$ et par récurrence immédiate, pour tout $n\geq 1$, $\delta_n>0$. On considère ce cas désormais.

D'où

$$\forall n\in\mathbb{N}^*, 0<\delta_{n+1}\leq\frac{\delta_n^2}{2}$$

par croissance de ln sur $\mathbb{R}_+^*$, on a donc

$$\forall n\in\mathbb{N}^*, \ln(\delta_{n+1})\leq 2\ln(\delta_n)-\ln(2)$$

On obtient donc une inégalité arithmético-géométrique.

Comme pour les suites arithmético-géométriques, il y a au moins deux façons de procéder.

- ▷ **Par «théorème de structure»**

  On cherche une constante $\gamma\in\mathbb{R}$ telle que

  $$\forall n\in\mathbb{N}^*, \gamma=2\gamma-\ln(2).$$

  On observe que

  $$\gamma=\ln(2)$$

  convient.

  On en déduit alors

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ln(\delta_{n+1}) - \ln(2) \leq 2(\ln(\delta_n) - \ln(2)).$$

Par conséquent comme $2 > 0$, on a par récurrence immédiate, pour $N \in \mathbb{N}^*$ et $n \geq N$,

$$\ln(\delta_n) - \ln(2) \leq 2^{n-N}(\ln(\delta_N) - \ln(2))$$

et donc (croissance de exp)

$$\delta_n \leq 2\left(\frac{\delta_N}{2}\right)^{2^{n-N}}.$$

▷ **Par «variation de la constante»**

On a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \frac{\ln(\delta_{n+1})}{2^{n+1}} \leq \frac{\ln(\delta_n)}{2^n} - \frac{\ln(2)}{2^{n+1}}$$

Soit $N \in \mathbb{N}^*$ et $n \geq N$. Par télescopage on a donc

$$\begin{aligned}\frac{\ln(\delta_n)}{2^n} - \frac{\ln(\delta_N)}{2^N} &= \sum_{k=N}^{n-1}\left(\frac{\ln(\delta_{k+1})}{2^{k+1}} - \frac{\ln(\delta_k)}{2^k}\right)\\ &\leq -\sum_{k=N}^{n-1}\frac{\ln(2)}{2^{k+1}}\\ &= -\frac{\ln(2)}{2}\frac{1}{2^N}\frac{1-\frac{1}{2^{n-M}}}{1-\frac{1}{2}}\\ &= -\frac{\ln(2)}{2^N} + \frac{\ln(2)}{2^n}\end{aligned}$$

d'où finalement

$$\frac{\ln(\delta_n)}{2^n} - \frac{\ln(2)}{2^n} \leq \frac{\ln(\delta_N)}{2^N} - \frac{\ln(2)}{2^N}$$

i.e

$$\ln(\delta_n) \leq 2\ln\left(\frac{\delta_N}{2}\right)2^{n-N}$$

et donc (par croissance de exp)

$$\delta_n \leq \left(\frac{\delta_N}{2}\right)^{2^{n-N}}$$

Quel que soit la preuve on obtient finalement que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, pour tout $n \geq N$,

$$\boxed{0 \leq \delta_n \leq 2\left(\frac{\delta_N}{2}\right)^{2^{n-N}}}.$$

Or $\delta_N \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Soit $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\delta_N < 2$.

Posons

$$q = \left(\frac{\delta_N}{2}\right)^{2^{-N}} < 1.$$

On a alors

$$\forall n \geq N, 0 \leq \delta_n \leq 2^{-N} q^{2^n}$$

i.e la suite $\left(\delta_n q^{-2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée ÀPCR, donc (en prenant le maximum des rangs 0 à $N-1$ et une borne de $\left(\delta_n q^{-2^n}\right)_{n\geq N}$) elle est donc bornée.

Fixons $C > 0$ une telle borne.

On a donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \mid \delta_n \mid \leq C q^{2^n}}.$$

5. On peut par exemple calculer quelques itérations et afficher l'erreur en fonction de n.

```python
import numpy as np

# Les paramètres
a = 2
u0 = 2

N = 8  # nombre d'itérations
#  Pour mesurer l'écart on peut afficher l'erreur
u = u0
for n in range(N):
    print(f"Pour n = {n}, u_n = {u:.18f} et δ_n = {np.abs(u - np.sqrt(a)):.18f}")
    u = 1 / 2 * (u + a / u)

```

On obtient

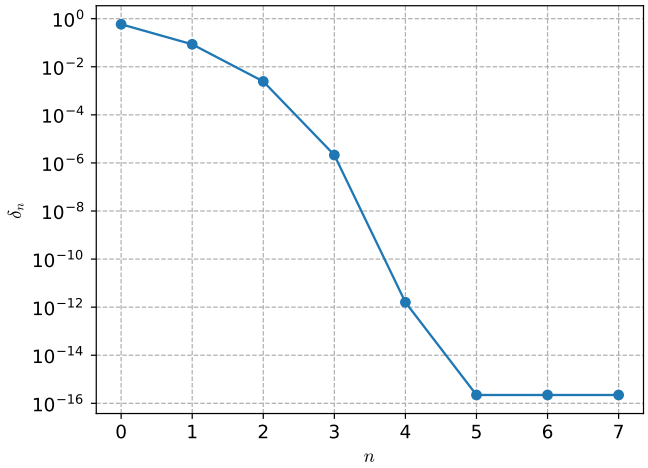
```
Pour n = 0, u_n = 2.000000000000000000 et d_n = 0.585786437626904855
Pour n = 1, u_n = 1.500000000000000000 et d_n = 0.085786437626904855
Pour n = 2, u_n = 1.416666666666666519 et d_n = 0.002453104293571373
Pour n = 3, u_n = 1.414215686274509665 et d_n = 0.000002123901414519
Pour n = 4, u_n = 1.414213562374689870 et d_n = 0.000000000001594724
Pour n = 5, u_n = 1.414213562373094923 et d_n = 0.000000000000000222
Pour n = 6, u_n = 1.414213562373094923 et d_n = 0.000000000000000222
Pour n = 7, u_n = 1.414213562373094923 et d_n = 0.000000000000000222
```

ou bien on peut tracer l'erreur en échelle logarithmique:

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Les paramètres
a = 2
u0 = 2

N = 8  # nombre d'itérations
#  Pour mesurer tracer en échelle logarithmique l'erreur effectuée
u = u0
liste_u = []
liste_n = []
liste_delta = []
```

```python
for n in range(N):
    liste_n.append(n)
    liste_u.append(u)
    liste_delta.append(np.abs(u - np.sqrt(2)))
    u = 1 / 2 * (u + a / u)


plt.plot(liste_n, liste_delta, "o-")
plt.title("Erreur en fonction du nombre d'itérations")
plt.yscale("log")  # Échelle logarithmique
plt.xlabel("$n$")
plt.ylabel("$\\delta_n$")
plt.grid(True, which="both", ls="--")
plt.show()

```

et on obtient



Dans les deux cas on observe qualitativement cette vitesse quadratique: à chaque itération le nombre de décimales correctes double, ou sur le graphe une erreur logarithmique qui ressemble à une parabole.

On observe que vu la vitesse de convergence, dès la 5-ème itération on atteint la précision machine.

Solution pour l'exercice 5 · Énoncé p. 383 · Indication p. 412 (Quelques sommes quasi-explicites)

1. On procède par disjonction de cas:

▷ Si $q = 1$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} 1^k = n + 1$$

et donc

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} 1^k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty}.$$

▷ Si $q \neq 1$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$
$$= \frac{1}{1-q}(1-q^{n+1}).$$

On précise ensuite selon le caractère réel ou non de q et selon $|q|$.

▷ Si $|q|<1$ alors $|q|^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} q^k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{1-q}}.$$

▷ Si $q \in]1,+\infty[$ alors $q^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et comme $\frac{1}{1-q}<0$ on en déduit par opérations,

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} q^k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty}.$$

▷ Sinon $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite (détailler si nécessaire) et donc

$$\boxed{\left(\sum_{k=0}^{n} q^k\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ n'a pas de limite}}.$$

2. On a pour tout $k\in\mathbb{N}$,

$$k\alpha - 1 < \lfloor k\alpha \rfloor \leq k\alpha$$

et donc pour tout $n\in\mathbb{N}$, par somme et comme $\frac{1}{n^2}\geq 0$,

$$\frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n}(k\alpha-1) < \frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n}\lfloor k\alpha\rfloor \leq \frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n}(k\alpha)$$

c'est à dire, par somme usuelle, pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$\frac{1}{n^2}\left(\frac{n(n+1)}{2}\alpha - n\right) < \sum_{k=0}^{n}\lfloor k\alpha\rfloor \leq \frac{1}{n^2}\frac{n(n+1)}{2}.$$

Par conséquent (mise en facteur du terme prédominant), pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$\frac{\alpha}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n^2} < \sum_{k=0}^{n}\lfloor k\alpha\rfloor \leq \frac{\alpha}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

Et donc comme les termes de gauche et de droite tendent vers $\frac{1}{2}$ par opérations, par théorème des gendarmes,

$$\frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n}\lfloor k\alpha\rfloor \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\alpha}{2}.$$

3. On a pour tout $n\geq 2$,

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{k!}{n!} = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n-2}k! + \frac{1}{n} + 1$$

De plus on a pour tout $n\geq 2$,

$$0 \leq \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n-2}k! \leq \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n-2}(n-2)! = \frac{n(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n-1}$$

et donc par encadrement,

$$\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n-2} k! \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Par opérations on a donc

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \frac{k!}{n!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1}.$$

Solution pour l'exercice 6 · Énoncé p. 383 · Indication p. 412 (Des limites plus qu'usuelles)

1. On a pour tout n à partir d'un certain rang,

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n &= \exp\left(n\ln\left(1+\frac{a}{n}\right)\right).\\ &= \exp\left(\frac{\ln\left(1+\frac{a}{n}\right)-\ln(1)}{\frac{a}{n}}\times a\right).\end{aligned}$$

De plus comme $\frac{a}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on a (dérivabilité de ln en 0)

$$\frac{\ln\left(1+\frac{a}{n}\right)-\ln(1)}{\frac{a}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln'(1) = \frac{1}{1}.$$

Par continuité de exp on en conclut que

$$\boxed{\left(1+\tfrac{a}{n}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \exp(a)}.$$

2. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

et

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n).$$

On a alors, pour tout $n \geq 2$,

$$\begin{aligned}u_n - u_{n-1} &= (H_n - H_{n-1}) - (\ln(n) - \ln(n-1))\\ &= \frac{1}{n} + \ln\left(\frac{n-1}{n}\right)\\ &= \frac{1}{n} + \ln\left(1-\frac{1}{n}\right).\end{aligned}$$

De plus pour tout $x > -1$ on sait que

$$\ln(1+x) \leq x$$

et par conséquent pour tout $n \geq 2$, $u_n - u_{n-1} \leq 0$ d'où la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Remarque: l'argument suivant sera simplifié une fois vu le cours sur les DLs et encore plus une fois vu l'argument sur les séries (cf cours idoines). Ici on fait la preuve sans les outils susmentionnés. On pourrait aussi faire une comparaison avec des intégrales (cf DM sur Stirling).

De plus pour $x > -1$ on a

$$\begin{aligned}\ln(1+x) &= -\ln\left(\frac{1}{1+x}\right)\\ &= -\ln\left(1-\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\right)\\ &\geq \frac{1}{1+\frac{1}{x}}\end{aligned}$$

et par conséquent pour tout $n \geq 2$,

$$u_n - u_{n-1} \geq \frac{1}{n} - \frac{1}{n-1}.$$

Et donc pour tout $n \geq 2$,

$$\begin{aligned}u_n &= u_0 + \sum_{k=1}^{n}(u_k - u_{k-1})\\ &\geq u_0 + \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k-1}\right)\\ &= 1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{1}\\ &\geq 0\end{aligned}$$

Par conséquent la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée.

Par le théorème de convergence monotone, elle est donc convergente, c'est à dire qu'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que

$$\boxed{\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln(n)\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \gamma}.$$

Solution pour l'exercice 9 · Énoncé p. 384 · Indication p. 413 (Un extrait cesàresque d'oral PC)
On constate tout d'abord que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{k}\frac{2^k}{2^n} &\geq \sum_{k=1}^{n}\frac{2^k}{2^n}\\ &= \sum_{j=0}^{n-1}2^{-j}\\ &= \frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}\\ &= 2 - \frac{2}{2^n}.\end{aligned}$$

Il reste donc à majorer la somme par un terme tendant vers 2.

Intuition: Le calcul précédent montre que cela revient à majorer le terme $\frac{n}{k}$, la somme des puissances de 2 tendant déjà vers 2. Or pour k petit le terme $\frac{n}{k}$ est grand les termes $\frac{2^k}{2^n}$ sont très petits tandis que pour k grand le terme $\frac{n}{k}$ est proche du 1 souhaité.

On découpe donc la somme en deux.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $m \in [\![1, n]\!]$.

On a

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k}\frac{2^k}{2^n} = \sum_{k=1}^{m} \frac{n}{k}\frac{2^k}{2^n} + \sum_{k=m+1}^{n} \frac{n}{k}\frac{2^k}{2^n}.$$

Et par conséquent on a la majoration

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k}\frac{2^k}{2^n} &\leq \sum_{k=1}^{m} \frac{n}{1}\frac{2^k}{2^n} + \sum_{k=m+1}^{n} \frac{n}{m+1}\frac{2^k}{2^n} \\ &= \frac{n}{2^n}\frac{2^{m+1}-1}{2-1} + \frac{n}{m+1}\frac{1-\frac{1}{2}^{n-m}}{1-\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{n}{2^n}2^{m+1} + 2 \times \frac{n}{m+1}.\end{aligned}$$

On rédige ensuite une preuve « à la Cesàro ».

Soit $\varepsilon > 0$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ posons

$$m_n = \left\lfloor \frac{n}{1+\frac{\varepsilon}{4}} \right\rfloor \leq n.$$

Alors

$$m_n + 1 \geq \frac{n}{1+\frac{\varepsilon}{4}}$$

et donc

$$\frac{n}{m_n+1} \leq 1 + \frac{\varepsilon}{4}.$$

Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k}\frac{2^k}{2^n} \leq n2^{m_n-n+1} + 2\Big(1+\frac{\varepsilon}{4}\Big).$$

Or

$$m_n - n \leq \frac{n}{1+\frac{\varepsilon}{4}} - n = -\frac{\varepsilon}{4+\varepsilon}n$$

et donc comme $-\frac{\varepsilon}{4+\varepsilon} < 0$, par croissance comparée,

$$n2^{m_n-n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Il existe donc $N \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geq N$,

$$n2^{m_n-n+1} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Par conséquent, pour tout $n \geq N$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k}\frac{2^k}{2^n} \leq 2 + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = 2 + \varepsilon.$$

De plus on a déjà vu que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k}\frac{2^k}{2^n} \geq 2 - \frac{2}{2^n}$$

et par conséquent, comme $\frac{2}{2^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, il existe $\tilde{N} \geq N \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geq \tilde{N}$,

$$2 - \varepsilon \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k}\frac{2^k}{2^n} \leq 2 + \varepsilon.$$

On a donc bien montré que

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k}\frac{2^k}{2^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2}.$$

Remarque: on aurait pu simplifier la preuve en procédant comme dans la première étape de la preuve de Cesàro en se ramenant à 0, c'est à dire ici en se ramenant à montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{n}{k} - 1\right)\frac{2^k}{2^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Solution pour l'exercice 11 · Énoncé p. 385 · Indication p. 413 (Bifurcation selon la condition initiale: cas pratique)

1. On constate tout d'abord que comme

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{N} &\to \mathbb{R}_+^* \times \\ (x, n) &\mapsto \left(\frac{x^2}{2^n}, n+1\right) \end{aligned}$$

est bien définie et que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et strictement positive.

Ensuite pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\ln(u_{n+1}) = 2\ln(u_n) - n\ln(2).$$

Par conséquent pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{\ln(u_{n+1})}{2^{n+1}} = \frac{\ln(u_n)}{2^n} - \frac{n\ln(2)}{2^{n+1}}$$

et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\frac{\ln(u_n)}{2^n} &= \frac{\ln(u_0)}{2^0} + \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{\ln(u_{k+1})}{2^{k+1}} - \frac{\ln(u_k)}{2^k}\right)\\ &= \ln(x) - \ln(2)\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k}{2^{k+1}}.\end{aligned}$$

On en déduit donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \boxed{u_n = \exp\left(2^n\left(\ln(x) - \tfrac{\ln(2)}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\tfrac{k}{2^k}\right)\right)}.$$

2. Il y a plusieurs façons de procéder:

▷ **Majoration du terme général**

Par croissances comparées on a

$$\frac{\left(\frac{k}{2^k}\right)}{\left(\frac{2}{3}\right)^k} = k\left(\frac{3}{4}\right)^k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

En particulier, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq N$,

$$\frac{k}{2^k} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^k$$

et donc pour tout $n \geq N$,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k}{2^k} &= \sum_{k=0}^{N-1}\frac{k}{2^k} + \sum_{k=N}^{n-1}\frac{k}{2^k}\\ &\leq \sum_{k=0}^{N-1}\frac{k}{2^k} + \sum_{k=N}^{n-1}\left(\frac{2}{3}\right)^k\\ &= \sum_{k=0}^{N-1}\frac{k}{2^k} + \left(\frac{2}{3}\right)^N\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-N}}{1-\frac{2}{3}}\\ &\leq \sum_{k=0}^{N-1}\frac{k}{2^k} + \left(\frac{2}{3}\right)^N\frac{1}{1-\frac{2}{3}}.\end{aligned}$$

et donc $\boxed{(S_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est majorée}}$.

▷ **Calcul explicite**

Soit $n \in \mathbb{N}$.

On peut en fait calculer explicitement S_n par exemple en étudiant une fonction génératrice ou bien par transformation d'Abel.

▹ **Par fonction génératrice**

Posons

$$\begin{aligned}f_n :]-1,1[&\to \mathbb{R}\\ x &\mapsto \sum_{k=0}^{n-1} x^k\end{aligned}$$

On a alors

$$\forall x \in]-1,1[, \quad f_n'(x) = \sum_{k=1}^{n-1} k x^{k-1}.$$

Mais de plus

$$\forall x \in]-1,1[, \quad f_n(x) = \frac{1-x^n}{1-x}$$

et donc

$$\begin{aligned}\forall x \in]-1,1[, \quad f_n'(x) &= \frac{(1-x)(-nx^{n-1}) - (1-x^n)(-1)}{(1-x)^2} \\ &= \frac{1 - nx^{n-1} + (n-1)x^n}{(1-x)^2}.\end{aligned}$$

On a donc montré que pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\sum_{k=1}^{n-1} k x^{k-1} = \frac{1 - nx^{n-1} + (n-1)x^n}{(1-x)^2}.$$

En particulier pour $x = \frac{1}{2}$ on obtient

$$\begin{aligned}S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{2^k} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} k \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1 - \frac{n}{2^{n-1}} + \frac{n-1}{2^n}}{\frac{1}{4}} \\ &= 2\left(1 - \frac{n+1}{2^n}\right) \\ &= 2 - \frac{n+1}{2^{n-1}}.\end{aligned}$$

▷ **Par transformation d'Abel**

On rappelle qu'étant données deux suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1}v_{n+1} - u_n v_n = u_{n+1}(v_{n+1} - v_n) + v_n(u_{n+1} - u_n)$$

et que par conséquent (transformation d'Abel)

$$\sum_{k=0}^{n-1} v_k(u_{k+1} - u_k) = u_n v_n - u_0 v_0 - \sum_{k=0}^{n-1} u_{k+1}(v_{k+1} - v_k).$$

Par conséquent étant données deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, en posant pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$B_n = \sum_{k=0}^{n-1} b_k,$$

on a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_k b_k = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(B_{k+1}-B_k) = a_n B_n - a_0 B_0 - \sum_{k=0}^{n-1} B_{k+1}(a_{k+1}-a_k).$$

Ici avec pour tout $n\in\mathbb{N}$, $a_n = n$ et $b_n = \frac{1}{2^n}$, on a pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1} k2^{-k} &= n\sum_{k=0}^{n-1} 2^{-k} - 0 - \sum_{k=0}^{n-1}\left(\sum_{j=0}^{k} 2^{-j}\right)((k+1)-k)\\
&= n(1-2^{-n})\times 2 - \sum_{k=0}^{n-1}\left(1-2^{-(k+1)}\right)\times 2\\
&= 2n(1-2^{-n}) - 2(n-(1-2^{-n}))\\
&= 2n - \frac{2n}{2^n} - 2n + 2 - \frac{2}{2^n}\\
&= 2 - \frac{2n+2}{2^n}\\
&= 2 - \frac{n+1}{2^{n-1}}.
\end{aligned}$$

Dans tous les cas on a bien

$$S_n = 2 - \frac{n+1}{2^{n-1}}$$

et donc en particulier

$$S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2.$$

En particulier $\boxed{(S_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est majorée}}$.

3. Remarque: si on avait décidé à la question précédente de calculer explicitement S_n on obtient directement que $S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2$.

Soit $n\in\mathbb{N}$. On a

$$S_{n+1} - S_n = \frac{n}{2^n} \geq 0$$

et donc $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

De plus par la question précédente elle est majorée.

Par le théorème de convergence monotone on en déduit qu'il existe $L\in\mathbb{R}$ tel que $\boxed{S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} L}$.

4. On a donc

$$\ln(x) - \frac{\ln(2)}{2} S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(x) - \frac{\ln(2)}{2} L.$$

Posons

$$\ell = \exp\left(\frac{\ln(2)}{2}L\right) = 2^{\frac{L}{2}}.$$

On a donc

▷ Si $x < \ell$ alors

$$\ln(x) - \frac{\ln(2)}{2} S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(x) - \ln(\ell) < 0$$

et donc par opérations

$$2^n \left(\ln(x) - \frac{\ln(2)}{2} S_n \right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$$

et donc

$$u_n = \exp\left(2^n \left(\ln(x) - \frac{\ln(2)}{2} S_n \right) \right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

▷ De même si $x > \ell$ alors

$$\ln(x) - \frac{\ln(2)}{2} S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(x) - \ln(\ell) > 0$$

et donc par opérations

$$2^n \left(\ln(x) - \frac{\ln(2)}{2} S_n \right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

d'où

$$u_n = \exp\left(2^n \left(\ln(x) - \frac{\ln(2)}{2} S_n \right) \right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

On a donc bien montré que

$$\boxed{\begin{cases} \text{si } x<\ell \text{ alors } u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \\ \text{si } x>\ell \text{ alors } u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty. \end{cases}}.$$

Solution pour l'exercice 19 · Énoncé p. 387 · Indication p. 413 (Laplacien unidimensionnel discret)
On a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(u_{n+1} - u_n) - (u_n - u_{n-1}) = 0$$

et donc la suite $(u_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \alpha$ on a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = u_0 + \sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) = u_0 + n\alpha$$

et donc on a bien une suite affine

$$\forall n \in \mathbb{N}, \boxed{u_n = u_0 + n(u_1 - u_0)}.$$

Solution pour l'exercice 21 · Énoncé p. 388 · Indication p. 414 (Vrac I)

1. Supposons que $u_n + v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2$.

▷ **Par encadrement**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, comme $u_n, v_n \in [0,1]$ on a

$$0 \leq (1-u_n) \leq (1-u_n) + (1-v_n).$$

De plus $(1-u_n) + (1-v_n) = 2 - (u_n + v_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Donc par encadrement, on obtient

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1}.$$

et de même

$$\boxed{v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1}.$$

▷ **Par compacité**

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

Soit ℓ une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et φ une extractrice telle que $u_{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

Comme la suite $\left(v_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi bornée, par Bolzano-Weierstrass il existe une extractrice ψ et $\tilde{\ell}$ tels que $v_{\varphi\circ\psi(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \tilde{\ell}$.

On a donc

$$u_{\varphi(\psi(n))} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$$
$$v_{\varphi(\psi(n))} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \tilde{\ell}.$$

et donc

$$u_{\varphi(\psi(n))} + v_{\varphi(\psi(n))} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell + \tilde{\ell}.$$

Par conséquent

$$\ell + \tilde{\ell} = 2.$$

De plus par Passage à la limite dans les Inégalités Larges on a aussi

$$\ell \in [0,1]$$
$$\tilde{\ell} \in [0,1].$$

et par conséquent $((1-\ell) + \left(1-\tilde{\ell}\right) = 0)$

$$\ell = 1$$
$$\tilde{\ell} = 1.$$

On a donc montré que $\ell = 1$.

Ainsi toute valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est égale à 1.

Par unicité de la valeur d'adhérence d'une suite bornée on en déduit

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1}.$$

Et de même

$$\boxed{v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1}.$$

2. On pourrait de même procéder par encadrement ou par compacité.

Voici la preuve par encadrement.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, comme $u_n, v_n \in [0,1]$ on a

$$u_n v_n \leq u_n \leq 1,$$

et donc par théorème des gendarmes, comme $u_n v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, on obtient

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1}.$$

De même, on a aussi

$$\boxed{v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1}.$$

Solution pour l'exercice 22 · Énoncé p. 388 · Indication p. 414 (Une petite astuce)
Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = \frac{u_n}{u_n + 1}.$$

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \frac{v_n}{1 - v_n}.$$

Par conséquent comme $v_n \to \ell \neq 1$ lorsque $n \to +\infty$, on en déduit par opérations que

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\ell}{1-\ell}}.$$

Solution pour l'exercice 23 · Énoncé p. 388 · Indication p. 414 (Rien à voir avec Cesàro)

1. Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

Il existe $C \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq C$.

Par conséquent pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par inégalité triangulaire,

$$|M_n| = |\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k| \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|u_k| \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} C = C,$$

et donc la suite $\boxed{(M_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}}$.

2. Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On a (associativité du barycentre)

$$\begin{aligned} M_{n+1} &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1} u_k = \frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=1}^{n} u_k + u_{n+1}\right) \\ &= \frac{n}{n+1}M_n + \frac{1}{n+1}u_{n+1}. \end{aligned}$$

Or comme la suite est croissante on a pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $u_k \leq u_{n+1}$ et donc

$$M_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_{n+1} = u_{n+1}.$$

D'où on obtient finalement

$$M_{n+1} \geq \frac{n}{n+1}M_n + \frac{1}{n+1}M_n = M_n$$

Donc la suite $\boxed{(M_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante}}$.

3. ▷ Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-1)^n n$.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée mais pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a (exercice classique de calcul de somme)

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k k = \begin{cases} -\frac{n}{2} \text{ si } n \text{ est pair} \\ \frac{n+1}{2} \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

et donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$|M_n| \leq 1.$$

D'où la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

▷ On commence par constater que la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$M_{n+1} = \frac{n}{n+1}M_n + \frac{1}{n+1}u_{n+1} \geq M_n$$

c'est à dire ssi pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_{n+1} \geq M_n.$$

Il reste donc à trouver une suite suffisamment «croissante» pour que u_{n+1} soit toujours supérieur à la moyenne des précédents termes mais non croissante.

Posons par exemple pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n + (-1)^n$.

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_{n+1} - u_n = (n+1-n) + \left((-1)^{n+1} - (-1)^n\right) = 1 - 2(-1)^n = \begin{cases} -1 \text{ si } n \text{ est pair} \\ 3 \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

et donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas croissante.

De plus pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned} M_n &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\big(k+(-1)^k\big) = \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}k + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k\right) \\ &= \frac{1}{n}\left(\frac{n(n+1)}{2} + (-1)\times\frac{1-(-1)^n}{1-(-1)}\right) \\ &= \frac{n+1}{2} - \frac{1-(-1)^n}{2n}. \end{aligned}$$

en particulier, comme pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ (ou tout du moins ÀPCR)

$$\frac{n+1}{2} \geq \frac{(-1)^n - 1}{2n},$$

on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_{n+1} \geq M_n.$$

Donc la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Solution pour l'exercice 25 · Énoncé p. 389 · Indication p. 414 (Adjacence ou explicite)
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$u_{n+1} + v_{n+1} = u_n + v_n$$

et donc (suite constante),

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n + v_n = u_0 + v_0.$$

De même pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - v_{n+1} = (2t-1)(u_n - v_n)$$

et donc (suite géométrique),

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n - v_n = (2t-1)^n(u_0 - v_0).$$

Par conséquent,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_n = \frac{u_0+v_0}{2} + \frac{(2t-1)^n}{2}(u_0 - v_0) \\ v_n = \frac{u_0+v_0}{2} - \frac{(2t-1)^n}{2}(u_0 - v_0). \end{cases}$$

et en particulier

$$\boxed{\begin{array}{l} u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{u_0+v_0}{2}, \\ v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{u_0+v_0}{2}. \end{array}}$$

Solution pour l'exercice 26 · Énoncé p. 389 · Indication p. 415 (Protocritère de d'Alembert)

1. Soit $q > \ell$.

Comme $\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq q$.

Par récurrence on a pour tout $n \geq N$, $0 < u_n \leq u_N q^{n-N}$.

▷ **Initialisation**

Pour $n = N$ on a bien $0 < u_N \leq u_N q^{N-N}$.

▷ **Hérédité**

Soit $n \geq N$. Supposons que $0 < u_n \leq u_N q^{n-N}$.

Comme $n+1 \geq N$ on a $0 < \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq q$ et donc par produit d'inégalités positives,

$$0 < u_{n+1} \leq q u_N q^{n-N} = u_N q^{(n+1)-N}.$$

▷ **Conclusion**

Par récurrence on a bien pour tout $n \geq N$, $0 < u_n \leq u_N q^{n-N}$.

D'où

$$\forall n \geq N, \frac{u_n}{q^n} \leq \frac{u_N}{q^N}.$$

Remarque: on aurait aussi pu procéder par produit télescopique.

La suite $\left(\frac{u_n}{q^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc bornée à partir du rang N et donc (car toute suite bornée ÀPCR est bornée) $\boxed{\text{bornée}}$.

2. Soit $q > \ell$.

Posons $\rho = \frac{q+\ell}{2}$. Alors [**Faire un schéma**]

$$\ell < \rho < q.$$

Par la question précédente, la suite $\left(\frac{u_n}{\rho^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left|\frac{u_n}{q^n}\right| = \underbrace{\left|\frac{u_n}{\rho^n}\right|}_{\text{borné}} \underbrace{\left(\frac{q}{\rho}\right)^n}_{\substack{\longrightarrow \\ n\to+\infty}\ 0 \\ \text{car } 0<\frac{q}{\rho}<1}$$

et donc, comme produit d'une suite bornée et d'une suite tendant vers 0, la suite $\left(\frac{u_n}{q^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0, c'est à dire

$$\boxed{u_n = o_{n\to+\infty}(q^n)}.$$

3. Si $\ell = 0$ ou $q = 0$ il n'y a rien à faire. Supposons $\ell > q > 0$.

On peut faire de même en posant $\rho = \frac{q+\ell}{2}$ vérifiant $q < \rho < \ell$.

et en constatant que pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$|\frac{u_n}{q^n}| = |\frac{u_n}{\rho^n}| \left(\frac{q}{\rho}\right)^n.$$

Alternativement on observe que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\left(\frac{1}{u_{n+1}}\right)}{\left(\frac{1}{u_n}\right)} = \frac{1}{\ell}$$

et comme

$$\frac{1}{\ell} < \frac{1}{q}$$

par la question précédente on a

$$\left(\frac{1}{u_n}\right)\left(\frac{1}{q}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

c'est à dire

$$\frac{q^n}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

D'où

$$\boxed{q^n = o_{n\to+\infty}(u_n)}.$$

4. On ne peut $\boxed{\text{rien dire}}$.

À titre d'exemple, Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, la suite $(n^\alpha)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifie la condition avec $\ell = 1$, mais si $\alpha = 0$ tend vers 1, si $\alpha > 0$ tend vers $+\infty$ et si $\alpha < 0$ tend vers 0.

Ou encore la suite $\left(2 + \cos(\pi\sqrt{n})\right)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la condition avec $\ell = 1$ (à démontrer) mais n'admet pas de limite (à démontrer).

Solution pour l'exercice 27 · Énoncé p. 390 · Indication p. 415 (Protocritère de Cauchy)

1. Soit $q > \ell$.

Comme $(u_n)^{\frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, et $\ell < q$, en particulier il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $0 \leq (u_n)^{\frac{1}{n}} < q$.

Soit $n \geq N$, par croissance de la fonction $x \mapsto x^n$ sur $\mathbb{R}_+$ on a donc $u_n < q^n$ c'est à dire $\frac{u_n}{q^n} < 1$.

Par conséquent la suite $\left(\frac{u_n}{q^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée à partir du rang N et donc $\boxed{\text{bornée}}$.

2. Soit $q > \ell$.

Posons

$$Q = \frac{q+\ell}{2}$$

on a alors

$$\ell < Q < q.$$

Par la question précédente, la suite $\left(\frac{u_n}{Q^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

Et (suite géométrique), $\left(\frac{Q}{q}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Comme produit d'une suite tendant vers 0 et d'une suite bornée on a donc

$$\frac{u_n}{q^n} = \underbrace{\frac{u_n}{Q^n}}_{\text{bornée}} \underbrace{\left(\frac{Q}{q}\right)^n}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

c'est à dire

$$\boxed{u_n = o_{n\to+\infty}(q^n)}.$$

3. On pourrait considérer u_n^{-1} pour se ramener au cas précédent si $\ell \neq 0$.

On va plutôt refaire exactement la même preuve.

Soit $0 \leq q < \ell$.

Posons $Q = \frac{q+\ell}{2}$. Alors $q < Q < \ell$.

Comme $Q < \ell$, à partir d'un certain rang $Q < (u_n)^{\frac{1}{n}}$ et donc par croissance des fonctions puissances, à partir d'un certain rang $Q^n < u_n$ d'où $\left(\frac{Q^n}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée à partir d'un certain rang et donc bornée.

Puis on a $\left(\frac{q}{Q}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Donc, comme produit d'une suite bornée et d'une suite qui tend vers 0,

$$\frac{q^n}{u_n} = \underbrace{\left(\frac{q}{Q}\right)^n}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0} \underbrace{\frac{Q^n}{u_n}}_{\text{bornée}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

c'est à dire

$$\boxed{q^n = o_{n\to+\infty}(u_n)}.$$

4. On ne peut $\boxed{\text{rien dire}}$.

Par exemple pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on a par croissance comparée

$$(n^\alpha)^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{\alpha \ln(n)}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

mais selon la valeur de α le résultat la limite est $+\infty$ ou 0 et donc on ne peut pas comparer à 1^n indépendamment de α.

Solution pour l'exercice 29 · Énoncé p. 391 · Indication p. 415 (Encadrement par des suites récurrentes)

1. Notons $a \in \mathbb{R}_+$ la valeur constante de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Posons

$$\begin{aligned} f_a : [0,+\infty[&\to [0,+\infty[\\ x &\mapsto \sqrt{a+x} \end{aligned}$$

on constate tout d'abord que comme $[0,+\infty[$ est stable par f_a, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.

Effectuons l'étude de fonction de $g_a : x \mapsto f_a(x) - x$ (on aurait aussi pu étudier f_a).

Constatons tout d'abord que pour tout $x \in [0,+\infty[$ on a

$$g_a(x) = 0$$

ssi

$$a + x = x^2$$

ssi

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+4a}}{2}$$

ssi (comme $x > 0$)

$$x = \frac{1 + \sqrt{1+4a}}{2}$$

Notons dans la suite

$$\ell(a) = \frac{1 + \sqrt{1+4a}}{2}$$

On a g_a est dérivable sur $]0,+\infty[$ et pour tout $x \in]0,+\infty[$,

$$g_a'(x) = \frac{1}{2\sqrt{a+x}} - 1 = \frac{1 - 2\sqrt{a+x}}{2\sqrt{a+x}}$$

ou encore, pour tout $x > 0$,

$$g_a'(x) = \frac{1^2 - 4(a+x)}{2\sqrt{a+x}(1+2\sqrt{a+x})}$$

et donc pour tout $x > 0$, $g_a'(x)$ est du signe de $1^2 - 4(a+x) = -4\big(x + \big(a - \frac{1}{4}\big)\big)$.

En constatant finalement que pour tout $a \geq 0$,

$$\frac{1}{4} - a \leq \ell(a)$$

car par exemple

$$\frac{1}{4} - a \leq \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad \frac{1}{2} \leq \ell(a)$$

on en déduit le tableau de variations de g_a:

- Si $a < \frac{1}{4}$,

x	0		$\frac{1}{4}-a$		$\ell(a)$		$+\infty$
$g_{a'}(x)$	$+$		0	$-$		$-$	
g_a	$\sqrt{a}$	↗		↘	0	↘	$-\infty$

▹ et si $a \geq \frac{1}{4}$,

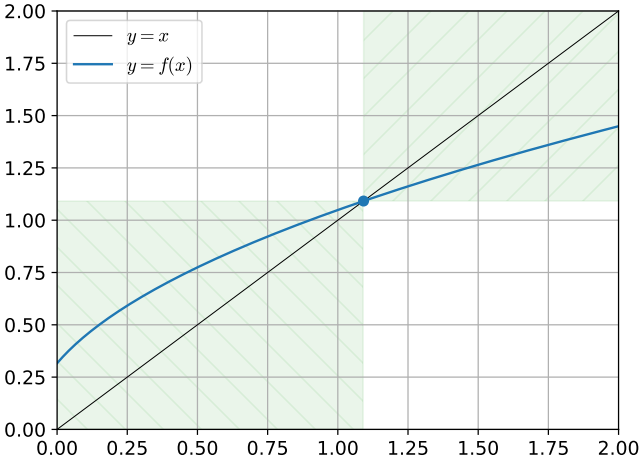
x	0		$\ell(a)$		$+\infty$
$g_{a'}(x)$	$-$			$-$	
g_a	$\sqrt{a}$	↘	0	↘	$-\infty$

Par conséquent on a, dans tous les cas (lecture de tableau de variation), pour tout $x \in [0, +\infty[$

$$\text{si } \ x \geq \ell(a) \ \text{ alors } \ \ell(a) \leq f(x) \leq x$$
$$\text{si } \ x \leq \ell(a) \ \text{ alors } \ x \leq f(x) \leq \ell(a).$$

Par conséquent

- ▹ si $u_0 \leq \ell(a)$, par stabilité de $[0, \ell(a)]$ par f_a et l'étude précédente, on a $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante et majorée par $\ell(a)$,
- ▹ si $u_0 \geq \ell(a)$, par stabilité de $[\ell(a), +\infty[$ par f_a et l'étude précédente, on a $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante et minorée par $\ell(a)$.



Dans tous les cas, par le théorème de convergence monotone, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

De plus, par continuité et passage à la limite de la relation de récurrence,

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell(a).$$

2. On commence par remarquer que la bonne définition est issue de la stabilité $[0,+\infty[\times\mathbb{N}$ par

$$\begin{aligned}[0,+\infty[\times\mathbb{N} &\to [0,+\infty[\times\mathbb{N}\\ (x,n) &\mapsto \left(\sqrt{a_n+x}, n+1\right)\end{aligned}$$

Soit $A\in\mathbb{R}_+$ tel que pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$a_n \leq A.$$

Considérons la suite $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{aligned}m_0 &= u_0\\ \forall n\in\mathbb{N}, m_{n+1} &= \sqrt{A+m_n}.\end{aligned}$$

Montrons par récurrence sur $n\in\mathbb{N}$ que pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$u_n \leq m_n.$$

▷ **Initialisation**

On a $m_0 = u_0$ donc $u_0 \leq m_0$.

▷ **Hérédité**

Soit $n\in\mathbb{N}$. Supposons que $u_n \leq m_n$.

Alors comme $a_n \leq A$ on a

$$u_n + a_n \leq m_n + A$$

et donc par croissance de la fonction racine

$$\sqrt{u_n+a_n} \leq \sqrt{m_n+A}$$

c'est à dire

$$u_{n+1} \leq m_{n+1}.$$

▷ **Conclusion**

Par récurrence on a donc bien pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n \leq m_n.$$

Or on a vu à la question 1 que $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente (vers $\ell(A)$) et donc en particulier est majorée.

Par conséquent $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est majorée}}$.

(On peut même montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, ÀPCR, $u_n \leq m_n \leq \ell(A) + \varepsilon$, cf question 3)

3. On s'inspire des calculs de la question 2.

Soit $\varepsilon > 0$.

Comme $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$,

$$a_n \leq a + \varepsilon.$$

Posons $(v_n)_{n\geq N}$ la suite définie par

$$v_N = u_N$$
$$\forall n \geq N, v_{n+1} = \sqrt{(a+\varepsilon) + v_n}.$$

Alors par exactement les mêmes calculs qu'à la question 2, on a

$$\forall n \geq N, u_n \leq v_n.$$

Mais par la question 1, on a aussi

$$v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell(a+\varepsilon)$$

et donc en particulier il existe $\tilde{N} \geq N$ tel que

$$\forall n \geq \tilde{N}, u_n \leq v_n \leq \ell(a+\varepsilon) + \varepsilon.$$

On a donc montré

$$\forall \varepsilon > 0, \text{ ÀPCR } u_n \leq \ell(a+\varepsilon) + \varepsilon.$$

Par exactement le même raisonnement (à rédiger si nécessaire) on a

$$\forall \varepsilon > 0, \text{ ÀPCR } u_n \geq \ell(a-\varepsilon) - \varepsilon.$$

On a (expression explicite)

$$\ell(a+h) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} \ell(a)$$

et par conséquent pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que $\ell(a+\delta) \leq \ell(a) + \frac{\varepsilon}{2}$.

Donc quitte à diminuer $\varepsilon > 0$, on a donc

$$\forall \varepsilon > 0,\ \text{ÀPCR}\ \ \ell(a) - \varepsilon \leq u_n \leq \ell(a) + \varepsilon.$$

C'est à dire

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell(a)}.$$

Solution pour l'exercice 31 · Énoncé p. 392 · Indication p. 415 (Moyennes mixtes)

1.

1.1. L'ensemble $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$ est stable par

$$\begin{aligned}]0,+\infty[\times]0,+\infty[&\to]0,+\infty[\times]0,+\infty[\\ (x,y) &\mapsto \left(\sqrt{xy}, \frac{x+y}{2}\right)\end{aligned}$$

d'où la $\boxed{\text{bonne définition}}$, et de plus le fait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n > 0$ et $b_n > 0$.

1.2. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$$

▷ **Initialisation**

Pour $n = 1$ on a bien $a_1 = \sqrt{\alpha\beta} \leq \frac{\alpha+\beta}{2} = b_1$ par inégalité arithmético-géométrique (on peut constater que $\left(\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}\right)^2 \geq 0$ pour la redémontrer si nécessaire).

▷ **Hérédité**

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$.

Comme $a_{n+2} = \sqrt{a_{n+1}b_{n+1}}$ et $b_{n+2} = \frac{a_{n+1}+b_{n+1}}{2}$ on a

▷ La moyenne géométrique est une moyenne et $a_{n+1} \leq b_{n+1}$ donc.

$$a_{n+1} = \sqrt{a_{n+1}b_{n+1}} \geq \sqrt{a_{n+1}a_{n+1}} = a_{n+1}.$$

▷ La moyenne arithmétique est une moyenne et $b_{n+1} \geq a_{n+1}$ donc

$$b_{n+2} = \frac{a_{n+1}+b_{n+1}}{2} \leq \frac{b_{n+1}+b_{n+1}}{2} = b_{n+1}.$$

▷ Par inégalité arithmético-géométrique on a

$$a_{n+2} = \sqrt{a_{n+1}b_{n+1}} \leq \frac{a_{n+1}+b_{n+1}}{2} = b_{n+2}.$$

Et donc

$$a_{n+1} \leq a_{n+2} \leq b_{n+2} \leq b_{n+1}.$$

▷ **Conclusion**

Par récurrence on a donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \boxed{a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n}.$$

Et donc, en particulier $\boxed{(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est croissante}}$ et $\boxed{(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ décroissante}}$.

1.3. On a montré à la question précédente que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n.$$

En particulier

- ▷ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et majorée par b_1. Par théorème de convergence monotone elle est donc convergente.
- ▷ $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et minorée par a_1. Par théorème de convergence monotone elle est donc convergente.

1.4. Notons ℓ_a et ℓ_b les limites respectives de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Par passage à la limite (opérations sur les limites et continuité de la racine) dans la relation de récurrence on a

$$\ell_a = \sqrt{\ell_a \ell_b}$$
$$\ell_b = \frac{\ell_a + \ell_b}{2}$$

d'où (par exemple à l'aide d'une des deux équations) $\ell_a = \ell_b$.

Donc les deux suites ont la même limite.

2. Par le même raisonnement que précédemment (il suffit de remplacer le mot «géométrique» par «harmonique», à rédiger) on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$$

et de même (c'est exactement le même argument), les suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Notons ℓ_a et ℓ_b leurs limites.

De même

$$\ell_a = \frac{1}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\ell_a} + \frac{1}{\ell_b}\right)}$$
$$\ell_b = \frac{\ell_a + \ell_b}{2}$$

d'où $\ell_a = \ell_b$.

La différence consiste ici à déterminer la valeur commune de ℓ_a et ℓ_b.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

On a alors

$$a_{n+1}b_{n+1} = \frac{1}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_n} + \frac{1}{b_n}\right)} \times \frac{a_n + b_n}{2} = \frac{2(a_n b_n)}{(a_n + b_n)} \frac{a_n + b_n}{2} = a_n b_n$$

la suite $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc constante et donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n b_n = a_0 b_0 = \alpha\beta$$

par passage à la limite (opérations)

$$\ell_a \ell_b = \alpha\beta$$

et comme $\ell_a = \ell_b$ on a bien

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = \sqrt{\alpha\beta}}.$$

3. Posons pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} u_n = \frac{1}{a_n} \\ v_n = \frac{1}{b_n}. \end{cases}$$

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_n}+\frac{1}{b_n}\right)}} = \frac{\frac{1}{a_n}+\frac{1}{b_n}}{2} = \frac{u_n + v_n}{2}$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{b_{n+1}} \quad = \frac{1}{\sqrt{a_n b_n}} = \sqrt{\frac{1}{a_n}\frac{1}{b_n}} = \sqrt{u_n v_n}$$

Comme de plus $u_0 = \frac{1}{\alpha}$ et $v_0 = \frac{1}{\beta}$, on en déduit par la première question que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{b_n} = \operatorname{agm}\left(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}\right).$$

Et donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = \frac{1}{\operatorname{agm}\left(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}\right)}}.$$

Solution pour l'exercice 32 · Énoncé p. 393 · Indication p. 416 (Attention aux quantifications)
Soit $\varepsilon > 0$.

Posons $A = \frac{2}{\varepsilon} > 0$.

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$|u_n| \leq \frac{A}{n} + \frac{1}{A} = \frac{A}{n} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

De plus $\frac{A}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, et donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on a $\frac{A}{n} \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

D'où pour tout $n \geq N$,

$$|u_n| \leq \frac{A}{n} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

On a donc bien montré que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n| \leq \varepsilon$$

c'est à dire que

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0}.$$

Variante: soit $n \in \mathbb{N}$, avec $A = \sqrt{n}$ on a

$$|u_n| \leq \frac{\sqrt{n}}{n} + \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{2}{\sqrt{n}}.$$

Or $\frac{2}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc par encadrement,

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Solution pour l'exercice 34 · Énoncé p. 393 · Indication p. 416 (Extractions croisées)
Notons ℓ_0 la limite de $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, ℓ_1 la limite de $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et ℓ_2 la limite de $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$.

On a, en tant que suite extraite d'une suite convergente,

$$u_{6n} = u_{2(3n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_0$$

et

$$u_{6n} = u_{3(2n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_2.$$

Donc (unicité de la limite) $\ell_0 = \ell_2$.

De même,

$$u_{6n+3} = u_{2(3n+1)+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_1$$

et

$$u_{6n+3} = u_{3(2n+1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_2.$$

Donc (unicité de la limite) $\ell_1 = \ell_2$.

Par conséquent

$$\ell_0 = \ell_1$$

les termes pairs et impairs convergeant vers la même limite on en déduit que

$$\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge}}.$$

Solution pour l'exercice 39 · Énoncé p. 395 · Indication p. 416 (Extractions monotones ou «Vue sur la mer»)

1. Construisons par récurrence une extractrice φ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varpi(n) \in V$.

Remarque: de manière générale on est en train de redémontrer que pour toute partie infinie de $\mathbb{N}$ on peut construire une extractrice prenant ses valeurs dans cette partie.

▷ **Initialisation**

Comme V est infini, en particulier il est non vide.

On pose $\varphi(0)$ un élément quelconque de V, par exemple $\varphi(0) = \min(V)$.

▷ **Hérédité**

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\varphi(n)$ construite.

Comme V est infini et $\varphi(n)$ est un entier, on a $V \setminus [\![0, \varphi(n)]\!]$ est infini et donc en particulier non vide.

On pose alors $\varphi(n+1)$ un élément de cet ensemble, par exemple $\varphi(n+1) = \min(V \setminus [\![0, \varphi(n)]\!])$.

▷ **Conclusion**

On a bien construit par récurrence $\varphi : \mathbb{N}to\mathbb{N}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n) \in V$ et $\varphi(n+1) > \varphi(n)$.

Montrons désormais que la suite extraite $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

On a

$$\varphi(n) \in V$$

c'est à dire

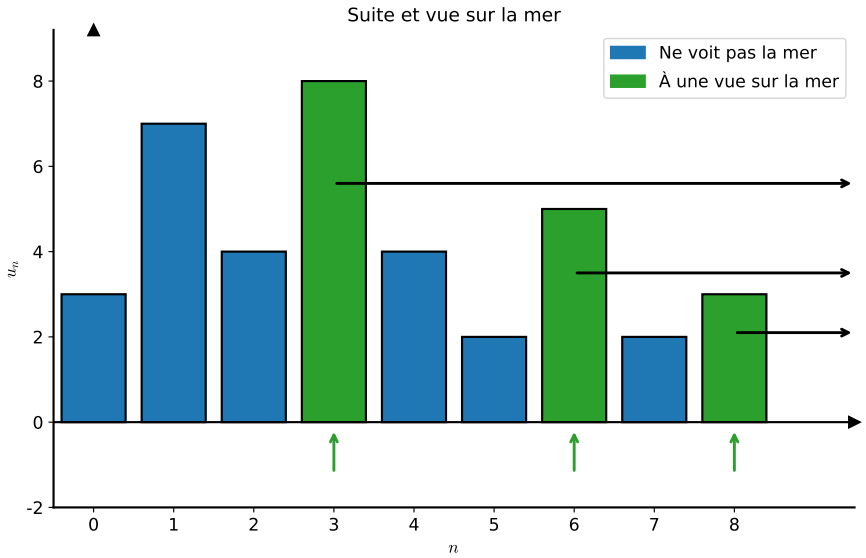
$$\forall m > \varphi(n), u_m < u_{\varphi(n)}.$$

Mais comme $\varphi(n+1) > \varphi(n)$, on a en particulier

$$u_{\varphi(n+1)} < u_{\varphi(n)}.$$

Donc $\boxed{\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est strictement décroissante}}$.

2. L'ensemble V est l'ensemble des indices desquels on peut «voir la mer» c'est à dire qu'il n'existe aucun terme ultérieur plus grand.



3. Comme V est fini, en particulier il est majoré.

Soit N un majorant de V.

On a donc

$$\forall n > N, n \notin V$$

c'est à dire

$$\forall n > N, \exists m > n, u_m \geq u_n.$$

Construisons alors par récurrence une extractrice ψ telle que $u_{\psi(n)}$ est décroissante.

- ▷ **Initialisation**

  On pose $\psi(0)$ un entier strictement plus grand que N, par exemple $\psi(0) = N + 1$.
- ▷ **Hérédité**

  Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\psi(n) > N$ construite.

  Comme $\psi(n) > N$, il existe $m > \psi(n)$ tel que $u_m \geq u_{\psi(n)}$.

  Posons alors $\psi(n+1)$ un tel élément quelconque, par exemple $\psi(n+1) = \min\Big(\big\{m > \psi(n) \mid u_m \geq u_{\psi(n)}\big\}\Big)$.
- ▷ **Conclusion**

  On a donc construit par récurrence $\psi : \mathbb{N}to\mathbb{N}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\psi(n+1) > \psi(n) > N$ et $u_{\psi(n+1)} \geq u_{\psi(n)}$.

On a donc la suite extraite $\boxed{\left(u_{\psi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante}}$.

4. Par disjonction de cas:

- ▷ Si V est infini, il existe une suite extraite strictement décroissante.
- ▷ Si V est fini, il existe une suite extraite croissante.

Dans tous les cas $\boxed{\text{il existe une suite extraite monotone}}$.

5. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée réelle.

Par la question précédente, il existe une suite extraite monotone.

Comme elle est extraite d'une suite bornée, elle est elle-même bornée.

Par le théorème des suites monotones, cette suite extraite converge.

D'où il existe bien une suite extraite convergente.

On a donc bien redémontré le théorème de $\boxed{\text{Bolzano-Weierstrass}}$.

Solution pour l'exercice 40 · Énoncé p. 395 · Indication p. 417 (Attention à la continuité)
On a pour tout $n \geq 1$, $1 \leq 2 - \frac{1}{n} < 2$ et donc $\lfloor 2 - \frac{1}{n} \rfloor = 1$.

Par conséquent

$$\boxed{\left\lfloor 2 - \tfrac{1}{n} \right\rfloor \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \neq \lfloor 2 \rfloor}.$$

Solution pour l'exercice 48 · Énoncé p. 397 · Indication p. 417 (Suite de rationnels convergeant vers un irrationnel)
Supposons par l'absurde que la suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers $+\infty$.

C'est à dire

$$\exists A \geq 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N, q_n \leq A.$$

Commençons par construire une extractrice φ telle que la suite extraite $\left(q_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée.

- ▷ **Initialisation**: il existe $n \geq 0$ tel que $q_n \leq A$ (prendre $N = 0$ dans l'hypothèse). Posons $\varphi(0)$ un tel entier.
- ▷ **Hérédité**: soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons construit $\varphi(n)$ tel que $q_{\varphi(n)} \leq A$.

  Par l'hypothèse (avec $N = \varphi(n) + 1$) il existe $m \geq \varphi(n) + 1$ tel que $q_m \leq A$.

  Posons $\varphi(n+1)$ un tel entier.
- ▷ **Conclusion**: on a donc construit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq q_{\varphi(n)} \leq A$$

et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \varphi(n+1) > \varphi(n).$$

Ce qui est bien une extractrice et telle que la suite extraite $\left(q_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

Par Bolzano-Weierstrass, la suite extraite $\left(q_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ étant une suite bornée, il existe une extractrice ψ telle que la suite extraite $\left(q_{\varphi(\psi(n))}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Mais la suite $\left(q_{\varphi(\psi(n))}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente d'entiers, donc par l'exercice très-classique 20 elle est stationnaire.

Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ et $Q \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geq N$, $q_{\varphi(\psi(n))} = Q$.

On a donc

$$\frac{p_{\varphi(\psi(n))}}{Q} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$$

c'est à dire

$$p_{\varphi(\psi(n))} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} Qx.$$

La suite $\left(p_{\varphi(\psi(n))}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente d'entiers, donc encore une fois par l'exercice très-classique 20 elle est stationnaire.

Il existe donc $\tilde{N} \geq N$ et $P \in \mathbb{Z}$ tel que pour tout $n \geq \tilde{N}$, $p_{\varphi(\psi(n))} = P$.

On a donc ÀPCR

$$\frac{p_{\varphi(\psi(n))}}{q_{\varphi(\psi(n))}} = \frac{P}{Q}$$

et donc

$$\frac{P}{Q} = x$$

ce qui est **absurde** par irrationalité de x.

Par conséquent

$$\boxed{q_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty}.$$

Puis comme $x \neq 0$ et que $|p_n| \sim q_n\ |x|$ lorsque $n \to +\infty$, on en déduit que

$$\boxed{|p_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty}.$$

Solution pour l'exercice 59 · Énoncé p. 401 · Indication p. 419 (Variante binomiale de Cesàro)
On adapte la preuve usuelle de Cesàro.

▷ $\boxed{\text{Cas } \ell = 0}$

Soit $\varepsilon > 0$.

Alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $|u_n| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Alors pour tout $n \geq N$ on a (comme les coefficients binomiaux sont positifs de somme 2^n)

$$\begin{aligned}|B_n| &\leq \frac{1}{2^n}\ |\sum_{k=0}^{N-1}\binom{n}{k}u_k| + \frac{1}{2^n}\sum_{k=N}^{n}\binom{n}{k}\ |\ u_k\ |\\ &\leq \frac{1}{2^n}\ |\sum_{k=0}^{N-1}\binom{n}{k}u_k\ | + \frac{1}{2^n}\frac{\varepsilon}{2}\sum_{k=N}^{n}\binom{n}{k}\\ &\leq \frac{1}{2^n}\ |\sum_{k=0}^{N-1}\binom{n}{k}u_k| + \frac{\varepsilon}{2}\end{aligned}$$

Remarque: la différence par rapport à Cesàro « classique » est que le terme $\sum_{k=0}^{N-1}\binom{n}{k}u_k$ est dépendant de n.

De plus pour tout $k \in [\![0, N-1]\!]$ on a

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

est un polyôme en n de degré au plus k.

Par conséquent

$$\sum_{k=0}^{N-1}\binom{n}{k}u_k$$

est un polynôme en n de degré au plus $N-1$.

Par conséquent, (à N fixé), par croissances comparées,

$$\frac{1}{2^n}\ |\sum_{k=0}^{N-1}\binom{n}{k}u_k| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Il existe donc $\tilde{N} \geq N$ tel que pour tout $n \geq \tilde{N}$,

$$\frac{1}{2^n}\ |\sum_{k=0}^{N-1}\binom{n}{k}u_k| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Et donc

$$\forall n \geq \tilde{N}, |B_n| \leq \varepsilon.$$

On a donc bien montré que

$$\boxed{B_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0}.$$

▷ Cas général

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, comme $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$,

$$B_n - \ell = \frac{1}{2^n}\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u_k - 2^n \ell\right) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(u_k - \ell).$$

Or $u_n - \ell \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, et donc par le cas $\ell = 0$, on en déduit que $B_n - \ell \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Ainsi

$$\boxed{B_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell}.$$

Solution pour l'exercice 66 · Énoncé p. 404 · Indication p. 419 (Divergence grossière)

▷ Procédons par **contraposée**.

Supposons que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Alors par opérations $S_n - S_{n-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

On a donc bien montré $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge $\Rightarrow u_n \to 0$ c'est à dire $\boxed{u_n \to .\neg 0}$ $\Rightarrow$ $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

▷ La réciproque est **FAUSSE**.

Par exemple en posant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \ln(n+2) - \ln(n+1)$ on a

$$u_n = \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

et

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = \ln(n+2) - \ln(1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Solution pour l'exercice 69 · Énoncé p. 405 · Indication p. 420 (Critère de Raabe-Duhamel)

1. Comme $\ln(1+h) = h + o_{h\to 0}(h)$ on a

$$\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) = \ln\left(1 - \frac{\alpha}{n} + o_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)\right) = -\frac{\alpha}{n} + o_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)$$

Soit $\beta = \frac{1+\alpha}{2}$.

En particulier [faire un schéma]

$$\alpha < \beta < 1.$$

Comme

$$n(\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\alpha$$

il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que $\forall n \geq N$,

$$n(\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)) > -\beta$$

c'est à dire pour tout $n \geq N$,

$$\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) > -\frac{\beta}{n}.$$

Par conséquent, par somme télescopique, pour tout $n \geq N$,

$$\begin{aligned}\ln(u_n) &= \ln(u_N) + \sum_{k=N}^{n-1} (\ln(u_{k+1}) - \ln(u_k)) \\ &\geq \ln(u_N) - \beta \sum_{k=N}^{n-1} \frac{1}{k}\end{aligned}$$

or (comparaison somme/intégrale) , pour tout $k \geq 2$,

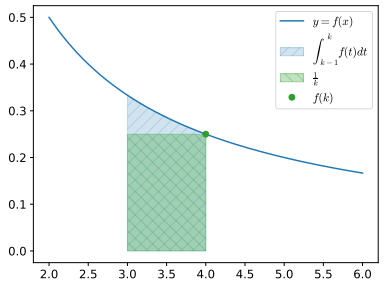
$$1 \times \frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$$

d'où pour tout $n \geq N$,

$$\sum_{k=N}^{n-1} \frac{1}{k} \leq \int_{N-1}^{n-1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \ln(n-1) - \ln(N-1)$$

i.e

$$-\sum_{k=N}^{n-1} \frac{1}{k} \geq -\ln(n-1) + \ln(N-1)$$



et donc finalement

$$\ln(u_n) \geq \underbrace{u_N + \beta \ln(N-1)}_{C_N} - \beta \ln(n-1)$$

d'où par croissance de l'exponentielle, pour tout $n \geq N$,

$$u_n \geq \frac{e^{C_N}}{(n-1)^\beta}$$

et donc (juste pour l'esthétique) on a en particulier

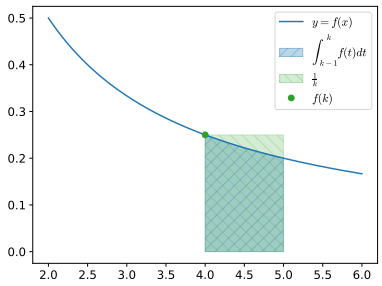
$$\forall k \geq N, u_k \geq e^{C_N} \frac{1}{k^\beta}.$$

Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} u_k \geq \sum_{k=0}^{N-1} u_k}_{A_N} + e^{C_N} \sum_{k=N}^{n} \frac{1}{k^\beta}.$$

Or, toujours par comparaison somme/intégrale, on a pour tout $k \geq N$

$$1 \times \frac{1}{k^\beta} \geq \int_k^{k+1} \frac{1}{t^\beta} \, \mathrm{d}t$$



d'où, pour tout $n \geq N$, (comme $-\beta \neq 1$)

$$\sum_{k=N}^{n} \frac{1}{k^\beta} \geq \int_N^{n+1} \frac{1}{t^\beta} \, \mathrm{d}t = \frac{1}{-\beta+1}\left((n+1)^{-\beta+1} - N^{-\beta+1}\right)$$

ce qui se réécrit, comme $\beta < 1$,

$$\sum_{k=N}^{n} \frac{1}{k^\beta} \geq \frac{1}{1-\beta}(n+1)^{1-\beta} - \underbrace{\frac{N^{1-\beta}}{1-\beta}}_{K_N}.$$

Par conséquent on a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n \geq A_N + e^{C_N}\left(\frac{1}{1-\beta}(n+1)^{1-\beta} - K_N\right).$$

Où C_N, A_N, K_N sont des constantes indépendantes de n (mais dépendant de N et de β).

Or $\beta < 1$ et par conséquent

$$\lim_{n \to +\infty} (n+1)^{1-\beta} = +\infty$$

Par théorème d'encadrement, on en déduit que

$$\boxed{S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty}.$$

2. On reprend la preuve précédente « dans l'autre sens ».

On a de même, comme $\ln(1+h) = h + o_{h\to 0}(h)$,

$$\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) = -\frac{\alpha}{n} + o_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)$$

c'est à dire

$$n\big(\ln(u_{n+1} - \ln(u_n))\big) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\alpha$$

Soit

$$\beta = \frac{1+\alpha}{2}$$

Alors l'inégalité essentielle est alors

$$1 < \beta < \alpha.$$

Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$,

$$n\big(\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)\big) < -\beta$$

d'où par somme télescopique $n \geq N$,

$$\ln(u_n) \leq \ln(u_N) - \beta \sum_{k=N}^{n-1} \frac{1}{k}.$$

Par comparaison somme/intégrale, pour tout $k \geq 2$,

$$1 \times \frac{1}{k} \geq \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$$

et par conséquent pour tout $n \geq N$,

$$\ln(u_n) \leq \ln(u_N) - \beta \ln(n+1) + \beta \ln(N)$$

et donc il existe une constante C_N telle que

$$\forall n \geq N, u_n \leq \frac{e^{C_N}}{n^\beta}.$$

Par conséquent pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n \leq \sum_{k=0}^{N-1} u_k + e^{C_N} \sum_{k=N}^{n} \frac{1}{k^\beta}.$$

Or, toujours par comparaison somme/intégrale, pour tout $k \geq N$,

$$1 \times \frac{1}{k^\beta} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^\beta}\,\mathrm{d}t$$

et par conséquent on obtient qu'il existe une constante A_N telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$S_n \leq A_N + e^{C_N}\frac{1}{-\beta+1}\big((n)^{-\beta+1} - (N-1)^{-\beta+1}\big).$$

Ici le reste diffère légèrement. On réécrit tout d'abord l'inégalité comme $-\beta+1<0$, pour tout $n \geq N$,

$$S_n \leq A_N + K_N - e^{C_N}\frac{1}{\beta-1}n^{1-\beta}.$$

où K_N est une constante indépendante de n.

Et comme pour tout $n \geq N$,

$$e^{C_N}\frac{1}{\beta-1}n^{1-\beta} \geq 0$$

on en déduit, pour tout $n \geq N$,

$$S_n \leq A_N + K_N$$

c'est à dire $\boxed{(S_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est majorée}}$ (ÀPCR mais aussi à tous les rangs).

Or pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_{n+1} - S_n = u_{n+1} \geq 0$$

et donc $\boxed{(S_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante}}$.

Par le théorème de convergence monotone,

$$\boxed{(S_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge}}.$$

3. On ne peut rien dire, par exemple pour $\beta \in \mathbb{R}$, considérons la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ définie par

$$\forall n \geq 2, u_n = \frac{1}{n\ln(n)^\beta}.$$

Alors pour tout $n \geq 2$,

$$\begin{aligned}
\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{n}{n+1}\left(\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)}\right)^\beta \\
&= \frac{1}{1+\frac{1}{n}}\left(\frac{\ln(n)+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)}\right)^\beta \\
&= \left(1-\frac{1}{n}+o_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left(1+\beta\frac{1}{n\ln(n)}+o_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n\ln(n)}\right)\right) \\
&= 1-\frac{1}{n}+o_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

et on est donc dans le cas $\alpha = 1$.

Mais par comparaison série intégrale, on a peut montrer (le faire) que comme (si $\beta \neq 1$)

$$\int_2^x \frac{1}{t\ln(t)^\beta}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{-\beta+1}\ln(t)^{-\beta+1}\right]_2^x$$

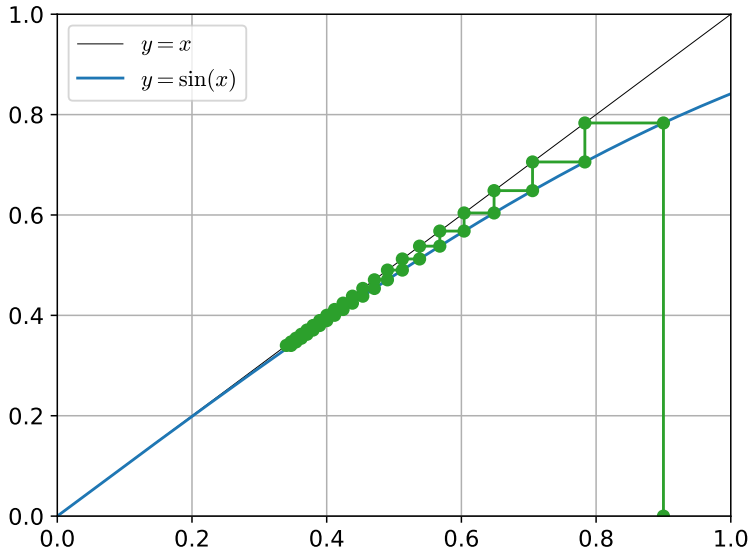
on a en particulier

- ▷ Si $\beta < 1$ la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.
- ▷ Si $\beta > 1$ la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Remarque: voir le chapitre sur les séries, notamment les séries de Riemann et séries de Bertrand.

Solution pour l'exercice 70 · Énoncé p. 406 · Indication p. 420 (Sinus itéré)

1. L'intervalle $]0,1]$ est stable par sin.



D'où la bonne définition et $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]0,1]$.

De plus (par exemple par étude de fonction)

$$\forall x \in]0,1], \sin(x) \leq x$$

et donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \boxed{0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 1}$$

2. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et donc décroissante et minorée par 0.

Par le théorème de convergence monotone elle est donc convergente.

3. Par PLIL on a $\ell \in [0,1]$.

Par continuité de sin, en passant à la limite la relation de récurrence on a

$$\ell = \sin(\ell)$$

De plus (toujours par étude de fonction) on a pour tout $x > 0$, $\sin(x) < x$.

Donc $\boxed{\ell = 0}$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$.

On a, comme $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o_{x\to 0}(x^3)$, lorsque $x \to 0$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sin(x)^2} - \frac{1}{x^2} &= \left(x - \frac{x^3}{6} + o_{x\to 0}\right)^{-2} - x^{-2} \\ &= x^{-2}\left(\left(1 - \frac{x^2}{6} + o_{x\to 0}(x^2)\right) - 1\right) \\ &= x^{-2}\left(1 + (-2)\left(-\frac{x^2}{6}\right) + o_{x\to 0}(x^2)\right) \\ &= \frac{1}{3} + o_{x\to 0}(1)\end{aligned}$$

et donc

$$\frac{1}{\sin(x)^2} - \frac{1}{x^2} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{3}.$$

Par conséquent comme $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, par composée de limites,

$$\boxed{\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{3}}.$$

5. Par théorème de Cesàro, on a donc

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{u_{k+1}^2} - \frac{1}{u_k^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{3}$$

c'est à dire (télescopage)

$$\frac{1}{n}\left(\frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{u_0^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{3}.$$

Enfin comme $\frac{1}{n}\frac{1}{u_0^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on en déduit

$$\frac{3}{nu_n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

c'est à dire

$$\boxed{u_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}}.$$

Solution pour l'exercice 72 · Énoncé p. 407 · Indication p. 420 (En autonomie: suite récurrente)
Posons

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x + e^{-x}. \end{aligned}$$

Comme $\mathbb{R}$ est stable par f la suite est bien définie.

De plus pour tout $x \in \mathbb{R}$, comme $e^{-x} > 0$, on a

$$f(x) > x$$

et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} > u_n.$$

Ainsi la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est (strictement) croissante.

Par théorème de limite monotone il existe donc $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ telle que

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell.$$

Supposons par l'absurde que $\ell \in \mathbb{R}$.

Par passage à la limite et continuité de f on a alors

$$\ell = f(\ell)$$

c'est à dire

$$0 = e^{-\ell}$$

ce qui est impossible.

Donc $\ell = +\infty$, c'est à dire

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a ensuite

$$\begin{aligned} e^{u_{n+1}} - e^{u_n} &= e^{u_n + e^{-u_n}} - e^{u_n} \\ &= e^{u_n}\left(e^{e^{-u_n}} - 1\right) \\ &= \frac{e^{e^{-u_n}} - e^0}{e^{-u_n}} \end{aligned}$$

et comme

$$e^{-u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

et (limite de taux d'accroissement)

$$\frac{e^x - e^0}{x} \underset{x\to0}{\longrightarrow} e^0 = 1$$

on en déduit que

$$\boxed{e^{u_{n+1}} - e^{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1}.$$

Par conséquent, par le théorème de Cesàro on a donc

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(e^{u_{k+1}} - e^{u_k}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

c'est à dire par somme télescopique

$$\frac{1}{n}e^{u_n} - \frac{1}{n}e^{u_0} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

et donc comme $\frac{1}{n}e^{u_0} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ on en déduit

$$\frac{e^{u_n}}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

En particulier par continuité de ln,

$$u_n - \ln(n) = \ln\left(\frac{e^{u_n}}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(1) = 0.$$

D'où

$$\boxed{u_n = \ln(n) + o_{n\to+\infty}(1)}.$$

Et en particulier comme $1 = o_{n\to+\infty}(\ln(n))$,

$$\boxed{u_n \sim \ln(n)}.$$

Solution pour l'exercice 80 · Énoncé p. 411 · Indication p. 422 (Lemme de Fekete)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Tout d'abord on montre par récurrence sur $p \in \mathbb{N}^*$ que, par sous-additivité,

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, u_{pk} \leq pu_k.$$

Par conséquent avec $n = (n /\!\!/ k)k + (n\%k)$ où $(n /\!\!/ k)$ et $n\%k$ sont respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de n par k, on a

$$u_n = u_{(n/\!\!/k)k+(n\%k)} \leq u_{(n/\!\!/k)k} + u_{(n\%k)} \leq (n /\!\!/ k)u_k + u_{(n\%k)}$$

et comme $(n\%k) \in [\![0, k-1]\!]$ on a

$$u_{(n\%k)} \leq \max_{0\leq r\leq k-1} u_r.$$

On obtient bien

$$u_n \leq (n /\!\!/ k)u_k + \max_{0\leq r\leq k-1} u_r$$

ce qui comme $\frac{1}{n} > 0$ donne

$$\boxed{\frac{u_n}{n} \leq \frac{(n/\!\!/k)}{n}u_k + \frac{1}{n}\max_{0\leq r\leq k-1}(u_r)}.$$

Posons

$$\ell = \inf_{k\in\mathbb{N}^*}\left(\frac{u_k}{k}\right).$$

On remarque tout d'abord que comme infimum d'un ensemble non vide de réels, $\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.

On a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ell \leq \frac{u_n}{n}$$

donc par passage à la limite inférieure de l'inégalité large (cf exercices sur lim inf et lim sup),

$$\boxed{\ell \leq \liminf_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n}}.$$

Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

On a montré que

$$\frac{u_n}{n} \leq \frac{(n \mathbin{/\!\!/} k)}{n} u_k + \frac{1}{n} \max_{0\leq r\leq k-1}(u_r).$$

Lorsque $n \to +\infty$, $\frac{1}{n} \to 0$ et $\frac{(n/\!/k)}{n} \to \frac{1}{k}$.

Donc

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{(n \mathbin{/\!\!/} k)}{n} u_k + \frac{1}{n} \max_{0\leq r\leq k-1}(u_r) \right) = \frac{u_k}{k}$$

et donc en particulier

$$\limsup_{n\to+\infty} \left(\frac{(n \mathbin{/\!\!/} k)}{n} u_k + \frac{1}{n} \max_{0\leq r\leq k-1}(u_r) \right) = \frac{u_k}{k}.$$

Par passage à la limite supérieure de l'inégalité large (cf exercices sur lim inf et lim sup) on a donc

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n} \leq \frac{u_k}{k}.$$

Comme $k \in \mathbb{N}^*$ est arbitraire on a donc montré

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \limsup_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n} \leq \frac{u_k}{k}.$$

En passant à l'inf (sur $k \in \mathbb{N}^*$) on en déduit

$$\boxed{\limsup_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n} \leq \ell}.$$

De par les deux inégalités démontrées et par l'inégalité entre lim inf et lim sup (cf exercices sur lim inf et lim sup) on en déduit

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n} = \ell = \liminf_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n}$$

c'est à dire (cf exercices sur lim inf et lim sup),

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n} = \ell}.$$

Chapitre 13

Introduction à l'Algèbre Linéaire

Énoncés 469
Calculs et sous-espaces vectoriels 470
Calculs et familles 475
Manipulation de sevs 479
Manipulation de familles 483
Applications explicites 486
Le yoga de l'algèbre linéaire 489
Projecteurs et symétries 491
En vrac 493
Un zeste de dualité 496
Indications 497
Solutions 504

Énoncés

Dans tout le TD, $\mathbb{K}$ sera un corps et on écrira «espace vectoriel» ou «ev» pour «$\mathbb{K}$-espace vectoriel».

Calculs et sous-espaces vectoriels

Exercice 1 (◔★ Sous-espaces vectoriels ? (compréhension))
On se place dans $\mathbb{R}^2$ muni de sa structure d'espace vectoriel.

Les sous-ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriel de $\mathbb{R}^2$?

1. L'ensemble

$$F_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x = y \right\}.$$

2. L'ensemble

$$F_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x - y \leq 0 \right\}.$$

3. L'ensemble

$$F_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0 \right\}.$$

4. L'ensemble

$$F_4 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 1 \geq 2x \right\}.$$

5. L'ensemble

$$F_5 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x + y - 1 = 0 \right\}.$$

6. L'ensemble

$$F_6 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid (3x + 2y = 0) \text{ ou } (-3x + y = 0) \right\}.$$

7. L'ensemble

$$F_7 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid 2x = x \right\}.$$

8. L'ensemble

$$F_8 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 = y^2 \right\}.$$

9. L'ensemble

$$F_9 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \sin(x + y) = 0 \right\}.$$

10. L'ensemble

$$F_{10} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq x - 1 \right\}.$$

11. L'ensemble

$$F_{11} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid 3y = 2x \right\}.$$

12. L'ensemble

$$F_{12} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0 \right\}.$$

Indication p. 497

Exercice 2 (◔★ Sous-espaces vectoriels ? (extension))
On se place dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure d'espace vectoriel.

Les sous-ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriel de $\mathbb{R}^3$?

1. L'ensemble

$$F_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 3s-2t \\ -s \\ s+t \end{pmatrix}, (t,s) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

2. L'ensemble

$$F_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 3s-2r \\ -t \end{pmatrix}, (t,s,r) \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

3. L'ensemble

$$F_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

4. L'ensemble

$$F_4 = \left\{ \begin{pmatrix} 2ts \\ (1-t^2)s \\ (1+t^2)s \end{pmatrix}, (t,s) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

5. L'ensemble

$$F_5 = \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + (s+t) \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, (t,s) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

6. L'ensemble

$$F_6 = \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ -t \end{pmatrix}, (t,s) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

7. L'ensemble

$$F_7 = \left\{ \begin{pmatrix} 3-t \\ -s \\ s+t \end{pmatrix}, (t,s) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

8. L'ensemble

$$F_8 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ t^2+s^3 \\ 0 \end{pmatrix}, (t,s) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

9. L'ensemble

$$F_9 = \left\{ \begin{pmatrix} 3s+4t-3r+5w \\ 3s+4t-3r+5w \\ 0 \end{pmatrix}, (t,s,r,w) \in \mathbb{R}^4 \right\}.$$

10. L'ensemble

$$F_{10} = \left\{ t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -t \\ 0 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

11. L'ensemble

$$F_{11} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, (t,s) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

12. L'ensemble

$$F_{12} = \left\{ \cos(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Exercice 3 (◔★ Sous-espaces vectoriels ? (fonctions))
Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Les parties suivantes sont-elles des sous-espaces vectoriels de E ?

1. L'ensemble des fonctions continues.
2. L'ensemble des fonctions positives.
3. L'ensemble des fonctions ne s'annulant jamais.
4. L'ensemble des fonctions s'annulant au moins une fois.
5. L'ensemble des fonctions admettant une limite finie en $+\infty$.
6. L'ensemble des fonctions admettant une limite finie ou infinie en $+\infty$
7. L'ensemble des fonctions majorées.
8. L'ensemble des fonctions bornées.
9. L'ensemble des fonctions croissantes.
10. L'ensemble des fonctions monotones.
11. L'ensemble des fonctions 2π-périodiques.
12. L'ensemble des fonctions périodiques.
13. L'ensemble des fonctions pouvant s'écrire comme différence de deux fonctions croissantes.
14. L'ensemble des fonctions f pour lesquelles il existe un segment $[a, b]$ t.q $\forall x \notin [a, b], f(x) = 0$.

Indication p. 497

Exercice 4 (◔★ Sous-espaces vectoriels ? (matrices carrées))
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer si les ensembles suivants sont des sevs de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ et le cas échéant expliciter une base de ces sevs.

1. L'ensemble des matrices inversibles.
2. L'ensemble des matrices symétriques.
3. L'ensemble des matrices antisymétriques.
4. L'ensemble des matrices nilpotentes.
5. L'ensemble des matrices diagonales.
6. L'ensemble des matrices triangulaires supérieures.
7. L'ensemble des matrices triangulaires inférieures strictes.
8. L'ensemble des homothéties.
9. L'ensemble des matrices de traces nulles.

Indication p. 498

Calculs et familles

Exercice 5 (◔★ Libre, génératrice, base ou rien du tout)
Les familles suivantes sont-elles libres ? sont-elles génératrices ?

1. Dans $\mathbb{R}^3$

$$\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)$$

2. Dans $\mathbb{R}^3$

$$\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}\right)$$

3. Dans $\mathbb{R}^3$

$$\left(\begin{pmatrix}4\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}\right)$$

4. Dans $\mathbb{R}^3$

$$\left(\begin{pmatrix}4\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}\right)$$

5. Dans $\mathbb{R}^3$

$$\left(\begin{pmatrix}4\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}36\\-\frac{7}{3}\\1\end{pmatrix}\right)$$

6. Dans $\mathbb{R}^3$

$$\left(\begin{pmatrix}4\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\-8\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\5\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-4\\2\\0\end{pmatrix}\right)$$

7. Dans $\mathbb{R}^4$

$$\left(\begin{pmatrix}1\\2\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\0\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-4\\-2\\1\\-1\end{pmatrix}\right)$$

8. Dans $\mathbb{R}^4$

$$\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right)$$

9. ▯ Demander à une personne de votre choix de vous donner une famille de vecteurs d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ et déterminer si elle est libre, si elle est génératrice.

Indication p. 498

Exercice 6 (◔★ Liberté à paramètre)
Déterminer l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que la famille de vecteurs de $\mathbb{C}^3$

$$\left(\begin{pmatrix}\lambda\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\\lambda\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\\lambda\end{pmatrix}\right)$$

est **liée**.

Indication p. 498

Exercice 7 (◔★ Un exemple d'opérations)
Soit E un espace vectoriel.

Soit $(u_1, ..., u_p) \in E^p$ une famille libre de E.

On pose pour $k \in [\![1, p-1]\!]$

$$v_k = u_k - u_p.$$

Montrer que $(v_1, ..., v_{p-1})$ une famille libre de E.

Indication p. 498

Exercice 8 (◔★ Vect de vect)
Soit E un espace vectoriel, $(u_1, ..., u_p) \in E^p$ et $(v_1, ..., v_q) \in E^q$ deux familles de vecteurs de E

On suppose que

$$\forall k \in [\![1, q]\!], v_k \in \text{Vect}(u_1, ..., u_p).$$

Montrer que

$$\text{Vect}(v_1, ..., v_q) \subset \text{Vect}(u_1, ..., u_p).$$

Indication p. 498

Exercice 9 (◔★♠ Famille de Vandermonde)
Soit $n \in \mathbb{N}$.

Soit $(x_0, x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $(n+1)$ réels **deux à deux distincts**.

Montrer que la famille

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} (x_0)^2 \\ (x_1)^2 \\ \vdots \\ (x_n)^2 \end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} (x_0)^n \\ (x_1)^n \\ \vdots \\ (x_n)^n \end{pmatrix} \right)$$

est une base de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Indication p. 498

Exercice 10 (◔★ D'autres opérations)
Soit E un espace vectoriel et $(u_1, ..., u_p) \in E^p$ une famille de vecteurs de E.

Pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, on pose

$$v_k = \sum_{i=1}^{k} u_i.$$

1. Montrer que $(u_1, ..., u_p)$ est libre **ssi** $(v_1, ..., v_p)$ est libre.
2. Montrer que $(u_1, ..., u_p)$ est génératrice **ssi** $(v_1, ..., v_p)$ est génératrice.

Indication p. 498

Exercice 11 (◔★ Famille à diagonale dominante)
Soit $n \in \mathbb{N}$ et $(c_1, ..., c_n) \in (\mathbb{C}^n)^n$ une famille de n vecteurs de $\mathbb{C}^n$.

On suppose que

$$\forall i \in [\![1, n]\!], |(c_i)_i| > \sum_{\substack{j \in [\![1,n]\!] \\ j \neq i}} |(c_j)_i|.$$

Montrer que la famille $(c_1, ..., c_n)$ est libre.

Indication p. 498

Exercice 12 (◔★ Polynômes annulateurs de matrices 2×2)
Soit $A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{K})$.

Montrer que la famille (I_2, A, A^2) est liée.

Indication p. 498

Exercice 13 (◔★ Vers la liberté et algébricité)
On considère $\mathbb{R}$ en tant que $\mathbb{Q}$-espace vectoriel.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que α est irrationnel ssi la famille $(1, \alpha)$ est libre.
2. Montrer que α est racine d'un polynôme du second degré à coefficients entiers ssi la famille $(1, \alpha, \alpha^2)$ est liée.
3. Traduire de manière «la famille $\left(\alpha^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est libre».

Indication p. 498

Manipulation de sevs

Exercice 14 (◔★♣ Caractérisation de la somme)
Soit E un espace vectoriel.

Montrer que $F + G$ est le plus petit (au sens de l'inclusion) espace vectoriel contenant F et G.

Indication p. 499

Exercice 15 (◔★ Reformulation de résultats connus (parité))
Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ev des fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

On note P l'ensemble des fonctions paires et I l'ensemble des fonctions impaires.

1. Expliquer pourquoi P et I sont des sevs de E.
2. Montrer que P et I sont supplémentaires.
3. Expliciter la symétrie par rapport à P parallèlement à I.

Indication p. 499

Exercice 16 (◔★♣ Reformulation de résultats connus (transposition))
Soit $E = \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ l'ev des matrices carrées.

On note $S_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques et $A_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques.

1. Expliquer pourquoi $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont des sevs de E.
2. Montrer que $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires.
3. Expliciter la symétrie par rapport à $S_n(\mathbb{R})$ parallèlement à $A_n(\mathbb{R})$.

Indication p. 499

Exercice 17 (◔★♣ Opérations ensemblistes et sev.)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

1. Redémontrer que $F \cap G$ est un sev.
2. Montrer que le complémentaire de F, noté $\overline{F}$, n'est **pas** un sous-espace vectoriel.
3. Montrer que $F \cup G$ est un sev **ssi** $F \subset G$ ou $G \subset F$.

Indication p. 499 · Solution p. 504

Exercice 18 (◔☆ Reformulation de résultats connus (moyenne nulle))
Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$.

On définit

$$F = \left\{ f \in E \mid \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \right\}.$$

1. Montrer que F est un sev de E.
2. Soit $g \in E$ tel que $g \notin F$. On pose $D = \mathrm{Vect}(g)$ Montrer que $F \oplus D = E$.
3. Dans ce cas expliciter la projection sur F parallèlement à D.
4. Soit D un supplémentaire de F. Montrer qu'il existe $g \in E$ tel que $D = \mathrm{Vect}(g)$.

Indication p. 499

Exercice 19 (◔★ Propriétés du Vect)

1. Soit A une partie de E. Montrer que A est un espace vectoriel ssi $\text{Vect}(A) = A$.
2. Soit A une partie de E. Que dire de $\text{Vect}(\text{Vect}(A))$?
3. Soient A, B des parties de E.

   Montrer que si $A \subset B$ alors $\text{Vect}(A) \subset \text{Vect}(B)$.
4. Soient $(A_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ une famille finie de parties de E. Montrer que

$$\text{Vect}(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = \text{Vect}(A_1) + \cdots + \text{Vect}(A_n).$$

5. Soient A, B des parties de E.

   Comparer $\text{Vect}(A \cap B)$ et $\text{Vect}(A) \cap \text{Vect}(B)$.

Indication p. 499

Exercice 20 (◔☆ On peut enlever un sev strict)
Soit E un espace vectoriel.

Soit F un sev strict de E (c'est à dire F est un sev de E et $F \neq E$).

Montrer que $\text{Vect}(E \setminus F) = E$.

Indication p. 499

Exercice 21 (◑★ Intersection de somme ?)
Soit E un espace vectoriel.

Soient F, G, H des sevs de E.

1. Montrer que $(F \cap G) + (F \cap H) \subset F \cap (G + H)$.
2. Donner un exemple où $(F \cap G) + (F \cap H) \neq F \cap (G + H)$.
3. Montrer que $F \cap (G + (F \cap H)) = (F \cap G) + (F \cap H)$.

Indication p. 499

Exercice 22 (◑★ Inclusion et somme directe)
Soit E un espace vectoriel.

Soient F_1, F_2, G_1, G_2 des sevs de E.

On suppose
- $F_1 \subset F_2$ et $G_1 \subset G_2$,
- $F_1 \oplus G_1 = F_2 \oplus G_2$.

1. Montrer que $F_1 = F_2$ et $G_1 = G_2$.
2. Le résultat précédent reste t il vrai si la somme n'est plus directe ?

Indication p. 499

Exercice 23 (◑★ Rendre une somme directe)
Soit E un espace vectoriel.

Soient A, B et C trois sevs de E.

On suppose que $(A \cap B) \oplus C = B$.

Montrer que $A + B = A \oplus C$.

Indication p. 499

Exercice 24 (◔★ Relèvement de conditions aux bords I)
On note $E = \mathcal{D}^1([0, +\infty[, \mathbb{R})$ l'ev des fonctions de $\mathbb{R}_+$ vers $\mathbb{R}$ dérivables sur $\mathbb{R}_+$.

On note $F_D = \{f \in E \mid f(0) = 0\}$, $F_N = \{f \in E \mid f'(0) = 0\}$ et $F_R = \{f \in E \mid f'(0) + f(0) = 0\}$.

1. Expliquer brièvement pourquoi F_N, F_D et F_R sont des sevs de E.
2. Pour chacun de ces sevs, expliciter un supplémentaire.

Indication p. 499

Exercice 25 (◔★ Relèvement de conditions aux bords II)
On note $E = \mathcal{C}^\infty([0, 1], \mathbb{R})$ l'ev des fonctions de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ dérivables une infinité de fois.

On note $F = \{f \in E \mid f(0) = f(1) = 0\}$.

1. Expliquer brièvement pourquoi F est un sev de E.
2. Déterminer g_0 et g_1 deux vecteurs de E tels que $F \oplus \text{Vect}(g_0, g_1) = E$.

Indication p. 499

Manipulation de familles

Exercice 26 (◔★♣ Liberté et famille échelonnée)
Soit $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}$.

On considère une famille $\left(c_1, ..., c_p\right) \in (\mathbb{K}^n)^p$ de vecteurs de $\mathbb{K}^n$.

On dit que cette famille est **échelonnée** ssi la matrice dont les colonnes sont $c_1, ..., c_p$ est échelonnée en colonnes.

Montrer que «une famille échelonnée est libre ssi elle ne contient pas de vecteurs nuls».

Indication p. 500

Exercice 27 (◔★♣ Polynômes de degrés échelonnés)
Soit $E = \mathbb{K}[X]$.

On dit qu'une famille de polynômes $(P_1, P_2, ..., P_n)$ est **échelonnée** (en degré) ssi

$$0 \leq \deg(P_1) < \deg(P_2) < \cdots < \deg(P_n).$$

Montrer que toute famille de polynômes échelonnée est libre.

Indication p. 500

Exercice 28 (◔★♣ Polynômes de degrés échelonnés, la suite)

1. Soit $n \in \mathbb{N}$.

Soit $(P_0, ..., P_n)$ une famille de polynômes telle que

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \deg(P_k) = k.$$

Montrer que $(P_0, ..., P_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

2. Soit $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une famille de polynômes telle que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \deg(P_k) = k.$$

Montrer que $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$.

Indication p. 500

Exercice 29 (◔★♣ Base de Lagrange I)
Soit $n \in \mathbb{N}$ et $(x_0, ..., x_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ des nombres complexes **deux à deux distincts**.

Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$ on considère les polynômes

$$\tilde{L}_k = \prod_{j \in [\![0,n]\!] \setminus \{k\}} (X - x_j)$$

et

$$L_k = \frac{1}{\tilde{L}_k(x_k)} \tilde{L}_k \in \mathbb{K}_n[X].$$

1. Commenter la bonne définition de la famille $(L_k)_{k \in [\![0,n]\!]}$. Calculer pour tout $(i, j) \in [\![0, n]\!]^2$
$$L_j(x_i).$$
2. Montrer que la famille $(L_k)_{0 \leq k \leq n}$ est libre.
3. Montrer que pour tout $P \in \mathbb{K}_n[X]$,
$$P = \sum_{k=0}^{n} P(x_k) L_k.$$
4. Que peut-on dire de la famille $(L_k)_{0 \leq k \leq n}$?

Indication p. 500

Exercice 30 (◑★ Linéarisation et Tchebychev I)
Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$ on note

$$\cos^k(\cdot) : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto (\cos(x))^k \end{array}.$$

et

$$\cos(k\,\cdot) : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \cos(kx) \end{array}.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\mathrm{Vect}\Big(\big(\cos^k(\cdot)\big)_{0 \leq k \leq n}\Big) = \mathrm{Vect}\big((\cos(k\,\cdot))_{0 \leq k \leq n}\big).$$
2. Montrer que
$$\mathrm{Vect}\Big(\big(\cos^k(\cdot)\big)_{k \in \mathbb{N}}\Big) = \mathrm{Vect}\big((\cos(k\,\cdot))_{k \in \mathbb{N}}\big).$$

Indication p. 500 · Solution p. 504

Exercice 31 (◑★ Liberté de famille d'exponentielles)

1. On considère $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ on note e_λ le vecteur de E défini par

$$e_\lambda : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & e^{\lambda t}. \end{array}$$

Montrer que la famille $(e_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ est libre.

2. On considère $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Pour $\lambda \in \mathbb{C}$ on note e_λ le vecteur de E défini par

$$e_\lambda : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & e^{\lambda t}. \end{array}$$

Montrer que la famille $(e_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{C}}$ est libre.

Indication p. 500

Exercice 32 (◔★ Suites de références)

Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'espace vectoriel des suites réelles.

1. Montrer que la famille $\left((q^n)_{n\in\mathbb{N}}\right)_{q\in\mathbb{R}^*}$ est libre.

2. Montrer que la famille $\left((n^\alpha)_{n\in\mathbb{N}}\right)_{\alpha\in\mathbb{R}^*}$ est libre.

3. La famille $\left((n^\alpha q^n)_n\right)_{(q,\alpha)\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}}$ est-elle libre ?

Indication p. 500

Exercice 33 (◑☆ Un zeste d'arithmétique)

On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers.

On considère $\mathbb{R}$ en tant que $\mathbb{Q}$-espace vectoriel.

Montrer que la famille $(\ln(p))_{p\in\mathcal{P}}$ est libre.

Indication p. 500

Exercice 34 (◔☆ Pourquoi est-ce un classique ?)

Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ l'ev des fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

Montrer que la famille $(x \mapsto |x - \lambda|)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ est libre. Est-elle génératrice ?

Indication p. 500

Exercice 35 (◔★ Amplitude/phase)
Soit $\omega > 0$. On note

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{matrix} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto A\cos(\omega t + \varphi) \end{matrix} \;\middle|\; (A, \varphi) \in \mathbb{R} \times [0, 2\pi[\right\}.$$

1. Montrer que $\mathcal{S}$ est un espace vectoriel.
2. Proposer une base de $\mathcal{S}$.

Indication p. 500

Applications explicites

Exercice 36 (◔★♠ Homothéties locales)
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

On suppose que

$$\forall x \in E, \exists \lambda \in \mathbb{K}, u(x) = \lambda x.$$

Montrer que u est une homothétie.

Indication p. 501

Exercice 37 (◔★ Un tout petit lemme des noyaux)
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ tels que $\lambda \neq \mu$.

Montrer que

$$\mathrm{Ker}((u - \lambda \mathrm{Id}_E) \circ (u - \mu \mathrm{Id}_E)) = \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(u - \mu \mathrm{Id}_E).$$

Indication p. 501

Exercice 38 (◑★ Lagrange et Taylor)
Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Soient $(x_0, ..., x_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ deux à deux distincts.

Montrer que

$$\begin{aligned} \mathbb{C}_n[X] &\to \mathbb{C}^{n+1} \\ P &\mapsto \begin{pmatrix} P(x_0) \\ P(x_1) \\ \vdots \\ P(x_n) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

est un isomorphisme et expliciter son inverse.

2. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. Montrer que

$$\begin{aligned} \mathbb{C}_n[X] &\to \mathbb{C}^{n+1} \\ P &\mapsto \begin{pmatrix} P(\alpha) \\ P'(\alpha) \\ \vdots \\ P^{(n)}(\alpha) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

est un isomorphisme et expliciter son inverse.

Indication p. 501

Exercice 39 (◑☆ Translation et polynôme)
On considère l'application linéaire

$$\begin{aligned} \Delta : \mathbb{C}[X] &\to \mathbb{C}[X] \\ P &\mapsto P(X+1) - P(X). \end{aligned}$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\mathbb{C}_n[X]$ est stable par Δ. Déterminer $\mathrm{Ker}\left(\Delta_{\mathbb{C}_n[X]}\right)$ et $\mathrm{Im}\left(\Delta_{\mathbb{C}_n[X]}\right)$.

2. Déterminer $\mathrm{Ker}(\Delta)$ et $\mathrm{Im}(\Delta)$.

Indication p. 501

Exercice 40 (◔★ Compositions à droites et à gauche)
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que l'ensemble
$$\{v \in \mathcal{L}(E) \mid \mathrm{Im}(v) \subset \mathrm{Ker}(u)\}$$
est un sev de $\mathcal{L}(E)$ en exhibant une application linéaire dont il est le noyau.
2. Montrer que l'ensemble
$$\{v \in \mathcal{L}(E) \mid \mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(v)\}$$
est un sev de $\mathcal{L}(E)$ en exhibant une application linéaire dont il est le noyau.

Indication p. 501

Exercice 41 (◑★ L'identité comme commutant ? Le début de plusieurs exercices.)
Soient u et v deux endomorphismes de E tels que
$$u \circ v - v \circ u = \mathrm{Id}_E .$$

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,
$$u^k \circ v - v \circ u^k = k u^{k-1}.$$
2. Montrer que la famille $\left(u^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est une famille libre de $\mathcal{L}(E)$.

Indication p. 501

Exercice 42 (◑☆ Pas exactement de demi-dérivée)
On note $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dérivables un nombre quelconque de fois.

On note
$$\begin{aligned} D : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) &\to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ f &\mapsto f' \end{aligned}$$
l'opérateur de dérivation.

Montrer qu'il n'existe **pas** de $\delta \in \mathcal{L}(\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}))$ tel que $\delta^2 = D$.

Indication p. 501

Le yoga de l'algèbre linéaire

Exercice 43 (◔★♠ Le mouvement de base du yoga)
Soient E, F, G des evs, $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $v \in \mathcal{L}(F,G)$.

1. Montrer que $\mathrm{Im}(v\circ u) \subset \mathrm{Im}(v)$ et que $\mathrm{Ker}(v\circ u) \supset \mathrm{Ker}(u)$.

2. Montrer que

$$\mathrm{Im}(v\circ u) = \mathrm{Im}(v) \Leftrightarrow \mathrm{Im}(u) + \mathrm{Ker}(v) = F.$$

3.
$$\mathrm{Ker}(v\circ u) = \mathrm{Ker}(u) \Leftrightarrow \mathrm{Im}(u) \cap \mathrm{Ker}(v) = \{0_F\}.$$

Indication p. 501

Exercice 44 (◔★ Un exemple de yoga)
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que

$$\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f) = \{0_E\} \Leftrightarrow \mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2).$$

2. Montrer que

$$\mathrm{Im}(f) + \mathrm{Ker}(f) = E \Leftrightarrow \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2).$$

3. Commenter par cet exercice par rapport à l'exercice 43.

Indication p. 501

Exercice 45 (◔★♠ Manipulation très pratique pour le théorème du rang)
Soient E, F, G des evs, $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $v \in \mathcal{L}(F,G)$.

1. Montrer que

$$\mathrm{Im}(v\circ u) = \mathrm{Im}\left(v_{|\mathrm{Im}(u)}\right).$$

2. Montrer que

$$\mathrm{Ker}\left(v_{|\mathrm{Im}(u)}\right) = \mathrm{Ker}(v) \cap \mathrm{Im}(u).$$

Indication p. 501

Exercice 46 (◑★♠ Le yoga de la factorisation)
Soient E et F deux evs, $u \in \mathcal{L}(E,F)$.

Soit S un sev de E. On note $\tilde{u} \in \mathcal{L}(S, \mathrm{Im}(u))$ l'application définie par $\begin{array}{ccc} \tilde{u} : S & \to & \mathrm{Im}(u) \\ x & \mapsto & u(x) \end{array}$.

(Ainsi $\tilde{u} = u_{|S}^{|\mathrm{Im}(u)}$)

Montrer que

$$\tilde{u} \text{ est un isomorphisme} \Leftrightarrow S \oplus \mathrm{Ker}(u) = E.$$

Indication p. 501

Exercice 47 (◑★ Les supplémentaires sont isomorphes)
Soit F un sev de E.

Soient S_1 et S_2 deux supplémentaires de F.

Faire un schéma.

Montrer que S_1 et S_2 sont isomorphes (i.e il existe une application linéaire bijective entre S_1 et S_2).

Indication p. 501

Exercice 48 (◔☆ Inclusion des images directes)
Soient E et F deux evs, $u \in \mathcal{L}(E,F)$.

Soient G, H deux sevs de E.

Montrer que

$$u(G) \subset u(H) \Leftrightarrow (G + \mathrm{Ker}(u)) \subset (H + \mathrm{Ker}(u)).$$

Indication p. 502

Projecteurs et symétries

Exercice 49 (◔★ Projections et symétries explicites en dimension 2)
Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que l'application linéaire canoniquement associée à la matrice
$$\begin{pmatrix} \cos(\theta)^2 & \cos(\theta)\sin(\theta) \\ \cos(\theta)\sin(\theta) & \sin(\theta)^2 \end{pmatrix}$$
est un projecteur et déterminer ses espaces caractéristiques. Faire un schéma.
2. Montrer que l'application linéaire canoniquement associée à la matrice
$$\begin{pmatrix} \cos(2\theta) & \sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & -\cos(2\theta) \end{pmatrix}$$
est une symétrie et déterminer ses espaces caractéristiques. Faire un schéma.

Indication p. 502

Exercice 50 (◑★ Calculs avec des projecteurs)
Soient p et q deux projecteurs de E.

1. On suppose que p et q commutent (c'est à dire $p \circ q = q \circ p$). Montrer que $p \circ q$ est un projecteur, que $\mathrm{Im}(p \circ q) = \mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(q)$ et $\mathrm{Ker}(p \circ q) = \mathrm{Ker}(p) + \mathrm{Ker}(q)$.
2. On suppose que $p \circ q = 0$. Montrer que $r = p + q - q \circ p$ est un projecteur, que $\mathrm{Im}(r) = \mathrm{Im}(p) + \mathrm{Im}(q)$ et $\mathrm{Ker}(r) = \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q)$.

On suppose désormais que $p + q$ est un projecteur.

1. Montrer que $q \circ p = p \circ q = 0$.
2. Montrer que $\mathrm{Im}(p + q) = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Im}(q)$ et $\mathrm{Ker}(p + q) = \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q)$.

Solution p. 504

Exercice 51 (◑★ Deux espaces propres et polynôme annulateur de degré 2)
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ deux scalaires distincts.

On suppose que

$$u^2 - (\lambda + \mu)u + \lambda\mu \operatorname{Id}_E = 0_{\mathcal{L}(E)}.$$

On définit p_λ et p_μ par

$$p_\lambda = \frac{1}{\lambda - \mu}(u - \mu \operatorname{Id}_E)$$

$$p_\mu = \frac{1}{\mu - \lambda}(u - \lambda \operatorname{Id}_E)$$

1. Commenter les cas $(\lambda, \mu) = (1, 0)$ et $(\lambda, \mu) = (1, -1)$.
2. Montrer que p_λ et p_μ sont des projecteurs.
3. Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}, u^n = \lambda^n p_\lambda + \mu^n p_\mu.$$
4. On suppose dans cette question que λ et μ tous les deux non nuls. Montrer que $u \in \mathrm{GL}(E)$.
5. On suppose que u n'est pas une homothétie. Déterminer l'ensemble des $\nu \in \mathbb{K}$ tels que $u - \nu \operatorname{Id}_E$ est inversible.

Indication p. 502

Exercice 52 (◔☆ Définition d'une application linéaire sur des supplémentaires)
Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur.

On note $q = \operatorname{Id}_E - p$ son projecteur associé.

Montrer que

$$F_p = \{u \circ p, u \in \mathcal{L}(E)\}$$

$$F_q = \{u \circ q, u \in \mathcal{L}(E)\}$$

sont deux sevs de $\mathcal{L}(E)$ et que

$$F_p \oplus F_q = \mathcal{L}(E).$$

Indication p. 502

En vrac

Exercice 53 (◔☆ Hyperplans se ressemblent a priori)
Soient H_1 et H_2 deux hyperplans de E.

Montrer que H_1 et H_2 sont isomorphes.

Indication p. 502

Exercice 54 (◔★ Pas grand chose à dire sur les sommes)
Soient E, F des evs, $u, v \in \mathcal{L}(E, F)$.

1. Montrer que
$$\mathrm{Im}(u+v) \subset \mathrm{Im}(u) + \mathrm{Im}(v).$$
2. Montrer que
$$\mathrm{Ker}(u+v) \supset \mathrm{Ker}(u) + \mathrm{Ker}(v).$$
3. Pour chaque inclusion précédente donner un exemple où il y a égalité, et un exemple où l'inclusion est stricte.

Indication p. 502

Exercice 55 (◔★ Deux hyperplans admettent un supplémentaire commun)
Soient H_1 et H_2 deux hyperplans de E.

Montrer qu'il existe une droite vectorielle D telle que
$$H_1 \oplus D = H_2 \oplus D = E.$$

Indication p. 502

Exercice 56 (◔★ Cela doit faire la troisième fois que l'exercice est traité)
Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ inversible et $n \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent.

On suppose que u et n commutent. Montrer que $(u+n)$ est inversible.

Indication p. 502

Exercice 57 (◑★ Complexifié)
Soit E un $\mathbb{R}$-ev.

On muni $E \times E$ de la loi produit pour l'addition, et de la loi externe sur le corps $\mathbb{C}$ définie par

$$\forall z \in \mathbb{C}, \forall (x,y) \in E \times E, z.(x,y) = (\mathrm{Re}(z)x - \mathrm{Im}(z)y, \mathrm{Re}(z)y + \mathrm{Im}(z)x).$$

Montrer que $E \times E$ est un $\mathbb{C}$ espace vectoriel.

Indication p. 502

Exercice 58 (◔☆ Vect et image directe)
Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$, et $A \subset E$.

Montrer que $u(\mathrm{Vect}(A)) = \mathrm{Vect}(u(A))$.

Indication p. 502

Exercice 59 (◑★ Le Dirac n'est pas une fonction)
Soit $E = \mathcal{C}^0([-1,1],\mathbb{R})$.

Pour tout $f \in E$ on note

$$\begin{aligned} \varphi_f : E &\to \mathbb{R} \\ g &\mapsto \int_{-1}^{1} g(t)f(t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

1. Soit $f \in E$. Montrer que $\varphi_f \in \mathcal{L}(E,\mathbb{R})$.
2. Montrer que
$$\begin{aligned} \Phi : E &\to \mathcal{L}(E,\mathbb{R}) \\ f &\mapsto \varphi_f \end{aligned}$$
est linéaire.
3. On rappelle la propriété suivante: «Si l'intégrale d'une fonction continue et positive est nulle alors la fonction est nulle».

   Montrer que Φ est injective.
4. On défini $\delta_0 \in \mathcal{L}(E,\mathbb{R})$ par
$$\begin{aligned} \delta_0 : E &\to \mathbb{R} \\ f &\mapsto f(0) \end{aligned}$$
   Montrer que $\delta_0 \notin \mathrm{Im}(\Phi)$.

Indication p. 502

Exercice 60 (◕★ Théorème de Maschke)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathcal{G} \subset \mathrm{GL}(E)$ un sous-groupe fini du groupe des automorphismes de E.

Soit F un sev de E stable par $\mathcal{G}$ c'est à dire tel que

$$\forall x \in F, \forall g \in \mathcal{G}\ g(x) \in F.$$

Montrer que F admet un supplémentaire stable par $\mathcal{G}$ c'est à dire qu'il existe S sev tel que:

$$F \oplus S = E$$

et

$$\forall x \in S, \forall g \in \mathcal{G}, g(x) \in S.$$

Indication p. 502

Exercice 61 (◔★ Spectre d'un projecteur)
Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur non trivial (c'est à dire $p \neq 0_E$ et $p \neq \mathrm{Id}_E$).

Déterminer l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{K}$ tels que $p - \lambda \mathrm{Id}_E$ n'est pas inversible.

Indication p. 503

Exercice 62 (◑★♠ Un bloc nilpotent fort utile)
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'ordre $n \geq 1$ c'est à dire tel que $u^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $u^{n-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que la famille $\left(x, u(x), ..., u^{n-1}(x)\right)$ est libre.

Indication p. 503

Exercice 63 (◑☆ Un exo classique de groupe camouflé)
Soit G un sous-groupe de $\mathrm{GL}(E)$ constitué de symétries (c'est à dire que pour tout $s \in G$, s est une symétrie).

Montrer que G est commutatif.

Indication p. 503

Un zeste de dualité

Exercice 64 (◔★♣ Égalité de deux hyperplans)
Soient $\varphi_1, \varphi_2 \in E^* \setminus \{0_{E^*}\}$.

Montrer que

$$\mathrm{Ker}(\varphi_1) = \mathrm{Ker}(\varphi_2) \Leftrightarrow \varphi_1, \varphi_2 \text{ sont colinéaires.}$$

Indication p. 503

Exercice 65 (◑★ Intersection d'hyperplans I)
Soient $\varphi_1, \varphi_2 \in E^*$.

Soit $\psi \in E^*$.

Montrer que

$$\mathrm{Ker}(\psi) \supset \mathrm{Ker}(\varphi_1) \cap \mathrm{Ker}(\varphi_2) \quad \Leftrightarrow \quad \psi \in \mathrm{Vect}(\varphi_1, \varphi_2).$$

Indication p. 503

Exercice 66 (◕★♠ Intersection d'hyperplans II)
Soient $\varphi_1, ..., \varphi_n \in E^*$.

Soit $\psi \in E^*$.

Montrer que

$$\mathrm{Ker}(\psi) \supset \bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Ker}(\varphi_i) \Leftrightarrow \psi \in \mathrm{Vect}(\varphi_1, ..., \varphi_n).$$

Indication p. 503

Indications

Indication 1 · Énoncé p. 471 (Sous-espaces vectoriels ? (compréhension))
Les réponses sont (le point essentiel étant le démontrer et de faire un schéma)

1. Oui
2. Non
3. Non
4. Oui
5. Non
6. Non
7. Oui
8. Non
9. Non
10. Non
11. Oui
12. Oui

Indication 2 · Énoncé p. 472 (Sous-espaces vectoriels ? (extension))
Les réponses sont (le point essentiel étant le démontrer et de faire un schéma)

1. Oui
2. Non (c'est un sev mais de $\mathbb{R}^2$)
3. Non
4. Non
5. Oui
6. Non
7. Non
8. Oui
9. Oui
10. Oui
11. Oui
12. Non

Indication 3 · Énoncé p. 473 (Sous-espaces vectoriels ? (fonctions))
Les réponses sont (le point essentiel étant le démontrer et de faire un schéma)

1. Oui
2. Non
3. Non
4. Non
5. Oui
6. Non
7. Non
8. Oui
9. Non
10. Non
11. Oui
12. Non
13. Oui
14. Oui

Indication 4 · Énoncé p. 474 (Sous-espaces vectoriels ? (matrices carrées))
Les réponses sont (le point essentiel étant le démontrer et de faire un schéma)

1. Non
2. Oui
3. Oui
4. Non
5. Oui
6. Oui
7. Oui
8. Oui
9. Oui

Indication 5 · Énoncé p. 476 (Libre, génératrice, base ou rien du tout)
Pivot.

Indication 6 · Énoncé p. 477 (Liberté à paramètre)
Pivot.

Indication 7 · Énoncé p. 477 (Un exemple d'opérations)
C'est juste des transvections.

Indication 8 · Énoncé p. 477 (Vect de vect)
Si F est un sev et $A \subset F$ alors par définition $\text{Vect}(A) \subset F$.

Et le Vect est un sev.

Indication 9 · Énoncé p. 478 (Famille de Vandermonde)
Vandermonde.

Indication 10 · Énoncé p. 478 (D'autres opérations)
Ce sont juste des transvections bien choisies.

Indication 11 · Énoncé p. 478 (Famille à diagonale dominante)
Écrire une relation de liaison et regarder un indice maximisant le module du coefficient.

Indication 12 · Énoncé p. 479 (Polynômes annulateurs de matrices 2×2)
On pourra calculer $A^2 - \text{tr}(A)A + \det(A)I_2$.

Indication 13 · Énoncé p. 479 (Vers la liberté et algébricité)

1. Avec $a1 + b\sqrt{\alpha} = 0$ que dire si $b \neq 0$?
2. Écrire la définition. Si le polynôme est de degré < 2, constater que l'on peut augmenter le degré.
3. S'inspirer de la question précédente.

Indication 14 · Énoncé p. 479 (Caractérisation de la somme)
Cours.

Indication 15 · Énoncé p. 479 (Reformulation de résultats connus (parité))
Le plus simple est de commencer par la dernière question !

Indication 16 · Énoncé p. 480 (Reformulation de résultats connus (transposition))
Le plus simple est de commencer par la dernière question.

Indication 17 · Énoncé p. 480 (Opérations ensemblistes et sev.)
Le point essentiel est le dernier.

Pour cela procéder par exemple par contraposée.

Solution p. 504

Indication 18 · Énoncé p. 480 (Reformulation de résultats connus (moyenne nulle))
Le plus simple est de constater qu'il s'agit du cours pour une forme linéaire bien choisie.

Indication 19 · Énoncé p. 481 (Propriétés du Vect)
1. Vect d'un sev, et le vect est un sev.
2. Vect d'un sev.
3. Écrire la définition.
4. Par récurrence (par exemple).
5. Constater que $\subset$ est vraie et trouver un contre-exemple pour l'autre.

Indication 20 · Énoncé p. 481 (On peut enlever un sev strict)
Faire un schéma.

Indication 21 · Énoncé p. 481 (Intersection de somme ?)
Rédaction automatique et schémas.

Indication 22 · Énoncé p. 482 (Inclusion et somme directe)
Rédaction automatique et schéma.

Indication 23 · Énoncé p. 482 (Rendre une somme directe)
Schéma et rédaction automatique.

Indication 24 · Énoncé p. 482 (Relèvement de conditions aux bords I)
Hyperplans.

Indication 25 · Énoncé p. 482 (Relèvement de conditions aux bords II)
Intersection de deux hyperplans.

Indication 26 · Énoncé p. 483 (Liberté et famille échelonnée)
Pivot ou récurrence.

Indication 27 · Énoncé p. 483 (Polynômes de degrés échelonnés)
Pivot ou récurrence.

Indication 28 · Énoncé p. 483 (Polynômes de degrés échelonnés, la suite)
Pivot ou récurrence.

Indication 29 · Énoncé p. 484 (Base de Lagrange I)
Constater que si

$$P = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k L_k$$

alors on peut récupérer pour tout λ_k en évaluant en λ_k.

Indication 30 · Énoncé p. 484 (Linéarisation et Tchebychev I)

1. Linéariser dans un sens, Tchebychever dans l'autre.
2. Utiliser judicieusement le précédent et le fait que les CLs sont à support fini.

Solution p. 504

Indication 31 · Énoncé p. 485 (Liberté de famille d'exponentielles)

1. Se ramener au cas fini, trier par ordre croissant, puis récurrence descendante ou principe de minimalité.

   Ou bien dériver, évaluer et Vandermonde.
2. Se rendre compte que l'on peut se ramener par la question précédente à des parties réelles égales.

   Ensuite intégrale, Cesàro, etc.

   Ou bien dériver, évaluer et Vandermonde.

Indication 32 · Énoncé p. 485 (Suites de références)
Croissances comparées par exemple.

Indication 33 · Énoncé p. 485 (Un zeste d'arithmétique)
Unicité de la DFP.

Indication 34 · Énoncé p. 485 (Pourquoi est-ce un classique ?)
Regarder les points de discontinuité.

Indication 35 · Énoncé p. 486 (Amplitude/phase)
Amplitude-phase…

Indication 36 · Énoncé p. 486 (Homothéties locales)
Remarquer qu'en notant pour tout x, λ_x qui convient (et est unique si $x \neq 0_E$) il suffit de montrer que pour tous x, y, $\lambda_x = \lambda_y$.

Par exemple faire une disjonction de cas entre libre et liée.

Indication 37 · Énoncé p. 486 (Un tout petit lemme des noyaux)
Par exemple remarquer (interpolation de Lagrange dans un cas ultra-particulier) que

$$\mathrm{Id}_E = \frac{1}{\mu - \lambda}((u - \lambda \mathrm{Id}_E) - (u - \mu \mathrm{Id}_E))$$

ou bien se ramener à un projecteur.

Indication 38 · Énoncé p. 487 (Lagrange et Taylor)
Toujours, par principe de superposition, se ramener à la base canonique à l'arrivée.

Indication 39 · Énoncé p. 487 (Translation et polynôme)
On obtient les constantes dans le noyau (pourquoi ?)

Indication 40 · Énoncé p. 488 (Compositions à droites et à gauche)
Le faire «à la main» ou écrire comme des noyaux/images.

Indication 41 · Énoncé p. 488 (L'identité comme commutant ? Le début de plusieurs exercices.)
Récurrence ou télescopage malin.

Indication 42 · Énoncé p. 488 (Pas exactement de demi-dérivée)
Regarder le noyau de δ et constater que deux cas sont possibles. Puis qu'ils sont tous les deux impossibles.

Indication 43 · Énoncé p. 489 (Le mouvement de base du yoga)
Rédaction automatique.

Indication 44 · Énoncé p. 489 (Un exemple de yoga)
Faire d'aborde l'exercice 43.

Indication 45 · Énoncé p. 489 (Manipulation très pratique pour le théorème du rang)
Écrire les définitions.

Indication 46 · Énoncé p. 490 (Le yoga de la factorisation)
Un sens est la forme géométrique du rang.

L'autre sens est juste reprendre la démonstration de la forme géométrique du théorème du rang.

Indication 47 · Énoncé p. 490 (Les supplémentaires sont isomorphes)
Exhiber un isomorphisme par projecteurs et forme géométrique du théorème du rang.

Indication 48 · Énoncé p. 490 (Inclusion des images directes)
Rédaction automatique.

Indication 49 · Énoncé p. 491 (Projections et symétries explicites en dimension 2)
Faire les schémas d'abord.

Indication 51 · Énoncé p. 492 (Deux espaces propres et polynôme annulateur de degré 2)

1. Projecteur et symétrie.
2. Calcul explicite.
3. Montrer que $p_\lambda \circ p_\mu = p_\mu \circ p_\lambda = 0$.
4. S'inspirer de la question précédente pour proposer un inverse.
5. Idem.

Indication 52 · Énoncé p. 492 (Définition d'une application linéaire sur des supplémentaires)
En deux temps:

- $u = u \circ p + u \circ q$,
- regarder le noyau

Indication 53 · Énoncé p. 493 (Hyperplans se ressemblent a priori)
Commencer par traiter les exercices 47 et 55.

Indication 54 · Énoncé p. 493 (Pas grand chose à dire sur les sommes)
Rédaction automatique.

Indication 55 · Énoncé p. 493 (Deux hyperplans admettent un supplémentaire commun)
Il suffit de trouver ξ n'appartenant à aucun hyperplan.

Indication 56 · Énoncé p. 493 (Cela doit faire la troisième fois que l'exercice est traité)
Cf les autres TDs.

Indication 57 · Énoncé p. 494 (Complexifié)
Rédaction.

Indication 58 · Énoncé p. 494 (Vect et image directe)
Double inclusion.

Indication 59 · Énoncé p. 494 (Le Dirac n'est pas une fonction)
Par l'absurde si c'était le cas, que dire de f si $\delta_0 = \Phi(f)$.

Indication 60 · Énoncé p. 495 (Théorème de Maschke)
Considérer S un supplémentaire quelconque, π le projecteur associé puis regarder le projecteur moyenné

$$\frac{1}{|\mathcal{G}|} \sum_{g \in \mathcal{G}} g \circ \pi \circ g^{-1}.$$

Indication 61 · Énoncé p. 495 (Spectre d'un projecteur)
On obtient $\{0,1\}$.

Indication 62 · Énoncé p. 495 (Un bloc nilpotent fort utile)
On choisit x tel que $u^{n-1}(x) \neq 0_E$.

Ensuite en une relation de liaison et en appliquant u^{n-1} on obtient $\lambda_1 = 0$.

Reste à faire une récurrence forte, ou de manière équivalente un principe de minimalité.

Indication 63 · Énoncé p. 495 (Un exo classique de groupe camouflé)
$s^2 = \mathrm{Id}_E$.

Indication 64 · Énoncé p. 496 (Égalité de deux hyperplans)
Prendre $\xi \notin \mathrm{Ker}(\varphi_1) = \mathrm{Ker}(\varphi_2)$ pour trouver le scalaire.

Indication 65 · Énoncé p. 496 (Intersection d'hyperplans I)
Constater qu'un sens est immédiat.

Commencer par l'exercice 64.

Faire une disjonction de cas entre liée et libre.

Dans le cas libre prendre par exemple ξ_1 dans l'un et pas dans l'autre et ξ_2 dans l'autre et pas dans l'un pour déterminer les scalaires.

Indication 66 · Énoncé p. 496 (Intersection d'hyperplans II)
Faire une récurrence sur n, le cas $n = 2$ étant l'exercice 65.

Solutions

Solution pour l'exercice 17 · Énoncé p. 480 · Indication p. 499 (Opérations ensemblistes et sev.)
Cf cours.

Solution pour l'exercice 30 · Énoncé p. 484 · Indication p. 500 (Linéarisation et Tchebychev I)

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, procédons par double inclusion.

▷ $\boxed{\subset}$ On procède par linéarisation.

Soit $k \in [\![0, n]\!]$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}(\cos(x))^k &= \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^k \\ &= \frac{1}{2^k}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}e^{i(k-2j)x} \\ &= \dots\end{aligned}$$

Solution pour l'exercice 50 · Énoncé p. 491 (Calculs avec des projecteurs)

1. ▷ On a comme p et q commutent, puis comme il s'agit de projecteurs

$$(p \circ q)^2 = p^2 \circ q^2 = p \circ q$$

et donc $\boxed{p \circ q \text{ est un projecteur}}$.

▷ On a $\mathrm{Im}(p \circ q) \subset \mathrm{Im}(p)$ et $\mathrm{Im}(q \circ p) \subset \mathrm{Im}(q)$ c'est à dire (comme $p \circ q = q \circ p$) $\mathrm{Im}(p \circ q) \subset \mathrm{Im}(q)$.

Par conséquent $\boxed{\mathrm{Im}(p \circ q) \subset \mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(q)}$.

Soit $y \in \mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(q)$. Alors comme q est un projecteur et $y \in \mathrm{Im}(q)$, $q(y) = y$, de même comme p est un projecteur et $y \in \mathrm{Im}(p)$, $p(y) = y$. Donc $(p \circ q)(y) = y$, et $y \in \mathrm{Im}(p \circ q)$.

Donc $\boxed{\mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(q) \subset \mathrm{Im}(p \circ q)}$

▷ On a $\mathrm{Ker}(q) \subset \mathrm{Ker}(p \circ q)$ et $\mathrm{Ker}(p) \subset \mathrm{Ker}(q \circ p)$ c'est à dire (comme $p \circ q = q \circ p$) $\mathrm{Ker}(p) \subset \mathrm{Ker}(p \circ q)$.

Par conséquent $\boxed{\mathrm{Ker}(p) + \mathrm{Ker}(q) \subset \mathrm{Ker}(p \circ q)}$.

▷ Soit $x \in \mathrm{Ker}(p \circ q)$. Alors $p(q(x)) = 0$ et donc $q(x) \in \mathrm{Ker}(p)$.

Et donc comme

$$x = (x - q(x)) + q(x)$$

avec $x - q(x) \in \mathrm{Ker}(q)$, on a et $q(x) \in \mathrm{Ker}(p)$, on a $x \in \mathrm{Ker}(p) + \mathrm{Ker}(q)$.

Donc $\boxed{\mathrm{Ker}(p \circ q) \subset \mathrm{Ker}(p) + \mathrm{Ker}(q)}$.

2. ▷ On a comme $p^2 = p$, $q^2 = q$, $p \circ q = 0$,

$$\begin{aligned} r^2 &= (p+q-qp)^2 \\ &= p^2 + pq - pqp + qp + q^2 - q^2p - qp^2 - qpq + qpqp \\ &= p + 0 + 0 + qp + q - qp - qp - 0 - 0 \\ &= r \end{aligned}$$

donc $\boxed{r \text{ est un projecteur}}$.

On remarque que par des calculs similaires $r \circ p = p$, $r \circ q = q$, $p \circ r = p$ et $q \circ r = q$.

▷ Soit $x \in \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q)$. Alors $p(x) = 0$ et $q(x) = 0$ d'où

$$r(x) = p(x) + q(x) - q(p(x)) = 0$$

et $x \in \mathrm{Ker}(r)$.

Donc $\boxed{\mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q) \subset \mathrm{Ker}(r)}$.

De plus $p \circ r = p$ et donc $\mathrm{Ker}(r) \subset \mathrm{Ker}(p)$, de même $q \circ r = q$ et donc $\mathrm{Ker}(r) \subset \mathrm{Ker}(q)$.

Donc $\boxed{\mathrm{Ker}(r) \subset \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q)}$.

▷ Soit $y \in \mathrm{Im}(r)$. Il existe $x \in E$ tel que $y = r(x)$ (fixons le).

On a alors

$$y = p(x) + q(x) - q(p(x))$$

et donc

$$y = \underbrace{p(x)}_{\in \mathrm{Im}(p)} + \underbrace{q(x - p(x))}_{\in \mathrm{Im}(q)}$$

d'où $y \in \mathrm{Im}(p) + \mathrm{Im}(q)$.

Ainsi $\boxed{\mathrm{Im}(r) \subset \mathrm{Im}(p) + \mathrm{Im}(q)}$.

De plus $r \circ p = p$ d'où $\mathrm{Im}(p) \subset \mathrm{Im}(r)$ et de même $r \circ q = q$ et donc $\mathrm{Im}(q) \subset \mathrm{Im}(r)$.

Donc $\boxed{\mathrm{Im}(p) + \mathrm{Im}(q) \subset \mathrm{Im}(r)}$

3. On a, comme $p + q$, p et q sont des projecteurs

$$(p+q) = (p+q)^2 = p^2 + pq + qp + q^2$$

et donc

$$pq + qp = 0.$$

En composant l'inégalité précédente par p à droite on obtient

$$pq + pqp = 0$$

et en composant à gauche par p,

$$pqp + qp = 0$$

par conséquent

$$\begin{cases} pq + qp = 0 \\ pq - qp = 0. \end{cases}$$

et donc $(0 \neq 2)$

$$\boxed{pq = qp = 0}.$$

4. D'après la question précédente comme $p \circ q = 0$, et $p + q = p + q - q \circ p$ on a $\boxed{\mathrm{Ker}(p+q) = \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q)}$ et $\mathrm{Im}(p+q) = \mathrm{Im}(p) + \mathrm{Im}(q)$.

De plus par la question 1, comme $p \circ q = q \circ p$ on a $\mathrm{Im}(p \circ q) = \mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(q)$ et comme $p \circ q = 0$, $\mathrm{Im}(p \circ q) = \{0\}$.

Par conséquent $\boxed{\mathrm{Im}(p+q) = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Im}(q)}$.

Chapitre 14

Continuité

Énoncés 508
Utilisation de la continuité 508
Se ramener à un segment 510
Un peu de calcul de limites 511
Points fixes et Cie 511
Un peu d'étude de régularité 514
Un peu de topologie 518
Équations fonctionnelles et continuité 520
Contre-exemples 522
Monotonie et continuité 527
Autour de l'uniforme continuité 529
Utilisation de la continuité II 532
Vrac 533
Indications 535
Solutions 547

Énoncés

Dans tout le TD, sauf mention du contraire, I est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Utilisation de la continuité

Exercice 1 (◔★♣ Densité et continuité)
Soit $A \subset I$ une partie **dense** de I, et soient $f, g \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$.

Montrer que

$$f = g \Leftrightarrow f_{|A} = g_{|A}.$$

Indication p. 535

Exercice 2 (◔★♣ Polynômes de degré impair)
Montrer que tout polynôme réel de degré impair admet au moins une racine réelle.

Indication p. 535

Exercice 3 (◔★ Une utilisation du TVI)
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$.

Montrer que $|f|$ est constante **ssi** f est constante.

Indication p. 535

Exercice 4 (◔★ Théorème de Brouwer 1D)
Soit K un **segment** de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}^0(K, K)$.

Montrer que f admet un point fixe.

Indication p. 535

Exercice 5 (◑☆ Théorème de Borsuk-Ulam 1D)
Soit $T > 0$ et $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ une fonction T-périodique.

Montrer qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $f\left(x + \frac{T}{2}\right) = f(x)$.

Indication p. 535

Exercice 6 (◔★ Continuité et signe)
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in \overline{I}$, $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ et $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$.

Montrer que **si** $|f(x)| \underset{x\to a}{\longrightarrow} |\ell|$ **alors** $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$ ou $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} -\ell$.

Que dire si on ne suppose plus que f est continue ?

Indication p. 535

Exercice 7 (◔★ Il y a de la marge)
Soit K un segment de $\mathbb{R}$.

Soient $f, g \in \mathcal{C}^0(K, \mathbb{R})$.

On suppose que

$$\forall x \in K, f(x) < g(x).$$

1. Montrer que

$$\exists \varepsilon > 0, \forall x \in K, f(x) \leq g(x) - \varepsilon.$$

2. On suppose que f est positive. Montrer que

$$\exists \varepsilon > 0, \forall x \in K, 0 \leq f(x) \leq (1-\varepsilon) g(x).$$

3. Les résultats précédents sont ils toujours valides si on remplace K par un intervalle I de $\mathbb{R}$?

Indication p. 535

Exercice 8 (◔☆ Les intervalles sont convexes)
Soit I un intervalle et $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(x_1, ..., x_n) \in I^n$, $(\rho_1, ..., \rho_n) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^n$.

Montrer qu'il existe $z \in I$ tel que

$$\frac{\sum_{k=1}^n \rho_k f(x_k)}{\sum_{k=1}^n \rho_k} = f(z).$$

Indication p. 535

Exercice 9 (◕☆ Différences de fonctions périodiques)
Soient f et g deux fonctions périodiques et continues définies sur $\mathbb{R}$.

Montrer que **si** $f(x) - g(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ **alors** $f = g$.

Indication p. 535 · Solution p. 547

Exercice 10 (◉☆ Lemme de Croft: cas général)
Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

On suppose que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(nx) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Montrer que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Indication p. 536

Se ramener à un segment

Exercice 11 (◑★ Limites finies en l'infini)
Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ admettant des limites finies en $-\infty$ et $+\infty$.

1. Faire un schéma.
2. Montrer que f est bornée.
3. La fonction f atteint-elle ses bornes ?
4. Montrer que f est uniformément continue.

Indication p. 536

Exercice 12 (◑★ Même limites en l'infini)
Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ on suppose qu'il existe $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ tel que

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell.$$

1. Faire des schémas.
2. Montrer que f admet un maximum ou f admet un minimum.
3. Montrer que f n'est pas injective.

Indication p. 536

Exercice 13 (◑★ Fonction périodique)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction périodique.

1. Montrer que **si** f admet une limite en $+\infty$ **alors** f est constante.
2. Montrer que **si** f est continue **alors** f est bornée et atteint ses bornes.
3. Montrer que **si** f est continue **alors** f est uniformément continue.

Indication p. 536

Un peu de calcul de limites

Exercice 14 (◔☆ Écriture et résolution d'équation)
Soit $f : I \to]0, +\infty[$ et $a \in \overline{I}$

On suppose que $f(x) + f(x)^{-1} \underset{x\to a}{\longrightarrow} 2$. Montrer que $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 1$.

Indication p. 537

Exercice 15 (◑★ À la Cesàro)
Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\ell \in \mathbb{R}$.

On suppose que $f(x+1) - f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ et on souhaite montrer que $\frac{f(x)}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

1. Expliquer comment se ramener au cas $\ell = 0$.
2. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $A > 0$ tel que
$$\forall x \geq A, \left| \frac{f(x) - f(x - \lfloor x - A \rfloor)}{x} \right| \leq \frac{\epsilon}{2}.$$
3. Soit $\varepsilon > 0$ et $A > 0$. Montrer qu'il existe $B \geq A$ tel que
$$\forall x \geq B, |\frac{f(x - \lfloor x - A \rfloor)}{x}| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$
4. Conclure.

Indication p. 537

Exercice 16 (◑★ Continuité d'une fonction implicite)
1. Montrer qu'il existe une et unique fonction $f : [0, 2] \to [0, 1]$ telle que
$$\forall x \in [0, 2], (f(x))^5 + f(x) = x.$$
2. Montrer que la fonction f précédente est continue.

Indication p. 537

Points fixes et Cie

Exercice 17 (◔★ Points fixes)
Soit $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ et $[a, b] \subset I$ un segment de $\mathbb{R}$.

1. On suppose $f([a, b]) \subset [a, b]$. Montrer que f admet un point fixe dans $[a, b]$
2. On suppose $[a, b] \subset f([a, b])$. Montrer que f admet un point fixe dans $[a, b]$.

Indication p. 537

Exercice 18 (◔☆ Encore des points fixes)
Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

1. On suppose que $f(x) = o_{x\to\pm\infty}(x)$. Montrer que f admet un point fixe.
2. On suppose que f est décroissante. Montrer que f admet un unique un point fixe.

Indication p. 537

Exercice 19 (◑★ Picard 1D)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction contractante, c'est à dire k-lipschitzienne pour un $k \in [0, 1[$.

1. Montrer que f admet un unique point fixe.
2. Soit $u_0 \in \mathbb{R}$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = u_0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers ce point fixe.

Indication p. 537

Exercice 20 (◑☆ Point fixe de l'itérée seconde)
Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

On suppose que $f \circ f$ admet un point fixe.

Montrer que f admet un point fixe.

Indication p. 537

Exercice 21 (◑☆ Fonctions coïncidant en un point)
Soit $I = [a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$, et $f, g \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$.

On dit que f et g *coïncident en un point* ssi il existe $x \in I$ tel que $f(x) = g(x)$.

1. Donner un exemple de deux fonctions coïncidant en un point.

   Donner un exemple de deux fonctions qui ne coïncident en aucun en un point.
2. On suppose que $f([a, b]) \subset g([a, b])$. Montrer que f et g coïncident en un point.
3. On suppose que $\sup(f([a, b])) = \sup(g([a, b]))$. Montrer que f et g coïncident en un point.

Indication p. 538

Exercice 22 (◑★ Fonctions et points fixes itérés)
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

Soit $f \in C^0(I, I)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note dans cet exercice $f^n = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}}$.

On suppose que

$$\forall x \in I, \exists n \in \mathbb{N}^*, f^n(x) = x.$$

On cherche à montrer que

$$\forall x \in I, f^2(x) = x.$$

1. Montrer que f est bijective.
2. En déduire que f est strictement monotone.
3. On suppose que f est strictement croissante, montrer par l'absurde que $f = \mathrm{Id}_I$.
4. On suppose que f est strictement décroissante, montrer que $f^2 = \mathrm{Id}_I$.

Indication p. 538

Exercice 23 (◕☆ Commutation et fonctions commutant en un point)
Soit $I = [a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$, et $f, g \in \mathcal{C}^0(I, I)$.

On suppose que $f \circ g = g \circ f$.

On cherche à montrer que f et g coïncident en un point.

On suppose par l'absurde que f et g ne coïncident en aucun point.

1. Expliquer pourquoi on peut supposer sans perte de généralité que $f > g$.
2. Montrer qu'il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\forall k \in \mathbb{N}^*, f^k(x) \geq g^k(x) + k\eta.$$
3. Conclure.

Indication p. 538

Exercice 24 (◑☆ Proto-Sarkovskii)
Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Dans cet exercice on notera f^n l'itérée n-ième de f c'est à dire $\underbrace{f \circ f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}}$.

1. Soient I et J deux segments de $\mathbb{R}$ tels que
$$J \subset f(I).$$
Montrer qu'il existe un segment $\tilde{I} \subset I$ tel que
$$J = f(\tilde{I}).$$
2. Soient I et J deux segments de $\mathbb{R}$ tels que
$$J \subset f(I)$$
$$I \subset f(J).$$
Montrer qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $f^2(x) = x$ et $f(x) \neq x$.
3. On suppose qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que
$$f^3(x_0) < x_0 < f(x_0) < f^2(x_0) < f^4(x_0).$$
Montrer que f admet un point fixe et que f^2 admet un point fixe qui n'est pas un point fixe de f.

Indication p. 538

Un peu d'étude de régularité

Exercice 25 (◔★♠ Maximum de fonctions)
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $f_1, ..., f_n$ des fonctions de I vers $\mathbb{R}$.

On définit le maximum de ces fonctions par
$$\begin{aligned} F : I &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \max(f_1(x), ..., f_n(x)) \end{aligned}$$
(parfois noté $F = \max(f_1, ..., f_n)$).

1. Montrer que **si** pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, f_k est positive **alors** F est positive.
2. Montrer que **si** pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, f_k est croissante **alors** F est croissante.
3. Montrer que **si** pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, f_k est continue **alors** F est continue.
4. Montrer **si** pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, f_k est uniformément continue **alors** F est uniformément continue.
5. Montrer **si** pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, f_k est lipschitzienne **alors** F est lipschitzienne.

Indication p. 538

Exercice 26 (◔★♠ Sup de fonctions)
Soit Λ un ensemble d'indices non vide et $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ un ensemble de fonctions de I vers $\mathbb{R}$.

On suppose qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $\lambda \in \Lambda$, f_λ est majorée par M.

On définit le supremum de ces fonctions par

$$\begin{aligned} F : I &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sup_{\lambda\in\Lambda}(f_\lambda(x)) \end{aligned}$$

(parfois noté $F = \sup_{\lambda\in\Lambda}(f_\lambda)$).

1. Commenter la bonne définition de F.
2. Montrer que **si** pour tout $\lambda \in \Lambda$, f_λ est positive **alors** F est positive.
3. Montrer que **si** pour tout $\lambda \in \Lambda$, f_λ est croissante **alors** F est croissante.
4. Donner un exemple tel que pour tout $\lambda \in \Lambda$, f_λ est lipschitzienne et F est non continue.
5. Soit $k > 0$, montrer que **si** pour tout $\lambda \in \Lambda$, f est k-lipschitzienne **alors** F est k-lipschitzienne.

Indication p. 538

Exercice 27 (◔★ Introduction aux fonctions hölderiennes)
Soit $\alpha \in]0, 1]$. On dit qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est α-hölderienne ssi

$$\exists C \geq 0, \forall (x, y) \in I^2, |f(x) - f(y)| \leq C\ |x - y|^\alpha.$$

On dit qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est hölderienne ssi il existe $\alpha \in]0, 1]$ tel que f est α-hölderienne.

1. Donner un exemple de fonction hölderienne non lipschitzienne.
2. Montrer que toute fonction hölderienne est uniformément continue.
3. Montrer que pour $I = \left[0, \frac{1}{2}\right]$, le prolongement par continuité en 0 de $\frac{1}{\ln(x)}$ est uniformément continue et n'est pas hölderienne.

Indication p. 539

Exercice 28 (◔★ Stabilité par combinaison linéaire)
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

1. Montrer que l'ensemble des fonctions bornées sur I est un sev de $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$.
2. Montrer que l'ensemble des fonctions continues sur I est un sev de $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$.
3. Montrer que l'ensemble des fonctions uniformément continues sur I est un sev de $\mathcal{C}^0(I,\mathbb{R})$.
4. Montrer que l'ensemble des fonctions lipschitzienne sur I est un sev de $\mathcal{C}^0(I,\mathbb{R})$.
5. Montrer que pour tout $\alpha \in [0,1[$ l'ensemble des fonctions α-hölderienne (défini à l'exercice 27) est un sev de $\mathcal{C}^0(I,\mathbb{R})$.
6. On suppose I borné. Montrer que l'ensemble des fonctions hölderiennes est un sev de $\mathcal{C}^0(I,\mathbb{R})$.

Indication p. 539

Exercice 29 (◔★ Produits et régularité)
Soit I un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$.

1. L'ensemble des fonctions continues sur I est-il stable par produit ?
2. L'ensemble des fonctions uniformément continues sur I est-il stable par produit ?
3. L'ensemble des fonctions lipschitziennes sur I est-il stable par produit ?

Indication p. 539

Exercice 30 (◔★ Fonctions lipschitziennes bornées)
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

1. On suppose que I est borné. Montrer que toute fonction lipschitzienne sur I est bornée.
2. Dans le cas où I est non-borné, donner un exemple de fonction lipschitzienne non-bornée.
3. On note $\mathrm{Lip}_b(I)$ l'ensemble des fonctions lipschitziennes et bornées définies sur I, c'est à dire

$$\mathrm{Lip}_b(I) = \{\exists k>0, \forall (x,y)\in I^2, |f(x)-f(y)| \leq k\,|x-y| \text{ et } \exists M\in\mathbb{R}, \forall x\in I, |f(x)|\leq M\}.$$

Montrer que $(\mathrm{Lip}_b(I),+,\times)$ est un anneau.

Indication p. 539

Exercice 31 (◔★ Fonctions localement constantes)
Soit $I \subset \mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que f est localement constante (sur I) ssi elle est constante au voisinage de tout point c'est à dire

$$\forall x \in I, \exists \delta > 0, \forall (y_1, y_2) \in [x-\delta, x+\delta], f(y_1) = f(y_2).$$

1. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall a \in I \exists \delta > 0, \forall \epsilon > 0, \forall x \in I, |x-a| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \epsilon.$$

   Montrer que f est localement constante.
2. Montrer que si I est un intervalle de $\mathbb{R}$ une fonction est localement constante ssi elle est constante.

Indication p. 539

Exercice 32 (◔★ Composée de bornée et continue)
Soit $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction bornée et $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

Montrer que $b \circ c$ et $c \circ b$ sont bornées.

Donner un exemple où $b \circ c$ et $c \circ b$ non-continues.

Indication p. 539

Exercice 33 (◔★ Composée et uniforme continuité/lipschitzité)
Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $f : I \to J$, $g : J \to \mathbb{R}$.
1. Montrer que **si** f et g sont uniformément continues **alors** $g \circ f$ est uniformément continue.
2. Montrer que **si** f et g sont lipschitziennes **alors** $g \circ f$ est lipschitzienne.

Indication p. 539

Exercice 34 (◑★ Attention aux epsilon et delta)
Soit $I \subset \mathbb{R}$.

On dit (dans cet exercice) qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est `eunitnoc` en $a \in I$ ssi

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I, |x-a| \leq \varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \delta.$$

1. Donner un exemple de fonction `eunitnoc` en un point et non continue en ce point.
2. Montrer qu'une fonction est `eunitnoc` en un point ssi pour tout $R > 0$, $f_{|I \cap [-R,R]}$ est bornée.

Indication p. 540

Un peu de topologie

Exercice 35 (◔★ Distance à une partie)
Soit $A \subset \mathbb{R}$ une partie de A non vide. On définit la fonction distance à A, notée d_A par

$$\begin{aligned} d_A : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \inf_{a\in A}(|x-a|). \end{aligned}$$

1. Commenter la bonne définition de d_A.
2. Montrer que d_A est continue.
3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $d_A(x) = 0$ ssi $x \in \overline{A}$.

Indication p. 540

Exercice 36 (◔★♠ Connexité des intervalles)
Soit I un intervalle et $f \in \mathcal{C}^0(I, \{0,1\})$.

Montrer que f est constante.

Indication p. 540

Exercice 37 (◔★ Adhérence de l'adhérence)
Soit $A \subset \mathbb{R}$ une partie de $\mathbb{R}$.

Montrer que $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

Indication p. 540

Exercice 38 (◔★ Zéros d'une fonction continue)
On dit qu'une partie F de $\mathbb{R}$ est *fermée* ssi elle est égale à son adhérence i.e $\overline{F} = F$ (cf exercice 40)

1. Montrer que l'ensemble des zéros d'une fonction continue est fermé.
2. Montrer que tout fermé est l'ensemble des zéros d'une fonction continue.

Indication p. 540

Exercice 39 (◕☆ Parties homéomorphes)
Deux parties A et B de $\mathbb{R}$ sont dites *homéomorphes* ssi il existe une bijection continue entre A et B de réciproque continue (une telle bijection est appelée homéomorphisme).

1. Montrer que la relation «être homéomorphe à» est une relation d'équivalence sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.
2. Montrer que tout intervalle de $\mathbb{R}$ est homéomorphe à $[0,1]$ ou $[0,1[$ ou $]0,1[$.
3. Montrer que $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ ne sont pas homéomorphes.
4. Montrer qu'il existe une surjection continue de $]0,1[$ sur $[0,1]$ mais pas de surjection continue de $[0,1]$ sur $]0,1[$.

Indication p. 540

Exercice 40 (◑★ Ouverts et fermés)

▷ Une partie $U \subset \mathbb{R}$ est dite *ouverte* ssi elle contient un voisinage de chacun de ses points, c'est à dire

$$\forall x \in U, \exists \delta > 0, [x-\delta, x+\delta] \subset U.$$

▷ Une partie $F \subset \mathbb{R}$ est dite *fermée* ssi elle est égale à son adhérence, c'est à dire

$$\overline{F} = F.$$

1. Soit F une partie de $\mathbb{R}$. Montrer que F est fermée ssi toute suite d'éléments de F qui converge, converge vers un élément de F.
2. Montrer qu'une union d'ouverts est ouverte, qu'une intersection de fermés est fermée.
3. Montrer qu'une intersection finie d'ouverts est ouverte, qu'une union finie de fermés est fermée.
4. Montrer qu'une partie est fermée ssi son complémentaire est ouvert.
5. Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
   ▷ Montrer que pour toute partie F fermée, $f^{-1}(F)$ est fermée.
   ▷ Montrer que pour tout partie U ouverte, $f^{-1}(U)$ est ouverte.
6. Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On suppose que pour toute partie U ouverte de $\mathbb{R}$, $f^{-1}(U)$ est ouverte. Montrer que f est continue.

Exercice 41 (◑☆ Lemme d'Urysohn 1D)

1. Soient $F_1 = [a_1, b_1]$ et $F_2 = [a_2, b_2]$ deux intervalles fermés disjoints. Montrer qu'il existe $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $f_{|F_1} = 0$ (fonction nulle) et $f_{|F_2} = 1$ (fonction constante 1).
2. Soient F_1 et F_2 deux fermés (cf 40) de $\mathbb{R}$ disjoints (non vides). Montrer qu'il existe $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $f_{|F_1} = 0$ et $f_{|F_2} = 1$. (On pourra utiliser l'exercice 35)

Indication p. 540

Équations fonctionnelles et continuité

Exercice 42 (◑★♠ Équation de Cauchy)
Soit f un isomorphisme du groupe $(\mathbb{R},+)$ c'est à dire $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tel que

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2, f(x+y)=f(x)+f(y).$$

On pose $\alpha=f(1)$.

1. Montrer que
$$\forall r\in\mathbb{Q}, f(r)=\alpha r.$$
2. On suppose que f est monotone, montrer que $f=\alpha\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$.
3. On suppose que f est continue, montrer que $f=\alpha\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$.
4. On suppose qu'il existe $a\in\mathbb{R}$ tel que f continue en a, montrer que $f=\alpha\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$.
5. On suppose qu'il existe $a\in\mathbb{R}$ tel que f est bornée au voisinage de a, montrer que $f=\alpha\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$.
6. On admet que le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathbb{R}$ admet une base. Montrer qu'il existe une telle fonction telle que $f\neq\alpha\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$.

Indication p. 540

Exercice 43 (◔☆ Équation de Cauchy bis)
On admet le résultat de l'exercice 42.

1. Déterminer l'ensemble des fonctions $f\in\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ vérifiant
$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2, f(x+y)=f(x)f(y).$$
2. Déterminer l'ensemble des fonctions $f\in\mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+^*,\mathbb{R})$ vérifiant
$$\forall (x,y)\in(\mathbb{R}_+^*)^2, f(xy)=f(x)+f(y).$$
3. Déterminer l'ensemble des fonctions $f\in\mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+^*,\mathbb{R})$ vérifiant
$$\forall (x,y)\in(\mathbb{R}_+^*)^2, f(xy)=f(x)f(y).$$

Indication p. 541

Exercice 44 (◔★ Une fonction constante)
Soit $f\in\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ continue en 0 telle que

$$\forall x\in\mathbb{R}, f(x)=f(2x).$$

Montrer que f est constante.

Indication p. 541

Exercice 45 (◔☆ Une fonction nulle)
Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ continue en 0 telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) + f(2x) = 0.$$

Montrer que f est nulle.

Indication p. 541

Exercice 46 (◔☆ Encore fonction constante)
Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ continue en 0 et en 1 telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(x^2).$$

Montrer que f est constante.

Indication p. 541

Exercice 47 (◑★ Égalité sur les dyadiques)
Déterminer les fonctions $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2}.$$

Indication p. 541

Exercice 48 (◔★ Des suites arithmético-géométriques)
Soient a et b deux réels tels que $|a| \neq 1$. Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(ax + b) = f(x).$$

1. On suppose que $|a| < 1$. Montrer que pour $x \in \mathbb{R}$ la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = x$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = au_n + b$ converge vers un réel indépendant de x.
2. On suppose que $|a| < 1$. Montrer que f est constante.
3. On suppose $|a| > 1$. Montrer que f est constante.

Indication p. 541

Exercice 49 (◑☆ Pas de solution)
Montrer qu'il n'existe pas de fonction $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $f \circ f = -\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$.

Indication p. 542

Exercice 50 (◔☆ Encore une suite récurrente)
Déterminer toutes les fonctions $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ telles que

$$\forall x \in [0,1], f(\sin(x)) = f(x).$$

Indication p. 542

Exercice 51 (◑☆ Par exemple télescopage)
Déterminer toutes les fonctions $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(2x) - f(x) = x.$$

Indication p. 542

Exercice 52 (◑★ Le carré et le parallélogramme)
Déterminer tous les fonctions $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telles que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) + 2f(y).$$

Indication p. 542

Contre-exemples

Exercice 53 (◔★ Juste la racine)
Soit

$$\begin{aligned} f : [0,1] &\to [0,1] \\ x &\mapsto \sqrt{x}. \end{aligned}$$

1. Démontrer en 5 lettres que f (+ vérification d'hypothèses) est uniformément continue.
2. Démontrer que f est uniformément continue sans utiliser le théorème précédent (on pourra remarquer que pour $(x,y) \in [0,1]^2$ t.q $x \leq y$ on a $\sqrt{y} - \sqrt{x} \leq \sqrt{y-x}$).
3. Montrer que f n'est pas lipschitzienne.

Indication p. 542

Exercice 54 (◔★ Propriété des valeurs intermédiaires)
On dit qu'une fonction vérifie la propriété des valeurs intermédiaires si l'image de tout intervalle est un intervalle.

1. Expliquer en trois lettres pourquoi toute fonction continue vérifie la propriété des valeurs intermédiaires.
2. Donner un exemple de fonction vérifiant la propriété des valeurs intermédiaires et non-continue.

Indication p. 542

Exercice 55 (◔★ Bijection non continue)
Montrer que la fonction

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \begin{cases} x+1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ x & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

est bijective et n'est continue en aucun point de $\mathbb{R}$.

Indication p. 542

Exercice 56 (◑★ Pas d'interversion de limites)
On définit la fonction f par

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

1. Déterminer si les limites suivantes existent, et le cas échéant les calculer.
$$\lim_{h\to 0}\left(\lim_{x\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right), \lim_{x\to 0}\left(\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right).$$
2. Commenter.

Indication p. 542

Exercice 57 (◑★ Pas vraiment des contre-exemples)
Étudier l'ensemble des points de continuité des fonctions suivantes

1.
$$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \lfloor x \rfloor + (x - \lfloor x \rfloor)^2.$$

2.
$$f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \begin{cases} \lfloor x \rfloor \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

3.
$$f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \begin{cases} x\lfloor \frac{1}{x} \rfloor & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

4.
$$f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \lfloor x \rfloor \cos(2\pi x).$$

Indication p. 542

Exercice 58 (◔★ Les oscillations à l'infini)
Montrer que

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \cos(x^2)$$

est continue, est bornée et atteint ses bornes, et n'est pas uniformément continue.

Indication p. 543

Exercice 59 (◔★ (Dis)-continuité à la demande, cas fini)
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, ..., x_n$ des réels.

1. Donner un exemple de fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dont l'ensemble des points de continuité est $\mathbb{R} \setminus \{x_1, ..., x_n\}$.
2. Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $a \in \mathbb{R}$. Montrer que $f\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ est continue en a ssi $f(a) = 0$.
3. Donner un exemple de fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dont l'ensemble des points de continuité est $\{x_1, ..., x_n\}$.

Indication p. 543

Exercice 60 (◔★ Attention aux ensemble des équations fonctionnelles)
Montrer que la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^* &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sin(2\pi \log_2(x)) \end{aligned}$$

est continue et vérifie

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, f(2x) = f(x).$$

Commenter vis à vis de l'exercice 44.

Indication p. 543

Exercice 61 (◑★ Fonction de Thomae)
On définit une fonction $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, T(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \notin \mathbb{Q} \\ \frac{1}{q} \text{ si } x = \frac{p}{q} \text{ , } (p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \text{ , } p \wedge q = 1. \end{cases}$$

1. Commenter la bonne définition de la fonction.
2. Montrer que T est continue en tout irrationnel et discontinue en tout rationnel.

Indication p. 543

Exercice 62 (◕★ Escalier de Cantor)
On note $\mathcal{E} = \left\{f \in \mathcal{C}^0([0,1],[0,1]) \mid f(0)=0, f(1)=1\right\}$ (ce n'est pas un ev).

On définit $T : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ par, pour tout $f \in \mathcal{E}$

$$T(f) : [0,1] \to [0,1]$$
$$x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{2}f(3x) & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{3}\right] \\ \frac{1}{2} & \text{si } x \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right] \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}f\left(3\left(x-\frac{2}{3}\right)\right) & \text{si } x \in \left[\frac{2}{3}, 1\right] \end{cases}$$

1. Vérifier que T est bien définie et pour une fonction $f \in \mathcal{E}$ représenter graphiquement la fonction $T(f)$.

On définit une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{E}^{\mathbb{N}}$ par la récurrence
- ▷ $f_0 = \mathrm{Id}_{[0,1]}$
- ▷ $\forall n \in \mathbb{N}, f_{n+1} = T(f_n)$

1. (□) Représenter graphiquement f_n pour plusieurs valeurs de n.
2. Soit $x \in [0,1]$. Montrer que la suite de réels $(f_n(x))_{n\in N}$ converge.

On note alors

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$$

3. Représenter graphiquement f.
4. Montrer que f est continue.

On pourrait montrer que pour «presque tout» (à définir) point la fonction f est constante au voisinage de ce point (donc dérivable et de dérivée nulle) mais f n'est pas constante.

Exercice 63 (◔★ Un contre-exemple aux cordes universelles)
Commencer par lire l'énoncé de l'exercice 80.

Soit $\delta \in [0,1] \setminus \left\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$.

On définit une fonction $f_\delta : [0,1] \to \mathbb{R}$ par

$$f_\delta : [0,1] \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \left(\sin\left(\frac{\pi}{\delta}x\right)\right)^2 - \left(\sin\left(\frac{\pi}{\delta}\right)\right)^2 x$$

Montrer que $f_\delta \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$, $f_\delta(0) = f_\delta(1)$ et

$$\neg(\exists x \in [0, 1-\delta], f_\delta(x+\delta) = f_\delta(x)).$$

Indication p. 543

Exercice 64 (◔★ Plein de $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$!)
Représenter graphiquement et étudier les éventuelles limites en 0 des fonctions suivantes.

1. $$f_1 : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

2. $$f_2 : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

3. $$f_3 : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{x}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

4. $$f_4 : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{1+x^2}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

5. $$f_5 : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

Pour chacune des fonctions proposer une intuition fausse dont elle est un contre-exemple.

Indication p. 543

Monotonie et continuité

Exercice 65 (◔★ Caractérisation séquentielle et fonctions croissantes)
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ croissante, soit $a \in \overline{I}$ et $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

Montrer que $f(x) \underset{\substack{x\to a\\ x<a}}{\longrightarrow} \ell$ **ssi** il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in I^{\mathbb{N}}$ telle que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n < a$ et $f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

Indication p. 544

Exercice 66 (◔★ Plus petite fonction croissante plus grande, version continue)
Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ une fonction majorée.

On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\tilde{f}(x) = \sup_{t \leq x}(f(t)).$$

1. Commenter la bonne définition de $\tilde{f}$.
2. Montrer que $\tilde{f}$ est croissante et que $\tilde{f} \geq f$.
3. Montrer que $\tilde{f}$ est continue.

Indication p. 544

Exercice 67 (◔★ Monotonie sur une partie dense)
Soit D une partie dense de $\mathbb{R}$.

Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$.

On suppose que $f_{|D}$ est croissante. Montrer que f est croissante.

Indication p. 544

Exercice 68 (◑★ Un peu de monotonie remplace parfois la continuité)
Soit D une partie dense de $\mathbb{R}$.

1. Montrer que tout point de $\mathbb{R}$ est limite d'une suite croissante (resp. décroissante) d'éléments de D.
2. Soient $f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que f croissante et g continue.

   On suppose $f_{|D} = g_{|D}$.

   Montrer que $f = g$.

Indication p. 544

Exercice 69 (◕☆ Ceci n'est pas le lemme de Croft)
Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ telle que pour tout $x > 0$, $(f(nx))_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

Montrer que f est croissante.

Indication p. 544

Exercice 70 (◑★ Monotonie locale)
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ localement croissante à droite c'est à dire vérifiant

$$\forall x \in I, \exists \delta > 0, f_{|I \cap [x, x+\delta]} \text{ est croissante.}$$

Montrer que f est croissante.

Indication p. 544

Exercice 71 (◔☆ Monotonies encadrantes)
Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$.

On suppose que $x \mapsto f(x)$ est décroissante et $x \mapsto xf(x)$ est croissante. Montrer que f est continue.

Indication p. 544

Exercice 72 (◔★ Ensemble de discontinuité d'une fonction monotone)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction croissante.

On note

$$D = \{a \in \mathbb{R} \mid f \text{ n'est pas continue } a\}.$$

Montrer que D est (au plus) dénombrable, c'est à dire fini ou en bijection avec $\mathbb{N}$.

Indication p. 544

Autour de l'uniforme continuité

Exercice 73 (◑★♠ Caractérisation séquentielle de l'uniforme continuité)
Soit $f : I \to \mathbb{R}$.

Montrer que f est uniformément continue sur I **ssi**

$$\forall \left((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \right) \in (I^{\mathbb{N}})^2, |x_n - y_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \Rightarrow |f(x_n) - f(y_n)| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Indication p. 545

Exercice 74 (◕★ Uniforme continuité et prolongement)
Soit $]a,b] \subset \mathbb{R}$.

Soit $f :]a,b] \to \mathbb{R}$ uniformément continue.

Montrer que f est prolongeable par continuité en a.

Indication p. 545

Exercice 75 (◑★ Taille des uniformément continues)
Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ uniformément continue.

Montrer qu'il existe $A, B \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leq Ax + B$.

Donner un contre-exemple à la réciproque.

Indication p. 545

Exercice 76 (◕★ Lemme de Croft: cas uniformément continu)
Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ uniformément continue.

On suppose que pour tout $x \in \mathbb{R}, f(nx) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Montrer que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Indication p. 545

Exercice 77 (◔★ Sommes de Riemann alternées)
Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{C})$.

Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k f\left(\frac{k}{n}\right) = 0.$$

Indication p. 545 · Solution p. 547

Exercice 78 (◕☆ Uniforme continuité et limite en l'infini)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uniformément continue.

1. On suppose que

$$f(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Montrer que

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

2. Soit $\ell \in \mathbb{R}$.

On suppose que

$$\forall t \in [0,1[, f(t+n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell.$$

Montrer que

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ell.$$

Indication p. 545

Exercice 79 (◔☆ Uniforme continuité et réciproque)
Donner un exemple de deux intervalles I, J de $\mathbb{R}$ et $f : I \to J$ uniformément continue et bijective, tels que f^{-1} n'est pas uniformément continue.

Indication p. 545

Utilisation de la continuité II

Exercice 80 (◔★ Des cordes horizontales)
Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ telle que $f(0) = f(1)$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on note

$$\begin{aligned}\varphi_n : \left[0, 1-\frac{1}{n}\right] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f\left(x+\frac{1}{n}\right) - f(x)\end{aligned}$$

1. Calculer

$$\sum_{k=0}^{n-1} \varphi_n\left(\frac{k}{n}\right).$$

2. En déduire qu'il existe $x \in \left[0, 1-\frac{1}{n}\right]$ tel que

$$f\left(x+\frac{1}{n}\right) = f(x).$$

Indication p. 545

Exercice 81 (◔☆ L'exercice du cross)
Soit $[a,b] \subset I$ et $g_1, g_2 \in \mathcal{C}^0(I,\mathbb{R})$.

On suppose que

$$\int_a^b g_1(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b g_2(t)\,\mathrm{d}t.$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $[\alpha,\beta] \subset [a,b]$ tel que

$$\beta - \alpha = \frac{b-a}{n}$$

et

$$\int_\alpha^\beta g_1(t)\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta g_2(t)\,\mathrm{d}t.$$

Indication p. 546

Exercice 82 (◑★ Maximum d'une subdivision)
Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose

$$M_n = \max_{k\in[\![0,n-1]\!]} \left(f\left(\frac{k}{n}\right)\right).$$

Montrer que la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

Indication p. 546

Vrac

Exercice 83 (◔★ Ouvert ou fermé ?)
Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$.

Montrer que

$$\sup_{t\in[a,b]} (f(t)) = \sup_{(t\in]} a,b[)(f(t)).$$

Indication p. 546

Exercice 84 (◑☆ Propriété des valeurs intermédiaires bis)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

On suppose que f vérifie la propriété des valeurs intermédiaires et est injective.

Montrer que f est continue.

Indication p. 546

Exercice 85 (◔☆ Fonction écartante)
Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ tel qu'il existe $\alpha > 0$ vérifiant

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, |f(x) - f(y)| \geq \alpha\ |x-y|.$$

Montrer que f est bijective.

Indication p. 546

Exercice 86 (◑☆ Nombre d'antécédents)
Montrer qu'il n'existe pas de fonction $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que pour tout $y \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(\{y\})$ admet exactement deux éléments.

Donner un exemple de telle fonction non continue.

Indication p. 546

Exercice 87 (◑★ Limite ou pas limite ?)
Soit

$$\begin{aligned} f : [1, +\infty[&\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{x^x}{\lfloor x \rfloor^{\lfloor x \rfloor}}. \end{aligned}$$

Déterminer si $f(x)$ admet une limite quand $x \to +\infty$, et le cas échéant calculer cette limite.

Indication p. 546

Indications

Indication 1 · Énoncé p. 508 (Densité et continuité)
Étant donné un point $x \in I$, prendre une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ d'éléments de A convergeant vers x et passer à la limite l'égalité des images.

Indication 2 · Énoncé p. 508 (Polynômes de degré impair)
Déterminer les limites en $\pm\infty$ puis TVI.

Indication 3 · Énoncé p. 508 (Une utilisation du TVI)
Le cas nul est immédiat.

Si la constante est $c \neq 0$ et qu'il existe (x_-, x_+) tels que $f(x_-) = -c$ et $f(x_+) = c$, utiliser le TVI pour aboutir à une contradiction.

Indication 4 · Énoncé p. 508 (Théorème de Brouwer 1D)
Avec $K = [a, b]$ on cherche à montrer que $x \mapsto f(x) - x$ s'annule. Étudier la continuité, la valeur en a et la valeur en b (et faire un schéma).

Indication 5 · Énoncé p. 508 (Théorème de Borsuk-Ulam 1D)
Plusieurs méthodes possibles.

- Considérer $\int_0^T \big(f\big(x + \frac{T}{2}\big) - f(x)\big)\,\mathrm{d}x$.
- Regarder les exercices de cordes, par exemple 80.

Indication 6 · Énoncé p. 509 (Continuité et signe)
S'inspirer de l'exercice 3.

Indication 7 · Énoncé p. 509 (Il y a de la marge)
Se ramener à $g - f > 0$. Par le th. des bornes atteintes si une fonction continue est strictement positive sur un segment alors elle est « loin de 0 ».

Indication 8 · Énoncé p. 509 (Les intervalles sont convexes)
Comme $f(I)$ est un intervalle (pourquoi ?) on a $\frac{\sum_{k=1}^n \rho_k f(x_k)}{\sum_{k=1}^n \rho_k} \in f(I)$ (pourquoi ?).

Indication 9 · Énoncé p. 509 (Différences de fonctions périodiques)
Commencer par traiter le cas où les deux fonctions admettent une période commune.

Dans les autres cas soient T_f et T_g des périodes. On a alors (sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$) $\mathbb{Z}T_f + \mathbb{Z}T_g$ dense dans $\mathbb{R}$.

On écrit alors pour x fixé $|f(x) - g(x)| \leq |f\big(x + nT_f\big) - g\big(x + nT_f\big)| + |g\big(x + nT_f\big) - g\big(x + mT_g\big)|$. À $\varepsilon > 0$ fixé on peut choisir n et m tels que le premier terme est $\leq \frac{\varepsilon}{2}$ par limite et le second est $\leq \frac{\varepsilon}{2}$ par uniforme continuité et comme $nT_f - mT_g$ peut être arbitrairement près de 0.

Solution p. 547

Indication 10 · Énoncé p. 510 (Lemme de Croft: cas général)
Une option est de

- ▷ Commencer par regarder le **théorème de Baire** dans les TDs précédents.
- ▷ Pour $\varepsilon > 0$ fixé, considérer pour tout $n \in \mathbb{N}$ les

$$F_{N,\varepsilon} = \{x \in \mathbb{R}_+, \forall k \geq N, |f(kx)| \leq \varepsilon\}.$$

- ▷ Il s'agit de fermés d'union $\mathbb{R}_+^*$, par Baire au moins un est d'intérieur non vide c'est à dire il existe N_0 et $]\alpha, \beta[$ non vide tels que $]\alpha, \beta[\subset F_{N_0,\varepsilon}$.
- ▷ Montrer que

$$\bigcup_{k \geq N}]k\alpha, k\beta[$$

contient un segment de la forme $]A, +\infty[$.

- ▷ Conclure.

Il est aussi possible de faire sans le théorème de Baire, mais il est conseillé de regarder la preuve de ce dernier pour s'en inspirer.

Indication 11 · Énoncé p. 510 (Limites finies en l'infini)

1. Le schéma est essentiel !
2. Par les convergences en $\pm\infty$, il existe A_- et A_+ tels que f borné sur $]-\infty, A_-]$ et f borné sur $[A_+, +\infty[$. Il reste à montrer que f (continue) est bornée sur $[A_-, A_+]$ (un segment).
3. Non (trouver un contre-exemple).
4. Soit $\varepsilon > 0$. Commencer par montrer qu'il existe A_- et A_+ tels que pour tout $(x, y) \in]-\infty, A_-]$, $|f(x) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$ (et idem dans $[A_+, +\infty[$). Il reste à montrer que f (continue) est uniformément continue sur $[A_- - 1, A_+ + 1]$ (un segment). Vérifier que tous les cas sont bien pris en compte (quitte à prendre $\delta \in]0, 1]$).

Alternativement, prolonger par continuité $f \circ \tan$ sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Indication 12 · Énoncé p. 510 (Même limites en l'infini)

1. Le schéma est essentiel !
2. Traiter le cas f constante. Ensuite avec $f(x_0) \neq \ell$ effectuer une disjonction de cas selon $f(x_0) > \ell$ ou $f(x_0) < \ell$. Dans le premier, cas il existe A_- et A_+ tels que f strictement inférieur à $f(x_0)$ sur $]-\infty, A_-]$ et f borné sur $[A_+, +\infty[$. Montrer que f (continue) admet un maximum sur $[A_-, A_+]$ (segment). Vérifier qu'il s'agit bien d'un maximum global.
3. Avec y compris strictement entre un extrema et ℓ, montrer que $y = f(x)$ admet au moins deux solutions distinctes (l'une à droite de l'extrema et l'autre à gauche).

Indication 13 · Énoncé p. 510 (Fonction périodique)

1. Montrer que pour tout $x \in I$, $f(x) = \lim_{n \to +\infty} f(x + nT)$.
2. Se ramener à un segment par périodicité.
3. Se ramener à un segment par périodicité, ne pas oublier de le prendre un peu plus grand qu'une période pour avoir de la marge.

Indication 14 · Énoncé p. 511 (Écriture et résolution d'équation)
Avec $g(x) = f(x) + f(x)^{-1}$ exprimer f en fonction de g (trinôme du second degré) et conclure par opérations sur les limites.

Indication 15 · Énoncé p. 511 (À la Cesàro)
Suivre les étapes, et si nécessaire revoir la preuve de Cesàro.

1. Considérer $x \mapsto f(x) - \ell$.
2. Il existe A tel que pour tout $x \geq A$, $|f(x+1) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Utiliser un télescopage pour exprimer $f(x) - f(x - \lfloor x - A \rfloor)$ comme une somme de termes tous plus petits (en va) que $\frac{\varepsilon}{2}$.
3. Remarquer que $x - \lfloor x - A \rfloor$ est majoré par $A + 1$ et que donc $f(x - \lfloor x - A \rfloor)$ peut se majorer indépendamment de x (bornes atteintes).
4. Faire le découpage habituel en $\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$.

Indication 16 · Énoncé p. 511 (Continuité d'une fonction implicite)
Pour l'existence et l'unicité, fixer x et étudier la fonction $t \mapsto t^5 + t - x$.

De nombreuses méthodes pour la monotonie: écrire un encadrement explicite par le tab var, étudier la monotonie par le tab var, utiliser une caractérisation séquentielle.

Ou bien tout simplement constater que cela revient à montrer que $g : [0,1] \to [0,2]$, $t \mapsto t^5 + t$ est bijective continue sur un intervalle et que par conséquent g^{-1} est continue.

Indication 17 · Énoncé p. 511 (Points fixes)

1. Faire un schéma. Étudier $x \mapsto f(x) - x$ (changement de signe entre a et b cf 5).
2. Faire un schéma. Étudier $x \mapsto f(x) - x$ (avec $f(\alpha) = a$, $f(\beta) = b$ changement de signe entre α et β)

Indication 18 · Énoncé p. 512 (Encore des points fixes)
Étudier $x \mapsto f(x) - x$: continuité, (stricte) monotonie et limites en l'infini.

Indication 19 · Énoncé p. 512 (Picard 1D)

1. L'unicité est immédiate.

   Pour l'existence, on peut par exemple considérer les limites de $f(x) - x$ quand $x \to \pm\infty$.

   Alternativement on peut fixer u_0 et considérer la suite définie par $u_0 = u_0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. On peut alors montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est « de Cauchy ».
2. Pour montrer que la suite converge vers le point fixe, le point important est de montrer qu'elle converge. Par exemple utiliser BW.

Indication 20 · Énoncé p. 512 (Point fixe de l'itérée seconde)
Par contraposée. Si f n'a pas de point fixe alors $f - \mathrm{Id}$ est de signe strictement constant. Par exemple si pour tout x, $f(x) > x$ on en déduit que pour tout x, $f(f(x)) > f(x) > x$.

De manière similaire avec c un point fixe remarquer que $f(f(c)) - f(c)$ et $f(c) - c$ sont de signes opposés.

Indication 21 · Énoncé p. 512 (Fonctions coïncidant en un point)

1. Faire un schéma.
2. S'inspirer de l'exercice 17 (étudier $g-f$).
3. Les sups sont atteints (pourquoi ?). Avec α et β les points où f et g atteignent leurs sups, étudier $g-f$ sur $[\alpha,\beta]$.

Indication 22 · Énoncé p. 513 (Fonctions et points fixes itérés)

1. Pour la surjectivité, on a pour tout x avec un n_x adapté $f(f^{n_x-1}(x))$. Pour l'injectivité étant donnés x et y tq $f(x)=f(y)$ et n_x, n_y adaptés, comparer $f^{n_x n_y}(x)$ et $f^{n_x n_y}(y)$.
2. Continue et bijective sur un intervalle.
3. Si il existe x tel que $f(x)>x$, comparer pour tout n, $f^n(x)$ et x.
4. Que dire de $-f$?

Indication 23 · Énoncé p. 513 (Commutation et fonctions commutant en un point)

1. La fonction $f-g$ ne s'annule jamais et est continue.
2. Procéder par récurrence. L'initialisation l'exercice classique 7. Pour l'hérédité écrire sans surprise f^{k+1} à l'aide de f^k et f.
3. Choisir un x quelconque et faire $k\to+\infty$.

Indication 24 · Énoncé p. 514 (Proto-Sarkovskii)

1. Prendre des sup et inf d'images réciproques des bornes.
2. Remarquer que $I\subset f^2(I)$.
3. Que dire de $[f^3(x_0),x_0]$ et $[f(x_0),f^2(x_0)]$?

Indication 25 · Énoncé p. 514 (Maximum de fonctions)

Pour tous les points remarquer qu'il suffit de traiter le cas $n=2$ puis d'effectuer une récurrence !

1. Immédiat.
2. Prendre $x\le y$. Écrire les inégalités entre $f_1(x)\le f_1(y)\le F(y)$, de même pour f_2 et conclure.
3. Montrer que de manière générale lorsque $x\to a$, si $f_1(x)\to\ell_1$ et $f_2(x)\to\ell_2$ alors $\max(f_1(x),f_2(x))\to\max(\ell_1,\ell_2)$ (classique). Pour cela traiter $\ell_1=\ell_2$ puis se ramener au cas $\ell_1>\ell_2$ puis utiliser passer d'inégalités strictes sur les limites à des inégalités au voisinage pour montrer qu'au voisinage de a, $\max(f_1(x),f_2(x))=f_1(x)$. Alternativement $\max(a,b)=\frac{a+b+|a-b|}{2}$ et opérations sur les limites.
4. Une preuve avec des ε et δ n'est pas aisée. Utiliser plutôt $\max(a,b)=\frac{a+b+|a-b|}{2}$.
5. Encore une fois $\max(a,b)=\frac{a+b+|a-b|}{2}$ fait des merveilles. Sinon écrire $f_1(x)\le f_1(y)+k_1\,|x-y|\le F(y)+k|x-y|$, de même pour f_2 et conclure après avoir fait l'autre signe.

Indication 26 · Énoncé p. 515 (Sup de fonctions)

1. Majoré non vide.
2. Passer au sup.
3. Soit $x\le y$. Montrer que pour tout $\lambda\in\Lambda$, $f_\lambda(x)\le f_\lambda(y)\le F(y)$ puis passer au sup.
4. Par exemple (mais il y en a plein d'autres) $(x\mapsto x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[0,1]$, ou des fonctions affines par morceau dont le sup est un créneau discontinu.

5. Pour tout $\lambda \in \Lambda$, pour tous (x, y), $f_\lambda(x) \leq f_\lambda(y) + k|x-y| \leq F(y) + k|x-y|$. Passer au sup puis conclure après avoir fait l'autre sens.

Indication 27 · Énoncé p. 515 (Introduction aux fonctions hölderiennes)

1. Que dire par exemple de la racine en 0.

2. Déterminer une expression explicite de δ en fonction de ε (comme pour les fonctions lipschitzienne).

3. Fixer α et utiliser les croissances comparées en 0.

Indication 28 · Énoncé p. 516 (Stabilité par combinaison linéaire)
Pour le cas borné: inégalité triangulaire.

Pour les autres cas: encore l'inégalité triangulaire !

$$|(\lambda f + \mu g)(x) - (\lambda f + \mu g)(y)| \leq |\lambda|\ |f(x) - f(y)| + |\mu|\ |g(x) - g(y)|.$$

Indication 29 · Énoncé p. 516 (Produits et régularité)
Oui. Pour $I = \mathbb{R}$, non et non (prendre $x \mapsto x$). (Pour I borné regarder l'exercice 30)

Indication 30 · Énoncé p. 516 (Fonctions lipschitziennes bornées)

1. On fixe a, alors pour tout x, on a $|f(x)| \leq |f(a)| + k|x-a|$.

2. L'identité est 1-lipschitzienne.

3. C'est un sous-anneau des fonctions de I dans $\mathbb{R}$. Pour le produit remarquer que pour tous x et y

$$|f(x)g(x) - f(y)g(y)| \leq |f(x)|\ |g(x) - g(y)| + |g(y)|\ |f(x) - f(y)|$$

puis utiliser que f et g sont bornées et lipschitziennes.

Indication 31 · Énoncé p. 517 (Fonctions localement constantes)

1. Que dire de $y \in \mathbb{R}$ tq $\forall \varepsilon > 0, |y| \leq \varepsilon$?

2. Pour le sens non immédiat: Fixer $x_0 \in I$ et poser $J = \{x \in I \mid f(x) = f(x_0)\}$. Montrer que si $x \in J$ alors il existe $\delta > 0$ tel que $[x - \delta, x + \delta] \subset J$. Pour conclure que $J = I$ regarder par exemple $\sup\{t \in I, [x_0, t] \subset J\}$ et montrer qu'il s'agit de $\sup(I)$.

Indication 32 · Énoncé p. 517 (Composée de bornée et continue)
Le caractère borné de $b \circ c$ est issu de celui de c. On a $b(\mathbb{R})$ est inclus dans un segment K et $c_{|K}$ est bornée car continue sur un segment.

Prendre par exemple $c = \mathrm{Id}_R$ et b non continue.

Indication 33 · Énoncé p. 517 (Composée et uniforme continuité/lipschitzité)

1. Adapter la preuve de la composée de limite: fixer $\varepsilon > 0$, puis un $\delta > 0$ correspondant à ε pour g, puis un $\eta > 0$ correspondant à δ pour f.

2. Écrire $|g(f(x)) - g(f(y))| \leq k_g\ |f(x) - f(y)| \leq k_f\ |x - y|$.

Indication 34 · Énoncé p. 517 (Attention aux epsilon et delta)
Pour le premier point lire d'abord le second.

Pour le second point: dans le sens réciproque à $\varepsilon > 0$ fixé, avec R tel que $[a-\varepsilon, a+\varepsilon] \subset [-R, R]$ puis M bornant $f_{I\cap[-R,R]}$, prendre $\delta = 2M$. Dans le sens direct à R fixé, avec ε tel que $[a-\varepsilon, a+\varepsilon] \supset [-R, R]$ et δ correspond, prendre $M = |f(a)| + \delta$.

Indication 35 · Énoncé p. 518 (Distance à une partie)

1. Partie minorée par 0 non vide.
2. Montrer que d_A est 1-lipschitzienne, pour cela écrire pour tout $a \in A$, $d_A(x) \leq |x-a| \leq |y-a| + |x-y|$ puis passer à l'inf sur y (cf exercice 26).
3. Utiliser par exemple la caractérisation séquentielle de $\overline{A}$ ($x \in \overline{A}$ ssi il existe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ t.q $u_n \to a$) et celle de l'inf.

Indication 36 · Énoncé p. 518 (Connexité des intervalles)
Si f n'est pas constante, TVI.

Indication 37 · Énoncé p. 518 (Adhérence de l'adhérence)
Utiliser au choix la définition ou la caractérisation séquentielle.

Indication 38 · Énoncé p. 518 (Zéros d'une fonction continue)

1. Utiliser par exemple la caractérisation séquentielle de $\overline{F}$.
2. Regarder l'exercice 35.

Indication 39 · Énoncé p. 519 (Parties homéomorphes)

1. L'identité est un homéomorphisme la composée d'homéos est un homéo et la réciproque d'un homéomorphisme est un homéomorphisme.
2. Pour les intervalles bornés, prendre des fonctions affines. Pour l'infini regarder par exemple arctan et tan.
3. Si par l'absurde f est un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ utiliser le TVI pour atteindre 0.
4. Faire un schéma. Th. des bornes atteintes.

Indication 41 · Énoncé p. 519 (Lemme d'Urysohn 1D)
Pour F fermé on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $d_F(x) = 0$ ssi $x \in F$.

Remarquer que:

$$\begin{cases} \frac{\delta}{\delta+0} = 1 \\ \frac{0}{0+\delta} = 0. \end{cases}$$

Indication 42 · Énoncé p. 520 (Équation de Cauchy)

1. Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}, f(nx) = nf(x)$. Comme $0 = n + (-n)$ on a pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $f(n) = \alpha n$. Puis pour $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ écrire $f(p) = f\left(q\frac{p}{q}\right) = qf\left(\frac{p}{q}\right)$.
2. Regarder par exemple l'exercice 67
3. Regarder par exemple l'exercice 1.

4. À l'aide de translations montrer que si f est continue en a alors f est continue en tout point. Plus précisément, pour tout b, on a $f(x) = f(x + (a - b)) + f(b - a)$ d'où la continuité en b.
5. Commencer par montrer de même que f est bornée au voisinage de tout point, et en particulier au voisinage de 0. Montrer alors que f est continue. Plus précisément avec a et M tel que f bornée par M sur $[-a, a]$ montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ avec N tel que $\frac{1}{N} \leq \frac{\varepsilon}{M}$, si $|x| \leq \frac{a}{N}$ alors $|f(x)| \leq \varepsilon$.
6. Prendre n'importe quelle fonction $\mathbb{Q}$-linéaire, définie par exemple par l'image d'une base.

Indication 43 · Énoncé p. 520 (Équation de Cauchy bis)
1. Montrer que f positive ($f(\frac{x}{2} + \frac{x}{2})$) puis que si f s'annule en un point alors f est nulle. Considérer ensuite $\ln \circ f$. On obtient les $x \mapsto e^{\alpha x}$ et 0.
2. Considérer $f \circ \exp$. On obtient les $x \mapsto \alpha \ln(x)$.
3. S'inspirer des deux précédents. On obtient 0 et les $x \mapsto x^\alpha$.

Indication 44 · Énoncé p. 520 (Une fonction constante)
Par récurrence pour tout x, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(x) = f(\frac{x}{2^n})$. À x fixé faire tendre $n \to +\infty$ et obtenir par continuité $f(x) = f(0)$.

Indication 45 · Énoncé p. 521 (Une fonction nulle)
Par récurrence pour tout x, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(x) = (-1)^n f(\frac{x}{2^n})$. À x fixé faire tendre $n \to +\infty$, et constater la seule possibilité est $f(x) = f(0) = 0$.

Indication 46 · Énoncé p. 521 (Encore fonction constante)
S'inspirer de l'exercice 44.

Plus précisément pour x, pour tout n, $f(x) = f(x^{2^n})$ et $f(x) = f(x^{2^{-n}})$. Pour $|x| < 1$ faire $n \to +\infty$ dans le premier et utiliser la continuité en 0 pour obtenir $f(0)$, et pour $|x| > 1$ faire $n \to +\infty$ dans le second et utiliser la continuité en 1 pour obtenir $f(1)$. Il reste ensuite à montrer que les deux valeurs sont égales, pour cela utiliser la continuité en 1.

Indication 47 · Énoncé p. 521 (Égalité sur les dyadiques)
Commencer à faire un schéma pour se confondre qu'il s'agit des fonctions affines.

On pourra remarquer que l'ensemble des dyadiques (équivalent des décimaux mais en base 2) $D = \left\{\frac{p}{2^n}, (p, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}\right\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Montrer alors que f et $x \mapsto (f(1) - f(0))x + f(0)$ sont continues et coïncident sur une partie dense.

Indication 48 · Énoncé p. 521 (Des suites arithmético-géométriques)
1. Suite arithmético-géométrique donc tout est explicite !
2. Avec x fixé et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite précédente, montrer que pour tout n, $f(u_n) = x$. Faire $n \to +\infty$ et utiliser la continuité.
3. Se ramener au cas $|a| < 1$ en remarquant que si $y = ax + b$ on a $x = \frac{1}{a}y - \frac{b}{a}$.

Indication 49 · Énoncé p. 521 (Pas de solution)
Au pire regarder l'exercice 22. Que dire de f^4 ici ?

Indication 50 · Énoncé p. 522 (Encore une suite récurrente)
Soit $x \in [0,1]$.

Constater qu'avec $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0(x) = x$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1}(x) = \sin(u_n(x))$ on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(x) = f(u_n(x))$.

Indication 51 · Énoncé p. 522 (Par exemple télescopage)
Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f(x) - f\Big(\frac{x}{2^n}\Big) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x}{2^{k+1}}.$$

Indication 52 · Énoncé p. 522 (Le carré et le parallélogramme)
S'inspirer de l'exercice 42.

Remarquer que pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$

$$f((n+1)x) + f((n-1)x) = 2f(nx) + 2f(x)$$

et en déduire que par récurrence double, $f(nx) = n^2 f(x)$.

Indication 53 · Énoncé p. 522 (Juste la racine)
1. Commence par «H» et termine par «eine».
2. Faire le calcul explicite.
3. Regarder en 0.

Indication 54 · Énoncé p. 523 (Propriété des valeurs intermédiaires)
1. Commence par T comme Théorème et termine par VI comme Valeurs Intermédiaires.
2. Partir par exemple $x \mapsto \sin(\frac{1}{x})$. Il reste à montrer que l'image de tout intervalle est un intervalle. Pour un segment $[a,b]$ distinguer selon la présence de 0 ou non.

Indication 55 · Énoncé p. 523 (Bijection non continue)
Pour la bijectivité exhiber par exemple une bijection réciproque. Pour la non continuité, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$ et $1 \neq 0$.

Indication 56 · Énoncé p. 523 (Pas d'interversion de limites)
Les calculs sont explicites. Pour le premier remarquer on obtient 0 tandis que le second (commencer par un calcul de dérivée) n'admet pas de limite.

On ne peut donc **PAS INTERVERSER LES LIMITES**.

Indication 57 · Énoncé p. 524 (Pas vraiment des contre-exemples)
Faire les calculs. En dehors des points où la partie entière à un saut tout se passe a priori bien.

Pour ces points ($\mathbb{Z}$ pour $x \mapsto \lfloor x \rfloor$) au pire faire une étude de limite à gauche et à droite (car la partie entière est constante localement à gauche et à droite).

Indication 58 · Énoncé p. 524 (Les oscillations à l'infini)
On remarquera (cf cours démo de Heine) qu'une méthode pour nier l'uniforme continuité est d'utiliser la contraposée de la caractérisation séquentielle (exercice 73).

Indication 59 · Énoncé p. 524 ((Dis)-continuité à la demande, cas fini)

1. Prendre une fonction continue (par exemple 0) et changer la valeur en $x_0, ..., x_n$.
2. Par exemple par caractérisation séquentielle. Ou des opérations.
3. Prendre une fonction (par exemple polynomiale) qui ne s'annule qu'en les $x_0, ..., x_n$ et utiliser la question précédente.

Indication 60 · Énoncé p. 525 (Attention aux ensemble des équations fonctionnelles)
Fonctions usuelles et opérations. On rappelle que pour tout $x \neq 0$, $\log_2(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(2)}$ et donc $\log_2(2x) = 1 + \log_2(x)$.

Remarquer que dans l'exercice 44 la fonction doit être définie en 0. Est-on prolongeable par continuité en 0 ici ? (Faire un schéma)

Indication 61 · Énoncé p. 525 (Fonction de Thomae)
La bonne définition est issue de l'unicité de la représentation comme fraction irréductible de tout rationnel.

Pour étudier la continuité montrer que:

- ▷ Tout rationnel est limite d'une suite d'irrationnels.
- ▷ Si une suite de rationnel $\left(\frac{p_n}{q_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un irrationnel alors en particulier $q_n \to +\infty$. (Par exemple par l'absurde).

Indication 63 · Énoncé p. 526 (Un contre-exemple aux cordes universelles)
Fonction usuelle et calcul.

Si il existe un tel x développer et obtenir $\sin\left(\frac{\pi}{\delta}\right) = 0$ d'où il existe $n \in \mathbb{N}$ t.q $\delta = \frac{1}{n}$.

Indication 64 · Énoncé p. 527 (Plein de $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$!)
Il y a (malheureusement) non unicité des intuitions fausses. Par exemple, toutes les fonctions proposées vérifient la propriété des valeurs intermédiaires mais ne sont pas toutes continues (exercice 54). On remarque aussi que

1. f_1 est bornée au voisinage de 0 mais n'admet pas de limite finie en 0.
2. f_2 est continue en 0 mais n'est pas de signe constant au voisinage de 0.
3. f_3 est non bornée au voisinage de 0 mais n'a pas de limite infinie (à gauche ou à droite) en 0.
4. f_4 est continue sur $\mathbb{R}^*$, bornée mais n'atteint pas ses bornes.
5. f_5 est prolongeable par continuité en 0 et ce prolongement est dérivable sur $\mathbb{R}$ mais sa dérivée n'est pas continue.

Indication 65 · Énoncé p. 527 (Caractérisation séquentielle et fonctions croissantes)
La limite existe par limite monotone. Pour obtenir la valeur de la limite juste utiliser la composition de limite (cas fonction et suite).

Indication 66 · Énoncé p. 528 (Plus petite fonction croissante plus grande, version continue)
Les deux premiers points ont déjà été traités dans un TD précédent (pour la croissance remarquer que si $x \leq y$ alors $f(]-\infty, x]) \subset f(]-\infty, y])$ et pour l'inégalité que $x \in]-\infty, x]$)

Indication 67 · Énoncé p. 528 (Monotonie sur une partie dense)
Par exemple par caractérisation séquentielle, étant donné $x < y$ construire des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in D^n$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $x_n \to x$ et $y_n \to y$. Constater qu'APCR $x_n < y_n$. Composer par f en utilisant la monotonie et passer à la limite par continuité.

Indication 68 · Énoncé p. 528 (Un peu de monotonie remplace parfois la continuité)

1. Reprendre la démonstration de la caractérisation séquentielle de la densité et dans la construction de la suite rajouter comme contrainte que pour tout n, $u_{n+1} < u_n < x$ (et vérifier que cela reste possible de construire une telle suite).
2. Soit $x \in \mathbb{R}$, prendre deux suites $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in D^{\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in D^{\mathbb{N}}$ l'une croissante et l'autre décroissante tendant vers x. On a $g(y_n) \to g(x)$ et $g(z_n) \to g(x)$ par continuité de g. Il suffit alors d'utiliser seulement $y_n < x < z_n$ et la monotonie de f pour obtenir $f(y_n) \leq f(x) \leq f(z_n)$ et conclure par un théorème d'encadrement.

Indication 69 · Énoncé p. 528 (Ceci n'est pas le lemme de Croft)
Soient $r_1 = \frac{p_1}{q_1}$ et $r_2 = \frac{p_2}{q_2}$ deux rationnels tels que $r_1 \leq r_2$.

Constater que $f\left(p_1 q_2 \frac{1}{q_1 q_2}\right) \leq f\left(p_2 q_1 \frac{1}{q_1 q_2}\right)$.

Conclure par continuité.

Indication 70 · Énoncé p. 529 (Monotonie locale)
Faire par exemple par méthode de prolongement.

C'est à dire considérer pour $a \in I$, l'ensemble des $x > a$ tels que $f_{|[a,x]}$ est croissante. Que dire de son supremum ?

Indication 71 · Énoncé p. 529 (Monotonies encadrantes)
Remarquer que si $0 < x < a$ alors

$$f(a) \leq f(x) \leq \frac{a}{x} f(a).$$

Indication 72 · Énoncé p. 529 (Ensemble de discontinuité d'une fonction monotone)
Remarquer qu'en tout point de discontinuité il y a un « saut » (pourquoi ?) et que dans ce saut on peut choisir un rationnel (pourquoi ?). On obtient alors une injection de $\mathbb{Q}$ dans D (pourquoi ?). Cela assure la (au plus) dénombrabilité de D (admis pour l'instant si nécessaire).

Indication 73 · Énoncé p. 529 (Caractérisation séquentielle de l'uniforme continuité)
S'inspirer de la caractérisation séquentielle de la continuité. Plus précisément:

- ▷ Pour le sens direct: fixer deux suites; soit $\varepsilon > 0$, prendre $\delta > 0$ correspondant dans la définition de l'uniforme continuité. Alors, APCR $|u_n - v_n| \leq \delta$, d'où $|f(x_n) - f(y_n)| \leq \varepsilon$.
- ▷ Pour le sens réciproque: procéder par contraposée. Si f n'est pas uniformément continue nier l'uniforme continuité. Avec un tel $\varepsilon > 0$ fixé, construire deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que pour tout n, $|u_n - v_n| \leq \frac{1}{n+1}$ et $|f(u_n) - f(v_n)| > \varepsilon$.

Indication 74 · Énoncé p. 530 (Uniforme continuité et prolongement)
Commencer par montrer que f est bornée au voisinage de a. Utiliser par exemple la caractérisation séquentielle de la limite. Montrer l'unicité de la valeur d'adhérence par uniforme continuité. Conclure par BW.

Indication 75 · Énoncé p. 530 (Taille des uniformément continues)
Remarquer que si δ est un module d'ε-continuité, avec $n \in \mathbb{N}$ pour $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $|x - y| \leq n\delta$, on a $|f(x) - f(y)| \leq n\varepsilon$ (subdiviser le segment $[x, y]$ en n segments de longueurs $\leq \delta$).

Remarque que pour tout $\delta > 0$, $|x - y| \leq \delta\lceil\frac{|x-y|}{\delta}\rceil$.

Indication 76 · Énoncé p. 530 (Lemme de Croft: cas uniformément continu)
Fixer un $\varepsilon > 0$ puis un module d'ε uniforme continuité. Prendre alors un x dépendant de ce δ. (Faire un schéma).

Indication 77 · Énoncé p. 530 (Sommes de Riemann alternées)
Grouper les termes deux par deux pour montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, APCR la somme est plus petite que ε.

Solution p. 547

Indication 78 · Énoncé p. 531 (Uniforme continuité et limite en l'infini)

1. Montrer qu'il existe M tel que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |x - y| \leq 1 \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq M$. Pour cela on peut par exemple fixer un $\varepsilon > 0$ arbitraire, fixer un $\delta > 0$ correspondant et faire suffisamment de « pas » de longueur δ pour couvrir tout segment de longueur ≤ 1. Pour plus de détails faire un schéma et regarder aussi l'exercice 75.
2. Découper l'intervalle $[0, 1[$ en un nombre fini de sous-intervalles de taille δ. Utiliser l'uniforme continuité sur chacun de ces sous-intervalles.

Indication 79 · Énoncé p. 531 (Uniforme continuité et réciproque)
Par exemple la racine et le carré.

Indication 80 · Énoncé p. 532 (Des cordes horizontales)

1. Commence par «t» et termine par «élescopique».

2. Montrer que deux $\varphi_n\left(\frac{k}{n}\right)$ consécutifs sont de signe opposés (au sens large). Utiliser le TVI sur un tel segment.

Indication 81 · Énoncé p. 532 (L'exercice du cross)
Utiliser l'exercice 80.

Indication 82 · Énoncé p. 533 (Maximum d'une subdivision)
Attention la suite n'est pas forcément croissante.

On a f bornée et atteint ses bornes. Notons μ son maximum et x un point où il est atteint. Montrer que pour tout $\delta > 0$, APCR $\{\} \cap [x-\delta, x+\delta] \neq \varnothing$. En déduire que par continuité de f, $\forall \varepsilon > 0$, APCR $M_n \geq f(x) - \varepsilon$.

Indication 83 · Énoncé p. 533 (Ouvert ou fermé ?)
Une inégalité est issue de l'inclusion.

Pour l'autre constater que $a \in \overline{(a,b)}$ et f continue.

Indication 84 · Énoncé p. 533 (Propriété des valeurs intermédiaires bis)
Se rendre compte que dans une des versions de la preuve du cours de la stricte monotonie on a utilisé la propriété des valeurs intermédiaires (issue de la continuité par TVI).

On peut donc montrer que f est strictement monotone.

Adapter ensuite la preuve stricte monotone + surjective implique continue.

Indication 85 · Énoncé p. 533 (Fonction écartante)
On a l'injectivité en utilisant l'inégalité.

On en déduit la (stricte) monotonie par continuité.

Une fois les valeurs absolues enlevées en déduire le comportement en l'infini puis la surjectivité par TVI.

Indication 86 · Énoncé p. 534 (Nombre d'antécédents)
Faire un schéma et utiliser par exemple le TVI ou le TBA sur un segment bien choisi. Pour l'exemple non continu, ne pas hésiter à définir par "disjonction de cas".

Indication 87 · Énoncé p. 534 (Limite ou pas limite ?)
Regarder 1 et $\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}$ pour se forger une intuition.

Solutions

Solution pour l'exercice 9 · Énoncé p. 509 · Indication p. 535 (Différences de fonctions périodiques)
On propose ici une preuve alternative n'utilisant pas la continuité (merci à Paul S.).

Pour tout $T > 0$ notons

$$\begin{aligned}\Delta_T : \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{C}) &\to \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{C})\\ f &\mapsto (x \mapsto f(x+T) - f(x)).\end{aligned}$$

Ainsi une fonction est T-périodique ssi $\Delta_T(f) = 0$.

On commence par remarquer le lemme suivant: «Soit h une fonction périodique telle que $h(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Alors $h = 0$.»

En effet avec $T > 0$ une période de h et $x \in \mathbb{R}$, on a $h(x) = h(x+nT) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Soient $T_f > 0$ et $T_g > 0$ des périodes respectives de f et g. Posons $h = f - g$.

On a

$$\begin{aligned}\Delta_{T_f}(h) &= \Delta_{T_f}(f) - \Delta_{T_f}(g)\\ &= 0 - \Delta_{T_f}(g).\end{aligned}$$

Et:

- $\Delta_{T_f}(g)$ est périodique de période T_g car $\Delta_{T_g}\big(\Delta_{T_f}(g)\big) = \Delta_{T_f}\big(\Delta_{T_g}(g)\big) = 0$,
- $\Delta_{T_f}(h)(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ car $h\big(x+T_f\big) - h(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0 - 0 = 0$.

par conséquent $\Delta_{T_f}(h)$ est nulle.

Donc h est T_f périodique et tends vers 0 en l'infini.

Donc $h = 0$ c'est à dire $\boxed{f = g}$.

Solution pour l'exercice 77 · Énoncé p. 530 · Indication p. 545 (Sommes de Riemann alternées)
Tout d'abord comme f est continue sur le segment $[0,1]$, par le théorème de Heine, elle est uniformément continue.

Soit $\varepsilon > 0$.

Par uniforme continuité, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $(x,y) \in [0,1]^2$, si $|x-y| \leq \delta$ alors $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$.

Comme $\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $\frac{1}{n} \leq \delta$.

Soit $n \geq N$.

On a

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k f\left(\frac{k}{n}\right) = \begin{cases}\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{\lfloor\frac{n-2}{2}\rfloor}\Big(f\Big(\frac{2j}{n}\Big) - f\Big(\frac{2j+1}{n}\Big)\Big) + \frac{1}{n}f\big(1-\frac{1}{n}\big) & \text{si } n \text{ est impair}\\ \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{\lfloor\frac{n-2}{2}\rfloor}\Big(f\Big(\frac{2j}{n}\Big) - f\Big(\frac{2j+1}{n}\Big)\Big) & \text{si } n \text{ est pair}\end{cases}$$

et comme pour tout j,

$$|\ \frac{2j}{n} - \frac{2j+1}{n}\ | = \frac{1}{n} \leq \delta,$$

on en déduit

$$\begin{aligned}
|\ \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{\lfloor\frac{n-2}{2}\rfloor}\left(f\left(\frac{2j}{n}\right) - f\left(\frac{2j+1}{n}\right)\right)\ | &\leq \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{\lfloor\frac{n-2}{2}\rfloor}|\ f\left(\frac{2j}{n}\right) - f\left(\frac{2j+1}{n}\right)\ | \\
&\leq \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{\lfloor\frac{n-2}{2}\rfloor}\varepsilon \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{\lfloor\frac{n-2}{2}\rfloor}\left(f\left(\frac{2j}{n}\right) - f\left(\frac{2j+1}{n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

et comme $\left(f\left(1-\frac{1}{n}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée (car tend vers $f(1)$), on en déduit que

$$\boxed{\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k f\left(\frac{k}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.}$$

Chapitre 15

Bases et Dimension

Énoncés 550
Indications 555

Énoncés

Note: à compléter

Exercice 1 (◑★♠ Intersection d'hyperplans)
Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

Soient $\varphi_1, ..., \varphi_q$ des formes linéaires sur E.

Montrer que

$$\dim\left(\bigcap_{k=1}^{q} \mathrm{Ker}(\varphi_k)\right) = \dim(E) - \mathrm{rg}\big(\varphi_1, ..., \varphi_q\big).$$

Indication p. 555

Exercice 2 (◔★♠ Rang composé)
Soient E, F, G des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie.

Soient $u \in \mathcal{L}(E, F)$, $v \in \mathcal{L}(F, G)$.

Montrer que

$$\mathrm{rg}(v \circ u) = \mathrm{rg}(u) - \dim(\mathrm{Ker}(v) \cap \mathrm{Im}(u)).$$

Indication p. 555

Exercice 3 (◔☆ Rang d'une somme)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$ des endomorphismes.

Montrer que

- $\mathrm{rg}(u+v) \leq \mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v)$,
- $|\,\mathrm{rg}(u) - \mathrm{rg}(v)| \leq \mathrm{rg}(u+v)$,
- $\mathrm{rg}(u+v) = \mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v)$ ssi $\mathrm{Im}(u+v) = \mathrm{Im}(u) \oplus \mathrm{Im}(v)$ ssi $\mathrm{Ker}(u+v) = \mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Ker}(v)$.

Indication p. 555

Exercice 4 (◔★♣ Inversible à gauche/droite)
Soit E, F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie.

Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $v \in \mathcal{L}(F,E)$.

On suppose que

$$v \circ u = \mathrm{Id}_E \,.$$

Montrer que u et v sont inversibles.

Indication p. 555

Exercice 5 (◑☆ Inversible à gauche/droite en dimension infinie)
Donner un exemple d'espace vectoriel E et d'endomorphismes $u, v \in \mathcal{L}(E)$ tels que

- $v \circ u = \mathrm{Id}_E$,
- u n'est pas inversible,
- v n'est pas inversible.

Indication p. 555

Exercice 6 (◔★ Sous-algèbre de dimension finie)
Soit E une $\mathbb{K}$-algèbre.

Soit $\mathcal{A}$ une sous-algèbre de E de dimension finie.

Montrer que

$$\mathcal{A}^\times = E^\times \cap \mathcal{A}.$$

Commenter.

Indication p. 555

Exercice 7 (◔★ Centre)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

On note

$$\mathcal{Z}(\mathcal{L}(E)) = \{f \in \mathcal{L}(E) \mid \forall g \in \mathcal{L}(E), f \circ g = g \circ f\}.$$

Montrer que

$$\mathcal{Z}(\mathcal{L}(E)) = \mathbb{K} \cdot \mathrm{Id}_E \,.$$

Commenter.

Indication p. 555

Exercice 8 (◑★♠ Ordre de nilpotence)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent d'ordre de nilpotence r.

Montrer que $r \leq n$.

Indication p. 555

Exercice 9 (◔★♠ Fitting version rang)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme.

Montrer que la suite $\left(\mathrm{rg}\left(u^k\right)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante convexe (c'est à dire que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $0 \geq \mathrm{rg}\left(u^{k+1}\right) - \mathrm{rg}\left(u^k\right) \geq \mathrm{rg}\left(u^k\right) - \mathrm{rg}\left(u^{k-1}\right)$).

Indication p. 555

Exercice 10 (◑☆ Inégalités sur le rang)
Soient E, F, G, H des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie.

Soient $u \in \mathcal{L}(E,F)$, $v \in \mathcal{L}(F,G)$, $w \in \mathcal{L}(G,H)$.

Montrer que

$$\mathrm{rg}(w \circ v \circ u) - \mathrm{rg}(w \circ v) - \mathrm{rg}(v \circ u) + \mathrm{rg}(v) \geq 0.$$

Exercice 11 (◑☆ Nilpotents commutant)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n.

Soient $u_1, ..., u_n \in \mathcal{L}(E)$ des endomorphismes nilpotents qui commutent deux à deux.

Montrer que $u_1 \circ u_2 \circ ... \circ u_n = 0$.

Indication p. 555

Exercice 12 (◔☆ Noyau égal image sans matrices)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme tel que $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Im}(u)$.

1. Montrer que $\dim(E)$ est paire.
2. Montrer qu'il existe $(e_1, ..., e_n, e_{n+1}, ..., e_{2n})$ une base de E telle que
$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad u(e_i) = e_{n+i}$$
$$\forall i \in [\![n+1, 2n]\!], \quad u(e_i) = 0.$$

Indication p. 555

Exercice 13 (◔★ Mini Fitting)
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que les trois assertions suivantes sont équivalentes :

1. $E = \mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Im}(u)$;
2. $\mathrm{Ker}(u^2) = \mathrm{Ker}(u)$;
3. $\mathrm{Im}(u^2) = \mathrm{Im}(u)$.

Indication p. 556

Exercice 14 (◑★ Polynôme annulateur $X^3 - 1$)
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que $u^3 = \mathrm{Id}_E$.

1. Montrer l'inclusion $\mathrm{Im}(u - \mathrm{Id}_E) \subset \mathrm{Ker}(u^2 + u + \mathrm{Id}_E)$.
2. Montrer que $\mathrm{Im}(u - \mathrm{Id}_E)$ et $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_E)$ sont supplémentaires dans E.

Indication p. 556

Exercice 15 (◔★ Sous-espace stable)
Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

Soit u un endomorphisme de E.

Soit F un sous-espace vectoriel de E.

Montrer que si $F \subset u(F)$ alors $u(F) = F$.

Indication p. 556

Exercice 16 (◔★ Existence d'un polynôme annulateur)
Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie.

Montrer qu'il existe un polynôme P non nul tel que $P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$ où $P(u) = \sum_{k=0}^{n} a_k u^k$ si $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$.

Indication p. 556

Indications

Indication 1 · Énoncé p. 550 (Intersection d'hyperplans)
Considérer $\Psi : x \mapsto \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \vdots \\ \varphi_q(x) \end{pmatrix}$.

Indication 2 · Énoncé p. 550 (Rang composé)
Constater que $\mathrm{Im}(v \circ u) = \mathrm{Im}\left(v_{|\mathrm{Im}(u)}\right)$ et que $\mathrm{Ker}(v \circ u) = \mathrm{Ker}(v) \cap \mathrm{Im}(u)$.

Indication 3 · Énoncé p. 550 (Rang d'une somme)
Remarquer que $\mathrm{Im}(u+v) \subset \mathrm{Im}(u) + \mathrm{Im}(v)$ et que $\mathrm{Ker}(u+v) \supset \mathrm{Ker}(u) + \mathrm{Ker}(v)$.

Indication 4 · Énoncé p. 551 (Inversible à gauche/droite)
Injectivité pour l'un et surjectivité pour l'autre.

En dimension finie, comme il y a égalité des dimensions (pourquoi ?), l'injectivité entraîne la surjectivité et réciproquement.

Indication 5 · Énoncé p. 551 (Inversible à gauche/droite en dimension infinie)
Prendre une base $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et faire un décalage à droite et à gauche.

Indication 6 · Énoncé p. 551 (Sous-algèbre de dimension finie)
Pour $a \in \mathcal{A}$ fixé remarquer que

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &\to \mathcal{A} \\ x &\mapsto ax \end{aligned}$$

est bien définie, linéaire, injective et donc surjective.

Indication 7 · Énoncé p. 551 (Centre)
Cf exactement le même exercice dans le td sur les matrices.

On remarque qu'en pratique il n'y a pas besoin de la dimension finie.

Indication 8 · Énoncé p. 552 (Ordre de nilpotence)
On pourra choisir $x \in E$ tel que $u^{r-1}(x) \neq 0$ et montrer que $(u^{r-1}(x), u^{r-2}(x), ..., u(x), x)$ est une famille libre.

Indication 9 · Énoncé p. 552 (Fitting version rang)
Utiliser le théorème du rang pour la décroissance et par exemple le théorème du rang composé pour la convexité.

Indication 11 · Énoncé p. 552 (Nilpotents commutant)
On pourra par exemple montrer que $(\mathrm{rg}(u_1 \circ \cdots u_k))_{k\in[\![0,n]\!]}$ est strictement décroissante.

Indication 12 · Énoncé p. 553 (Noyau égal image sans matrices)
1. Utiliser la formule du rang.

2. Utiliser la forme géométrique du théorème du rang puis $(e_1, ..., e_n)$ une base du supplémentaire.

Indication 13 · Énoncé p. 553 (Mini Fitting)
Une inclusion est toujours vraie, et il suffit de conclure par égalité des dimensions.

Indication 14 · Énoncé p. 553 (Polynôme annulateur $X^3 - 1$)
▷ On rappelle que $v \circ w = 0_{\mathcal{L}(E)}$ ssi $\mathrm{Im}(w) \subset \mathrm{Ker}(v)$.
▷ Par dimension et théorème du rang il suffit de montrer l'un des deux.

Indication 15 · Énoncé p. 553 (Sous-espace stable)
Inclusion dans un sens et inégalité des dimensions pour conclure.

Indication 16 · Énoncé p. 554 (Existence d'un polynôme annulateur)
Que dire de $\left(\mathrm{Id}_E, u, u^2, ..., u^{\dim(E)}\right)$?

Chapitre 16

Dérivabilité

Énoncés 558
Indications 578
Solutions 587

Énoncés

Dans toute la feuille du TD, sauf mention du contraire, I est un intervalle de $\mathbb{R}$ (non réduit à un point).

Exercice 1 (◔★ Petite fonction, grande dérivée)
Soient $\varepsilon > 0$ et $\omega > 0$.

On considère

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto \varepsilon \sin(\omega t). \end{aligned}$$

Montrer brièvement les faits suivants:
- $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$,
- $\forall t \in \mathbb{R},\ |f(t)| \leq \varepsilon$,
- $\forall M \in [0, \omega\varepsilon[, \exists t \in \mathbb{R}, |f'(t)| > M$.

Commenter.

Indication p. 578

Exercice 2 (◔★ Le début des méthodes de différences finies)
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

Déterminer l'ensemble des $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tels que pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$, pour tout $a \in I$,

$$\lim_{h \to 0} \frac{\alpha f(a+h) + \beta f(a) + \gamma f(a-h)}{h} = f'(a).$$

Indication p. 578

Exercice 3 (◔★ Extension des gendarmes)
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a \in I$.

Soient g_1,g_2 et f trois fonctions de I dans $\mathbb{R}$ telles que au voisinage épointé de a.

$$\forall x \in I, g_1(x) \leq f(x) \leq g_2(x).$$

On suppose que g_1 et g_2 sont dérivables en a et que

$$g_1(a) = g_2(a) \quad \text{et} \quad g_1'(a) = g_2'(a).$$

Montrer que f est dérivable en a et

$$f(a) = g_1(a) = g_2(a)$$

$$f'(a) = g_1'(a) = g_2'(a).$$

Indication p. 578

Exercice 4 (◑★ Plein d'espaces fonctionnels)
Pour I un intervalle de $\mathbb{R}$ on rappelle que l'on note
- ▹ $\mathcal{C}^0(I,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues sur I,
- ▹ $\mathcal{D}^1(I,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions dérivables sur I,
- ▹ $\mathcal{C}^1(I,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions dérivables sur I de dérivée continue sur I.

On note aussi
- ▹ $\mathrm{Lip}(I,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions lipschitziennes sur I,
- ▹ $\mathcal{C}^0_{\text{unif}}(I,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions uniformément continues sur I.

1. Rappeler pourquoi on a les inclusions suivantes:

$$\mathcal{C}^1(I,\mathbb{R}) \subset \mathcal{D}^1(I,\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}^0(I,\mathbb{R})$$

$$\mathrm{Lip}(I,\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}^0_{\text{unif}}(I,\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}^0(I,\mathbb{R})$$

2. Montrer que pour $I = [0,1[$, $\mathcal{C}^1(I,\mathbb{R}) \not\subset \mathcal{C}^0_{\text{unif}}(I,\mathbb{R})$ et $\mathrm{Lip}(I,\mathbb{R}) \not\subset \mathcal{D}^1(I,\mathbb{R})$.

Commenter les autres inclusions.

3. On suppose dans cette question que I est un **segment**.

Montrer que dans ce cas que $\mathcal{C}^1(I,\mathbb{R}) \subset \mathrm{Lip}(I,\mathbb{R})$.

Montrer $\mathcal{D}^1(I,\mathbb{R}) \not\subset \mathrm{Lip}(I,\mathbb{R})$.

Commenter les autres inclusions.

Indication p. 578

Exercice 5 (◔★ Variantes de Rolle)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. On suppose que
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty.$$
Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f'(c) = 0$. Faire un schéma.
2. On suppose qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell.$$
Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f'(c) = 0$. Faire un schéma.
3. On suppose que
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = f(0).$$
Montrer qu'il existe $c \in]0, +\infty[$ tel que $f'(c) = 0$.

Indication p. 578 · Solution p. 587

Exercice 6 (◔★ Variante du TEAF)
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que
$$f(x) = \alpha x + o_{x\to+\infty}(1)$$
et
$$f(x) = \alpha x + o_{x\to-\infty}(1).$$
Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que
$$f'(c) = \alpha.$$
Faire un schéma.

Indication p. 578 · Solution p. 588

Exercice 7 (◔★ Multi-Rolle I)
Soit $f \in \mathcal{D}^n(I, \mathbb{R})$.

On suppose qu'il existe $x_1 < \cdots < x_n$ des éléments de I tels que $f(x_1) = \cdots = f(x_n)$.

Montrer que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, il existe $\xi_1 < \cdots < \xi_{n-k}$ des éléments de I tels que $f^{(k)}(\xi_1) = \cdots = f^{(k)}(\xi_{n-k}) = 0$.

Indication p. 579

Exercice 8 (◔★ Multi-Rolle II)
Soient $a < b$ deux réels, et $f \in \mathcal{D}^n([a,b],\mathbb{R})$.

On suppose que $f(b) = 0$ et pour tout $f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0$.

Montrer que pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, il existe $x_k \in]a,b]$ tel que $f^{(k)}(x_k) = 0$.

Indication p. 579

Exercice 9 (◔★ Rolle et polynômes réels I)
Un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $n \in \mathbb{N}^*$ est dit **scindé à racines simples** ssi il admet exactement n racines distinctes.

Montrer que la dérivée d'un polynôme (de degré ≥ 2) scindé à racines simples est scindé à racines simples.

Indication p. 579

Exercice 10 (◔★ Petit difféo local)
Soit $f \in \mathcal{C}^1(I,\mathbb{R})$ et $a \in I$.

On suppose que $f'(a) \neq 0$.

Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que $f_{(|I\cap]}a-\delta, a+\delta[)$ est bijective sur son image.

Indication p. 579

Exercice 11 (◑★ Un exemple de cut-off par raccordement)
On définit une fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}.$$

1. Montrer que $\varphi_{|(0,+\infty)} \in \mathcal{C}^\infty((0,+\infty))$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$\forall x > 0, \varphi^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{3n}}\varphi(x).$$

2. En déduire que $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

3. Soit $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une fonction χ_ε vérifiant:

- $0 \leq \chi_\varepsilon \leq 1$
- $\chi_\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
- $\chi_{|[a,b]} = 1$
- $\chi_{|\mathbb{R}\setminus[a-\varepsilon,b+\varepsilon]} = 0$

et faire un schéma.

Indication p. 579

Exercice 12 (◔★ Mise sous forme complexe)
Soient $\omega > 0$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

On considère

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto e^{\lambda t}\cos(\omega t). \end{aligned}$$

Montrer que $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}$.

Indication p. 579

Exercice 13 (◕★ Formule de Taylor-Lagrange)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

1. On suppose que f est dérivable. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ il existe $\xi \in [0, x]$ tel que
$$f(x) = f(0) + f'(\xi)x.$$
2. On suppose que f est deux fois dérivable. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ il existe $\xi \in [0, x]$ tel que
$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(\xi)}{2}x^2.$$
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que f est $n+1$ fois dérivable.

   Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ il existe $\xi \in [0, x]$ tel que
$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

Indication p. 579 · Solution p. 588

Exercice 14 (◑★ Rolle et polynômes réels II)
Un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $n \in \mathbb{N}^*$ est dit **scindé** ssi il admet exactement n racines comptées avec multiplicité, c'est à dire ssi il existe $x_1, ..., x_r$ des réels distincts et $m_1, ..., m_r$ des entiers (appelés multiplicités des racines) tels que
$$P = \alpha \prod_{k=1}^{r} (X - x_k)^{m_k}$$
où $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et
$$\sum_{k=1}^{r} m_k = n.$$
Montrer que la dérivée d'un polynôme réel (de degré ≥ 2) scindé à racines est scindé.

Indication p. 579

Exercice 15 (◔★ Un exercice de limite)
Déterminer, si elle existe, la limite quand $n \to +\infty$ de
$$\left(\cos\left(\frac{n\pi}{3n+1}\right) + \sin\left(\frac{n\pi}{6n+1}\right)\right)^n.$$

Indication p. 579

Exercice 16 (◔★ Un exemple de contre-exemple)
Donner un exemple de fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et f' n'admet pas de limite en $+\infty$.

Indication p. 580

Exercice 17 (◔★ Une règle très peu utile)
Soient f, g deux fonctions dérivables de I dans $\mathbb{R}$ et $a \in I$. On suppose $f(a) = g(a) = 0$, qu'il existe $\eta > 0$ tel que $\forall x \in]a-\eta, a+\eta[\setminus\{0\}$, $g(x) \neq 0$ et que $g'(x) \neq 0$.

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

Indication p. 580

Exercice 18 (◑★ Une inégalité de Landau - Kolmogorov)
Soit $f \in \mathcal{D}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

On suppose que f et f'' sont bornées sur $\mathbb{R}$ et on pose $M_0 = \sup_{\mathbb{R}(|f|)}$, $M_2 = \sup_{\mathbb{R}(|f''|)}$.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\forall h \in \mathbb{R}, |f(x+h) - (f(x) + hf'(x))\ | \leq M_2 \frac{h^2}{2}.$$

2. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\forall h > 0, |f'(x)| \leq h\frac{M_2}{2} + \frac{1}{h} 2M_0.$$

3. Conclure que f' est bornée et qu'en posant $M_1 = \sup_{\mathbb{R}}(|f'|)$ on a

$$M_1 \leq 2\sqrt{M_0 M_2}.$$

4. Montrer que l'on a en fait

$$M_1 \leq \sqrt{2M_0 M_2}$$

Indication p. 580 · Solution p. 590

Exercice 19 (◔★ Que dire de Holder strictement plus grand que 1 ?)
Soit $\alpha > 1$.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ telle que

$$\forall (x, y) \in I^2, \mid f(x) - f(y) \mid \leq |x - y|^{\alpha}.$$

Montrer que f est constante.

Indication p. 580

Exercice 20 (◔★ Une caractérisation des polynômes)
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

On dit que $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction polynomiale (sur I) ssi il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que pour tout $x \in I$, $f(x) = P(x)$.

1. Montrer que si f' est polynomiale sur I, alors f est polynomiale sur I.
2. Montrer que f est polynomiale sur I ssi il existe $d \in \mathbb{N}$ tel que $f^{(d)} = 0$.

Indication p. 580

Exercice 21 (◔★ Équation fonctionnelle de Cauchy, cas dérivable)
Déterminer les fonctions $f \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x + y) = f(x) + f(y).$$

Indication p. 580

Exercice 22 (◔★ Une variante de la règle de l'Hopital)
Soient f et g deux fonctions dérivables de I dans $\mathbb{R}$ telles que g' ne s'annule pas.

Soit $(a, b) \in I^2$ tels que $a < b$.

Montrer que $g(a) \neq g(b)$ et qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Indication p. 580 · Solution p. 591

Exercice 23 (◑★ Un principe utile en équations différentielles)
Soit $f \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant la propriété suivante

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0 \Rightarrow f'(x) > 0.$$

Montrer que f s'annule au plus une fois.

Indication p. 580

Exercice 24 (◔★ Puissance variable)
Soit f la fonction définie par

$$\begin{aligned} f :]0,1] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto (1+x)^{\frac{1}{x}}. \end{aligned}$$

1. Montrer que $f \in \mathcal{C}^\infty(]0,1], \mathbb{R})$.
2. Montrer que f admet un prolongement par continuité en 0.

   On note $\tilde{f}$ ce prolongement par continuité.
3. La fonction $\tilde{f}$ est elle dérivable sur $[0,1]$?
4. Montrer que $\tilde{f}$ est décroissante.

Indication p. 581

Exercice 25 (◑★ Ceci n'est pas une somme de Riemann)
Soit I un intervalle contenant un voisinage de 0 et $f : I \to \mathbb{R}$.

Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose

$$C_n = \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n^2}\right).$$

1. On suppose f est continue en 0.

   Montrer que

   $$C_n = nf(0) + o_{n\to+\infty}(n).$$
2. On suppose que f est dérivable en 0.

   Montrer que

   $$C_n = nf(0) + \frac{1}{2}f'(0) + o_{n\to+\infty}(1).$$

Indication p. 581

Exercice 26 (◑☆ Variations autour des sommes)
Soit I un intervalle contenant un voisinage de 0 et $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable en 0.

Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose

$$I_n = \sum_{k=0}^{n-1} f\Big(\frac{1}{k+n}\Big).$$

Déterminer un développement de I_n asymptotique en $o_{n\to+\infty}(1)$.

Indication p. 581

Exercice 27 (◔★ Dérivabilité d'une périodisation)
Soit $f \in \mathcal{D}^1([0,1],\mathbb{R})$.

On définit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, par $\forall t \in \mathbb{R}$, $\varphi(t) = f(t - \lfloor t \rfloor)$.

1. Faire un schéma.
2. Montrer que φ est 1-périodique et dérivable en tout point de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.
3. Montrer que φ est continue sur $\mathbb{R}$ ssi $f(0) = f(1)$.

   On suppose désormais que $f(0) = f(1)$.
4. Montrer que φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ ssi $f'(0) = f'(1)$.

Indication p. 581

Exercice 28 (◑★ Une histoire de tangente)
Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{D}^1([a,b],\mathbb{R})$ telle que

$$f'(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Montrer qu'il existe $x \in]a,b[$ tel que

$$f'(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

et faire un schéma.

Indication p. 581

Exercice 29 (◑★ Encore une histoire de tangente)
Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$, $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continue en tout point de $[a,b]$ et dérivable en tout point de $]a,b[$. On suppose de plus que $f(a)=f(b)=0$.

Soit $d\in\mathbb{R}\setminus[a,b]$.

Montrer qu'il existe $c\in]a,b[$ tel que

$$f'(c)=\frac{f(c)}{c-d}.$$

Indication p. 582

Exercice 30 (◑★ À la Cesàro)
Soit $f\in\mathcal{D}^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$ et $\ell\in\mathbb{C}$.

Montrer que **si**

$$f'(x)\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}\ell.$$

alors

$$\frac{f(x)}{x}\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}\ell.$$

Que dire de la réciproque ?

Indication p. 582

Exercice 31 (◑★ À la Cesàro infini)
Soit $f\in\mathcal{D}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Montrer que **si**

$$f'(x)\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty.$$

alors

$$\frac{f(x)}{x}\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty.$$

Indication p. 582

Exercice 32 (◑★ Limites des moyennes)
Soit a et b deux réels strictement positifs.

On définit

$$\begin{aligned} m : \mathbb{R}^* &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto \left(\frac{a^t + b^t}{2}\right)^{\frac{1}{t}} \end{aligned}$$

1. Expliquer pourquoi la fonction m est continue sur $\mathbb{R}^*$.
2. Montrer que m admet un prolongement par continuité en 0 et le déterminer.

   On note $\tilde{m} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ce prolongement par continuité.
3. Étudier la monotonie éventuelle de $\tilde{m}$.
4. La fonction $\tilde{m}$ est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$?
5. Déterminer les limites éventuelles en $-\infty$ et $+\infty$ de $\tilde{m}'$.

Indication p. 582

Exercice 33 (◔★ Pas besoin de dériver une composée)
On définit la fonction g_{2025} par

$$g_{2025} = \underbrace{\sin \circ \sin \circ \cdots \circ \sin}_{2025 \text{ fois}}.$$

1. Déterminer $g'_{2025}(0)$.

Indication p. 582

Exercice 34 (◔★ Développements en l'infini)

1. Soit $a \in \mathbb{R}$.

Déterminer, si elle existe, la limite quand $x \to +\infty$ de

$$x^{\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{a+x}} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

2. Soient $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$.

Déterminer, si elle existe, la limite quand $x \to +\infty$ de

$$((a_1+x)(a_2+x)(a_3+x))^{\frac{1}{3}} - x.$$

3. Soit $a \in \mathbb{R}$.

Déterminer, si elle existe, la limite quand $x \to +\infty$ de

$$x^2(\arctan(x+a) - \arctan(x)).$$

Indication: on pourra utiliser $\arctan(h) = h + o_{h\to 0}(h^2)$.

Indication p. 582

Exercice 35 (◔★ L'exponentielle n'est vraiment pas un polynôme)
Soit P un polynôme de degré $d \in \mathbb{N}$.

Montrer que

$$|\{x \in \mathbb{R} \mid e^x = P(x)\}| \leq d+1.$$

Indication p. 582 · Solution p. 592

Exercice 36 (◔★ Dérivabilité du maximum)
Soient $f, g \in \mathcal{D}^1(I, \mathbb{R})$ dérivables et $a \in I$.

Déterminer une CNS pour que $\max(f,g)$ soit dérivable en a.

Indication p. 583

Exercice 37 (◔★ De la force à l'énergie)
Soit $f \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x)f(x) \leq 0$.

Montrer que l'ensemble des points d'annulation de f est de la forme $\varnothing$ ou $]-\infty, +\infty[$, ou $[T, +\infty[$ où $T \in \mathbb{R}$.

Indication p. 583

Exercice 38 (◔★ Un peu de factorisation de paires)
Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ paire.

Montrer qu'il existe $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = g(x^2)$.

Indication p. 583

Exercice 39 (◔★ Conjugaison par une exponentielle)
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on suppose que f s'annule au moins trois fois.

Montrer que $f'' + 2\lambda f' + \lambda^2 f$ s'annule au moins une fois.

Indication p. 583

Exercice 40 (◑★ Limite monotone combiné avec limite de la dérivée)
Soit $f \in \mathcal{D}^1(I, \mathbb{R})$.

On suppose que f' est croissante.

Montrer que $f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$.

Indication p. 583

Exercice 41 (◑★ Idempotents dérivables)
Soit $f \in \mathcal{D}^1(I, I)$ tel que $f \circ f = f$.

On pose $J = f(I)$.

1. Expliquer pourquoi J est un intervalle.

2. Que dire de f si J est un singleton ?

On suppose désormais que J n'est pas un singleton.

On pose $\alpha = \inf(J)$ et on suppose par l'absurde $\alpha \neq \inf(I)$ (en particulier $\alpha \in I$).

2.1. Montrer que la dérivée à gauche de f en α est négative.

2.2. Montrer que la dérivée à droite de f en α est 1.

2.3. Conclure que $f = \mathrm{Id}_I$.

Indication p. 583

Exercice 42 (◑★ Reste d'interpolation)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $f \in \mathcal{C}^n([a,b],\mathbb{R})$ et $(x_1,...,x_n) \in [a,b]^n$ deux à deux distincts.

Pour $k \in [\![1,n]\!]$ on pose

$$L_k = \prod_{\substack{j\in[\![1,n]\!]\\ j\neq k}} \frac{(X-x_j)}{(x_k-x_j)}.$$

On définit aussi $R \in \mathcal{C}^n([a,b],\mathbb{R})$ par

$$\forall t \in I, f(t) = \left(\sum_{k=1}^{n} f(x_k)L_k(t)\right) + R(t).$$

1. Faire un schéma.
2. Montrer que pour tout $x \in [a,b]$ il existe $c_x \in]a,b[$ tel que
$$R(x) = \frac{f^{(n)}(c_x)}{n!}\prod_{k=1}^{n}(x-x_k).$$
3. En déduire qu'il existe une constante $M_n(f) > 0$ telle que
$$\forall t \in [a,b], |f(t) - \sum_{k=1}^{n} f(x_k)L_k(t)\ | \leq \frac{M_n(f)}{n!}$$
4. Commenter.

Indication p. 583

Exercice 43 (◔★ Juste un peu plus que la stricte croissante)
Soit $f \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

1. On suppose qu'il existe $\varepsilon > 0$ telle que $\forall t \in \mathbb{R}, f'(t) \geq \varepsilon$. Montrer que f est bijective.
2. Le résultat précédent est-il vrai si on suppose seulement $\forall t \in \mathbb{R}, f'(t) > 0$.

Indication p. 584

Exercice 44 (◔☆ Cas d'Égalité dans l'Inégalité des Accroissements Finis)
Soit $f \in \mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R})$ telle que

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \sup_{t\in[a,b]}(f'(t)).$$

Montrer que f est affine.

Indication p. 584

Exercice 45 (◔☆ Fonctions absolument monotones)
On dit qu'une fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$ est absolument monotone ssi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)} \geq 0$.

1. Donner un exemple de fonction absolument monotone.
2. Montrer que l'ensemble des fonctions absolument monotones est stable par somme et par produit.
3. Soit f absolument monotone. Montrer que $\exp \circ f$ est absolument monotone.
4. Montrer que $\arcsin : [0, 1[\to \mathbb{R}$ est absolument monotone.

Indication p. 584

Exercice 46 (◔☆ Contre-exemple en vrac)
Déterminer l'ensemble des points de dérivabilité de $x \mapsto x^2 \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x)$.

Pour $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, construire une fonction f dérivable en $x_1, ..., x_n$ et non continue en tous les autres réel(s).

Indication p. 584

Exercice 47 (◔☆ Dérivée symétrique)
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$.

On dit que f est symétriquement dérivable en a ssi il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que

$$\frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} \underset{h \to 0}{\longrightarrow} \ell.$$

1. Montrer que toute fonction dérivable en a est symétriquement dérivable en a.
2. Donner un exemple de fonction symétriquement dérivable en un point et non dérivable en ce point.

Indication p. 584

Exercice 48 (◔☆ Petit produit croisé)
Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$.

On suppose f et g dérivables en a.

Montrer que la limite

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)g(a) - f(a)g(x)}{x - a}$$

existe et la déterminer.

Indication p. 584

Exercice 49 (◔☆ Encore des Rolleries)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soit $f \in \mathcal{D}^n([0,1],\mathbb{R})$. On suppose que f s'annule au moins $n+1$ fois. Montrer que $f^{(n)}$ s'annule.
2. Soit $f \in \mathcal{D}^n([0,1],\mathbb{R})$. On suppose que $f(0) = 0$ et $\forall k \in [\![0, n-1]\!], f^{(k)}(1) = 0$. Montrer que $f^{(n)}$ s'annule.
3. On suppose qu'il existe p et q tels que $p+q = n$ et que $\forall k \in [\![0, p-1]\!], f^{(k)}(0) = 0$, $\forall k \in [\![0, q-1]\!], f^{(k)}(1) = 0$. Montrer que $f^{(n)}$ s'annule.

Indication p. 584

Exercice 50 (◑☆ Dérivabilité par limites de rationnels)
Soit $f \in \mathcal{C}^0(I,\mathbb{R})$ et $a \in I$.

Montrer que f est dérivable en a de dérivée $\ell \in \mathbb{R}$ ssi

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \underset{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{Q}}}{\longrightarrow} \ell.$$

Indication p. 584

Exercice 51 (◕☆ Moitiés, limites, et Cesàro)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue en 0.

Montrer que f est dérivable en 0 **ssi** il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que

$$\frac{f(2h)-f(h)}{h} \underset{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}}{\longrightarrow} \ell$$

. Dans ce cas donner une relation entre $f'(0)$ et ℓ.

Indication p. 584

Exercice 52 (◔☆ Condition nécessaire de surjectivité)
Soit $f \in \mathcal{D}^1([0,1],[0,1])$.

On suppose que f est surjective.

1. Montrer qu'il existe $c \in]0,1[$ tel que $|f'(c)| \geq 1$.
2. Montrer qu'il existe $d \in]0,1[$ tel que $|f'(d)| \leq 1$.

Indication p. 585

Exercice 53 (◔☆ Pour s'entraîner au raisonnement)
Soient $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{D}^1([a,b],\mathbb{R})$.

On suppose que $f(a) = f(b)$ et $f'(a) > 0$.

Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) < 0$.

Indication p. 585

Exercice 54 (◔☆ Toujours la même chose)
Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ périodique.

Montrer que f est lipschitzienne.

Indication p. 585

Exercice 55 (◑☆ Encore des équations fonctionnelles)

1. Déterminer toutes les fonctions $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(2x) = 2g(x).$$

2. En déduire toutes les fonctions $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(2x) = \frac{2f(x)}{1+f(x)^2}.$$

3. Donner un exemple de fonction $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) \setminus \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(2x) = \frac{2f(x)}{1+f(x)^2}.$$

Indication p. 585

Exercice 56 (◑☆ MultiTEAF)
Soit $f \in \mathcal{D}^1([a,b],\mathbb{R})$.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $\xi_1 < \cdots < \xi_n$ éléments de $]a,b[$ tels que

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f'(\xi_k) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Indication p. 585

Exercice 57 (◔☆ Théorème d'Euler unidimensionnel)
Soit $f \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

Montrer l'équivalence entre les propriétés suivantes:

(i) f est homogène de degré α, c'est à dire

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall t > 0, f(tx) = t^\alpha f(x). \tag{1}$$

(ii) f vérifie l'identité d'Euler,

$$\forall x \in \mathbb{R}, xf'(x) = \alpha f(x).$$

Indication p. 585

Exercice 58 (◑☆ Quelques suites se comportent bien)

1. Donner un exemple de fonction $f \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que f est bornée et f' ne converge pas vers 0 en $+\infty$.

2. Donner un exemple de fonction $f \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que f' converge vers 0 en $+\infty$ et f n'est pas bornée.

3. Soit $f \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On suppose que f est bornée. Montrer qu'il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $(f'(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Indication p. 585

Exercice 59 (◑☆ Cas particulier de composition)
Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^*, \mathbb{R})$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose

$$\begin{aligned} g_n : \mathbb{R}^* &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^{n-1} f\left(\frac{1}{x}\right). \end{aligned}$$

1. Exprimer pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $g_n(x)$ en fonction de x et de $g_{n-1}(x)$. En déduire pour tout $d \in \mathbb{N}^*$ une expression de $g_n^{(d)}$ en fonction de $g_{n-1}^{(d-1)}$ et $g_{n-1}^{(d)}$.

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, g_n^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n}{x^{n+1}} f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right).$$

Indication p. 586

Exercice 60 (◔☆ Dans ce chapitre c'est facile)
Soit $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$.

Montrer qu'il existe $t \in]0,1[$ tel que

$$4@^3 + 3bt^2 + 2ct + d = a + b + c + d.$$

Indication p. 586

Indications

Indication 1 · Énoncé p. 558 (Petite fonction, grande dérivée)
Pour les démonstrations tout est explicite.

Méditer les commentaires possibles.

Indication 2 · Énoncé p. 558 (Le début des méthodes de différences finies)
Effectuer un DL1 et obtenir un système linéaire d'inconnue (α, β, γ).

Indication 3 · Énoncé p. 559 (Extension des gendarmes)
Notons $\alpha_0 = g_1(a) = g_2(a)$ et $\alpha_1 = g_1'(a) = g_2'(a)$.

Écrire un encadrement sur

$$\frac{f(x) - (\alpha_0 + \alpha_1(x-a))}{|x-a|}$$

utiliser le théorème des gendarmes et conclure.

Ou bien faire les gendarmes à gauche et à droite en prenant soin de faire attention au signe de $x - a$.

Indication 4 · Énoncé p. 559 (Plein d'espaces fonctionnels)

1. Cours.
2. Par exemple $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ et $x \mapsto |x - \frac{1}{2}|$ (mais il y a beaucoup d'autres exemples).

   Pour les autres inclusions si $A \subset B$ et $A \not\subset C$ alors $B \not\subset C$, faire un schéma.
3. TBA + IAF.

Indication 5 · Énoncé p. 560 (Variantes de Rolle)
Il y a de nombreuses méthodes.

- **Méthode 1**:Reprendre la preuve du théorème de Rolle. Il suffit de montrer que f admet un extremum local.
- **Méthode 2**: Prolonger par continuité (dans le cas limite finie) $f \circ \tan$ sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et appliquer Rolle à ce prolongement après avoir vérifié les hypothèses.
- **Méthode 3**: Montrer qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$ tels que $f(a) = f(b)$ puis utiliser Rolle.

Solution p. 587

Indication 6 · Énoncé p. 560 (Variante du TEAF)
Comme pour le TEAF classique, se ramener à Rolle.

Solution p. 588

Indication 7 · Énoncé p. 560 (Multi-Rolle I)
Par récurrence sur n en utilisant Rolle entre x_i et x_{i+1}.

Indication 8 · Énoncé p. 561 (Multi-Rolle II)
Par récurrence sur k en utilisant Rolle entre a et x_{k-1}.

Indication 9 · Énoncé p. 561 (Rolle et polynômes réels I)
Cf exercice 7.

Indication 10 · Énoncé p. 561 (Petit difféo local)
Montrer la stricte monotonie au voisinage de a.

Indication 11 · Énoncé p. 562 (Un exemple de cut-off par raccordement)

1. Procéder par récurrence sur n.
2. Utiliser le théorème de la limite de la dérivée et les croissances comparées.
3. Commencer par le schéma, utiliser la fonction φ précédente.

Indication 12 · Énoncé p. 562 (Mise sous forme complexe)
Poser $\alpha = \lambda + i\omega$ et constater que $f : t \mapsto \mathrm{Re}(e^{\alpha t})$.

Indication 13 · Énoncé p. 563 (Formule de Taylor-Lagrange)

1. Il s'agit de reformuler l'égalité des accroissements finis.
2. Donner un nom au reste:
$$f(x) = f(0) + f'(0)x + R_1(x)$$
puis appliquer le théorème de Rolle à une fonction auxiliaire bien choisie.
3. Donner un nom au reste:
$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)(0)}}{n!} + x^n R_n(x)$$
puis appliquer le théorème de Rolle à une fonction auxiliaire bien choisie.

Solution p. 588

Indication 14 · Énoncé p. 563 (Rolle et polynômes réels II)
Montrer que si λ est racine de multiplicité $m \geq 2$ de P alors c'est une racine de multiplicité m de P'.

Puis utiliser **Rolle**.

Indication 15 · Énoncé p. 563 (Un exercice de limite)
Effectuer un DL1.

Indication 16 · Énoncé p. 564 (Un exemple de contre-exemple)
S'inspirer de l'exercice 1, en prenant une amplitude tendant vers 0 et une pulsation tendant vers $+\infty$.

Par exemple considérer $x \mapsto e^{-bx}\sin(e^{ax})$ pour a et b bien choisis.

Indication 17 · Énoncé p. 564 (Une règle très peu utile)
Juste écrire la définition du nombre dérivée.

Indication 18 · Énoncé p. 564 (Une inégalité de Landau - Kolmogorov)

1. Regarder l'exercice 13 ou juste appliquer l'IAF à une fonction auxiliaire bien choisie.
2. Juste l'inégalité triangulaire et des majorations à partir de la question précédente.
3. Prendre le sup sur x pour le caractère borné. Pour la borne annoncée, prendre l'inf sur h.
4. Symétriser en montrant que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall h \in \mathbb{R}, |f(x+h) - f(x-h) - 2hf'(x)\ | \leq M_2 h^2$$

puis effectuer une démonstration analogue.

Solution p. 590

Indication 19 · Énoncé p. 565 (Que dire de Holder strictement plus grand que 1 ?)
Montrer que f est dérivable et que sa dérivée est nulle.

Indication 20 · Énoncé p. 565 (Une caractérisation des polynômes)

1. Par analyse synthèse.
2. Par récurrence.

Indication 21 · Énoncé p. 565 (Équation fonctionnelle de Cauchy, cas dérivable)
On peut bien évidemment procéder comme dans le cas plus général (cf TD continuité).

Ou ici un raccourci et de fixer une variable et de dériver par rapport à l'autre.

Indication 22 · Énoncé p. 565 (Une variante de la règle de l'Hopital)
Cela revient à montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $(f(b)-f(a))g'(c) - (g(b)-g(a))f'(c) = 0$.

Poser une fonction auxiliaire adaptée et utiliser Rolle.

Solution p. 591

Indication 23 · Énoncé p. 566 (Un principe utile en équations différentielles)
Faire un schéma.

Supposons qu'il existe x_0 tq $f(x_0) = 0$ et $f'(x_0) > 0$ et fixons le.

Montrer que si $x_1 = \min\{t > x_0 \mid f(t) = 0\}$ est bien défini, alors $f(x_1) = 0$ et $f'(x_1) \leq 0$.

Indication 24 · Énoncé p. 566 (Puissance variable)

1. Remarquer que pour $x \in]0,1]$, $f(x) = \exp\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)$.
2. Faire un DL1 de ln
3. Théorème de la limite de la dérivée.
4. Étudier le signe de la dérivée. Pour simplifier l'étude on pourra étudier le signe de $1 - \frac{1}{1+y} - \ln(1+y)$.

Indication 25 · Énoncé p. 566 (Ceci n'est pas une somme de Riemann)

1. Il suffit de montrer que

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left|f\left(\frac{k}{n^2}\right) - f(0)\right| \underset{n\to+\infty,\text{ classique}}{\longrightarrow} 0.$$

   Pour cela on peut par exemple repasser à une quantification en $\varepsilon - \delta$ et montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, ÀPCR en n, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $|f\left(\frac{k}{n^2}\right) - f(0)| \leq \varepsilon$ puis sommer.
2. De même que pour le premier point, mais cette fois en considérant

$$|f\left(\frac{k}{n^2}\right) - \left(f(0) + \frac{k}{n^2}\right)f'(0)|$$

   après avoir remarqué que

$$\frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1} k^2 = \frac{1}{2} + o_{n\to+\infty}(1).$$

Indication 26 · Énoncé p. 567 (Variations autour des sommes)
Faire comme l'exercice 25. On pourra écrire le développement en fonction de la limite quand $n \to +\infty$ de $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+n}$ (pourquoi existe-elle ?).

Pour calculer cette limite, par exemple prendre $f = \ln(1+\cdot)$.

Indication 27 · Énoncé p. 567 (Dérivabilité d'une périodisation)

1. Le graphe représentatif de φ est celui de f répété (faire le schéma).
2. La 1-périodicité est immédiate.

   Soit $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Avec $\delta > 0$ t.q $]a-\delta, a+\delta[\cap \mathbb{Z} = \varnothing$ utiliser le caractère local de la dérivabilité.
3. Déterminer les limites à droite et à gauche en tout point entier.
4. Déterminer les dérivées à droite et à gauche en tout point entier.

Indication 28 · Énoncé p. 567 (Une histoire de tangente)
Commencer par faire le schéma. Interpréter comme tangente/corde passant par $(a, f(a))$.

Introduire la fonction auxiliaire $x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ prolongée par continuité en a et appliquer le théorème de Rolle.

Indication 29 · Énoncé p. 568 (Encore une histoire de tangente)
De même faire un schéma en interprétant comme la corde passant par $(d,0)$ et $(c,f(c))$.

Indication 30 · Énoncé p. 568 (À la Cesàro)
Procéder sans surprise à la Cesàro:

- ▷ se ramener à $\ell = 0$
- ▷ fixer $\varepsilon > 0$, déterminer un $A > 0$ t.q $\forall x \geq A, |f'(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$
- ▷ écrire pour $x > A$,

$$|\frac{f(x)}{x}| \leq |\frac{f(x)-f(A)}{x-A}| + |\frac{f(A)}{x-A}|$$

- ▷ traiter le premier terme par IAF,
- ▷ pour le second prendre x assez grand

La réciproque est fausse, construire un contre-exemple.

Indication 31 · Énoncé p. 568 (À la Cesàro infini)
Cf exercice 30.

Indication 32 · Énoncé p. 569 (Limites des moyennes)

1. Fonctions usuelles.
2. Effectuer un DL1 en 0 en partant de l'intérieur, après avoir écrit pour t non nul, $m(t) = \exp\Big(\frac{1}{t}\ln\Big(\frac{e^{\ln(a)t}+e^{\ln(b)t}}{2}\Big)\Big)$. Le prolongement par continuité en 0 vaut $\sqrt{ab}$.
3. Étudier la monotonie sur $]-\infty,0[$ et $]0,+\infty[$. Conclure par continuité.
4. Effectuer une limite de la dérivée ou un développement limité en 0. Dans les deux cas les DL2 suivants peuvent être utiles: $e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + o_{u\to 0}(u^2)$ et $\ln(v) = v - \frac{v^2}{2} + o_{v\to 0}(v)$.
5. Factoriser par le terme prédominant. On obtient le minimum en $-\infty$ et le maximum en $+\infty$.

On remarquera que quitte à factoriser par a on peut toujours se ramener à $a = 1$ (mais cela n'est pas nécessaire).

Indication 33 · Énoncé p. 569 (Pas besoin de dériver une composée)

1. Justifier la dérivabilité et composer les DL1s, ou bien faire une récurrence.

Indication 34 · Énoncé p. 570 (Développements en l'infini)
Dans chaque cas, constater que lorsque $x \to +\infty$, $\frac{1}{x} \to 0$ et utiliser un DL1. Pour s'y ramener:

1. Factoriser par x.
2. Factoriser par x.
3. Que dire de $\arctan(x) + \arctan\big(\frac{1}{x}\big)$ pour $x > 0$?

Indication 35 · Énoncé p. 570 (L'exponentielle n'est vraiment pas un polynôme)
Encore une fois utiliser Rolle, en remarquant que $x \mapsto e^x - P(x)$ dérivé $\deg(P)$ fois est strictement positive.

Solution p. 592

Indication 36 · Énoncé p. 570 (Dérivabilité du maximum)
▷ Si $f(a) > g(a)$ alors au voisinage de a, $\max(f,g) = f$. De même si $f(a) < g(a)$.

Ou bien utiliser $\max(f,g) = \frac{f+g+|f-g|}{2}$ et $f-g$ ne s'annule pas au voisinage de a.
▷ Si $f(a) = g(a)$, déterminer selon la comparaison de $f'(a)$ et $g'(a)$ les dérivées à droite et à gauche en a. Faire évidemment un schéma.

Indication 37 · Énoncé p. 570 (De la force à l'énergie)
Remarquer que f^2 est positive et décroissante.

Par conséquent si $f^2(t) = 0$ alors pour tout $s > t$, $f^2(s) = 0$.

Prendre l'infimum de ces temps.

Indication 38 · Énoncé p. 571 (Un peu de factorisation de paires)
Le point non immédiat à démontrer est que $g : x \mapsto f(\sqrt{x})$ est de classe $\mathcal{C}^1$ jusqu'en 0.

Remarquer que comme f est paire $f'(0) = 0$. Utiliser ensuite le caractère $\mathcal{C}^2$ de f.

Indication 39 · Énoncé p. 571 (Conjugaison par une exponentielle)
Poser la fonction auxiliaire $\varphi : t \mapsto f(t)e^{\lambda t}$ et appliquer Rolle.

Indication 40 · Énoncé p. 571 (Limite monotone combiné avec limite de la dérivée)
Soit $a \in I$.

Appliquer le th. de limite monotone sur f' à gauche et à droite, puis le th. de limite de la dérivée à gauche et à droite.

Conclure par l'existence (et donc unicité) de $f'(a)$.

Indication 41 · Énoncé p. 571 (Idempotents dérivables)
1. TVI
2. Dans ce cas f est constante.
3. On a donc pour tout x, $f(x) \geq \alpha$ d'où pour tout $x < \alpha$, $\frac{f(x)-\alpha}{x-\alpha} \geq 0$.
4. Montrer que $f_{|J} = \mathrm{Id}_J$ et conclure par caractère local (à droite) de la dérivée (à droite).
5. Faire de même pour le sup. Conclure que $J = I$ puis que $f = \mathrm{Id}_I$.

Indication 42 · Énoncé p. 572 (Reste d'interpolation)
1. Il s'agit d'une interpolation de f par une fonction polynomiale en les x_k.
2. Poser comme fonction auxiliaire $t \mapsto R(t) - \frac{R(x)}{\prod(x-x_k)} \prod(t-x_k)$ et appliquer une version de Rolle.
3. Utiliser le TBA sur $f^{(n)}$.
4. Question pouvant être piège: a priori on ne peut pas conclure à la convergence, à cause des dépendances en n des constantes.

Indication 43 · Énoncé p. 572 (Juste un peu plus que la stricte croissante)

1. L'injectivité est immédiate. Pour la surjectivité déterminer les limites en $\pm\infty$ et utiliser le TVI.
2. Regarder une fonction usuelle, par exemple exp ou arctan.

Indication 44 · Énoncé p. 572 (Cas d'Égalité dans l'Inégalité des Accroissements Finis)
Introduire l'écart à la corde (la même fonction auxiliaire que dans la démonstration du TEAF).

Montrer que cet écart est décroissant et donc constant en l'évaluant en a et b.

Indication 45 · Énoncé p. 573 (Fonctions absolument monotones)

1. Par exemple exp, un polynôme, ou encore $x \mapsto (1-x)^{-\alpha}$ avec $\alpha > 0$ sur $[0,1[$.
2. Immédiat par calcul.
3. Par récurrence forte.
4. Déterminer par récurrence une expression de $\arcsin^{(n)}$ sous la forme $x \mapsto \frac{P_n(x)}{(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}}}$ avec une récurrence précise sur P_n.

   Alternativement démontrer que $\ln \circ (\arcsin')$ est absolument monotone.

Indication 46 · Énoncé p. 573 (Contre-exemple en vrac)
La fonction est non continue, donc non dérivable sur $\mathbb{R}^*$. En 0 la fonction est dérivable de dérivée nulle (pourquoi ?).

S'inspirer du cas précédent, par exemple $x \mapsto \prod (x - x_k)^2 \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x)$.

Indication 47 · Énoncé p. 573 (Dérivée symétrique)

1. Montrer que si f est dérivable en a, $\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} f'(a)$.
2. Que dire de $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$?

Indication 48 · Énoncé p. 573 (Petit produit croisé)
Faire un DL1 sans se poser de questions.

Indication 49 · Énoncé p. 574 (Encore des Rolleries)
Comme pour l'exercice 14, faire une récurrence (et un schéma).

Indication 50 · Énoncé p. 574 (Dérivabilité par limites de rationnels)
Remarquer tout d'abord l'importance de l'hypothèse de continuité de f.

Ensuite, on peut au pire repasser en $\varepsilon - \delta$.

Indication 51 · Énoncé p. 574 (Moitiés, limites, et Cesàro)
Commencer par un schéma.

- ▷ Pour le sens direct remarquer que $f(2h) - f(h) = (f(2h) - f(0)) - (f(h) - f(0))$.
- ▷ Pour le sens réciproque, on peut par exemple (mais ce n'est pas la seule méthode) remarquer que pour tout n, par télescopage

$$\frac{f(h)-f\left(\frac{h}{2^n}\right)}{h}=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2^{k+1}}\frac{f\left(\frac{h}{2^k}\right)-f\left(\frac{h}{2^{k+1}}\right)}{\frac{h}{2^{k+1}}}$$

et faire une preuve *« à la Cesàro »*.

Indication 52 · Énoncé p. 574 (Condition nécessaire de surjectivité)
Faire un schéma.

Écrire un TEAF.

1. Dans le premier cas entre des antécédents de 0 et 1.
2. Dans le second entre 0 et 1.

Indication 53 · Énoncé p. 575 (Pour s'entraîner au raisonnement)
Supposons par l'absurde que ce ne soit pas le cas.

Alors f est croissante donc, comme $f(a)=f(b)$, constante.

En déduire que $f'(a)=0$.

Indication 54 · Énoncé p. 575 (Toujours la même chose)
Comme d'habitude se ramener à un segment, un peu plus grand que la période pour avoir de la marge, ou bien montrer que f' est bornée car périodique et continue.

Indication 55 · Énoncé p. 575 (Encore des équations fonctionnelles)

1. Constater que $\frac{g\left(\frac{x}{2^n}\right)}{2^n}$ est constante, en déduire que g est linéaire par la dérivabilité en 0.
2. Constater que la tangente hyperbolique est solution.

   Montrer que pour tout x, $f(x)\in[-1,1]$. Montrer que si f vaut 1 ou -1 en un point alors f est constante.

   Poser sinon $g=\tanh^{-1}\circ f$.
3. Toute fonction de la forme $\tanh\circ g$ avec g vérifiant la première équation fonctionnelle convient. Il reste à trouver un tel g non dérivable en 0.

Indication 56 · Énoncé p. 575 (MultiTEAF)
Étant donnée une subdivision $x_0<\cdots<x_n$ de $[a,b]$, on peut appliquer le TEAF à chaque intervalle $[x_k,x_{k+1}]$ pour obtenir l'existence de $\xi_0<\cdots<\xi_{n-1}$ tels que

$$\sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}-x_k)f'(\xi_k)=\sum_{k=0}^{n-1}(f(x_{k+1})-f(x_k))$$

et prendre ensuite une subdivision régulière.

Indication 57 · Énoncé p. 576 (Théorème d'Euler unidimensionnel)
Remarquer que la condition (1) est équivalente au caractère constant de $t\mapsto t^{-\alpha}f(tx)$.

Indication 58 · Énoncé p. 576 (Quelques suites se comportent bien)

1. Plein d'exemples, par exemple avec des oscillations, $x\mapsto\cos(x)$, $x\mapsto\cos(x^2)$, etc.

2. Il faut prendre comme dérivée une fonction tendant vers 0 mais « pas trop rapidement » (cf notion d'intégrabilité). Par exemple avec $f : x \mapsto x^\alpha$ où $\alpha \in \mathbb{R}$ est bien choisi (ou un ln).

3. Avec M une borne de f on en déduit par le TEAF que pour tous a_n et b_n il existe $u_n \in [a_n, b_n]$ tel que $|f'(u_n)| = |\frac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n}| \leq 2M\frac{1}{|b_n-a_n|}$. Reste maintenant à choisir a_n et b_n tels que, par encadrements, $u_n \to +\infty$ et $\frac{1}{|b_n-a_n|} \to 0$.

Indication 59 · Énoncé p. 576 (Cas particulier de composition)

1. Pour tout x, $g_n(x) = xg_{n-1}(x)$. Dériver par Leibniz.

2. Par exemple par récurrence.

3. Pour tout x, $g_1(x) = \frac{1}{x^{n-1}}g_n(x)$.

Indication 60 · Énoncé p. 577 (Dans ce chapitre c'est facile)

Appliquer le TEAF à $at^4 + bt^3 + ct^2 + dt$.

Solutions

Solution pour l'exercice 5 · Énoncé p. 560 · Indication p. 578 (Variantes de Rolle)

1. Posons $M = f(0) - 1$.

Alors de par les limites, il existe A_+ et A_- tels que

$$\forall x \leq A_-, f(x) \leq M$$

$$\forall x \geq A_+, f(x) \leq M.$$

Comme $f(0) > M$ on a $A_- \leq 0 \leq A_+$.

Sur le **segment** $[A_-, A_+]$ la fonction f est **continue** donc est bornée et atteint ses bornes.

Soit $c \in [A_-, A_+]$ tel que

$$f(c) = \max_{x \in [A_-, A_+]} f(x).$$

Comme $f(c) \geq f(0) > M$ on a de plus

$$\forall x \notin [A_-, A_+], f(c) \geq f(x).$$

Par conséquent

$$f(c) = \max_{x \in \mathbb{R}} f(x)$$

i.e f admet un maximum global (donc en particulier local) en c.

Comme $\mathbb{R}$ est un intervalle ouvert et que f dérivable en c on en déduit

$$\boxed{f'(c) = 0}.$$

En fait la deuxième partie de la preuve est inutile (le côté global du maximum), il est néanmoins utile de savoir montrer que f admet un maximum global, d'où sa présence dans la correction.

2. Si pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \ell$ alors la fonction est constante et sa dérivée est nulle.

Sinon, soit $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que

$$f(x_0) \neq \ell.$$

Soit $\varepsilon = \frac{|f(x_0) - \ell|}{2} > 0$.

Par les limites de f il existe A_- et A_+ tels que

$$\forall x \leq A_-, |f(x) - \ell\ | \leq \varepsilon$$

$$\forall x \geq A_+, |f(x) - \ell\ | \leq \varepsilon$$

Et en particulier $A_- < x_0 < A_+$ Comme f est **continue** sur le **segment** $[A_-, A_+]$ alors, par le théorème des bornes atteintes, elle est bornée et atteint ses bornes sur $[A_-, A_+]$.

Si $f(x_0) > \ell$, avec c tel que $f(c) = \max_{[A_-, A_+]} f$ on a en particulier

$$f(c) \geq f(x_0) > \ell + \varepsilon$$

et donc pour tout $x \notin [A_+, A_-]$, $f(x) \leq \ell + \varepsilon < f(c)$.

Par conséquent f admet un maximum global en c.

Donc comme $\mathbb{R}$ est un intervalle ouvert et f dérivable en $c$on en déduit

$$\boxed{f'(c) = 0}.$$

De même si $f(x_0) < \ell$, on obtient un minimum global.

En fait la deuxième partie de la preuve est inutile (le côté global de l'extremum), il est néanmoins utile de savoir montrer que f admet un extremum global, d'où sa présence dans la correction. [Faire un schéma]

Solution pour l'exercice 6 · Énoncé p. 560 · Indication p. 578 (Variante du TEAF)
Posons

$$g : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f(x) - \alpha x \end{array}.$$

Alors g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$$

donc d'après l'exercice 5 $\boxed{\text{il existe } c \in \mathbb{R} \text{ tel que } f'(c) = \alpha}$.

Solution pour l'exercice 13 · Énoncé p. 563 · Indication p. 579 (Formule de Taylor-Lagrange)

1. Soit $x \in \mathbb{R}$.

Comme f est dérivable sur $[0, x]$ par le formule des **accroissements finis** $\boxed{\text{il existe } \xi \in [0, x]}$ tel que

$$f(x) - f(0) = f'(\xi)(x - 0)$$

c'est à dire

$$\boxed{f(x) = f(0) + f'(\xi)x}.$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}^*$ et posons

$$\boxed{R_1(x) = f(x) - (f(0) + xf(0))}.$$

L'objectif est de montrer qu'il existe $\xi \in [0, x]$ tel que

$$R_1(x) = \frac{x^2}{2} f''(\xi).$$

Posons la fonction auxiliaire

$$\begin{array}{l} \varphi_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ \xi \mapsto f(\xi) + (x - \xi)f'(\xi) + \dfrac{R_1(x)}{x^2}(x - \xi)^2. \end{array}$$

Alors

$$\varphi_1(0) = f(0) + f'(0)x + R_1(x) = f(x)$$
$$\varphi_1(x) = f(x).$$

Par le théorème de Rolle $\boxed{\text{il existe donc } \xi \in]0, x[}$ tel que

$$\varphi_1'(\xi) = 0.$$

De plus φ_1 est dérivable sur $[0, x]$ de dérivée,

$$\begin{aligned}\forall \xi \in [0, x], \varphi_1'(\xi) &= f'(\xi) - f'(\xi) + (x - \xi)f''(\xi) - 2\frac{R_1(x)}{x^2}(x - \xi) \\ &= (x - \xi)\left(f''(\xi) - 2\frac{R_1(x)}{x^2}\right).\end{aligned}$$

et donc si $\varphi_1'(\xi) = 0$, $\xi \neq x$, on a

$$\boxed{R_1(x) = \tfrac{x^2}{2} f''(\xi)}$$

ce qui est bien le résultat recherché.

3. Soit $x \in \mathbb{R}^*$ et posons

$$\boxed{R_n(x) = f(x) - \textstyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k}.$$

L'objectif est de montrer qu'il existe $\xi \in [0, x]$ tel que

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1}.$$

Posons la fonction auxiliaire

$$\begin{aligned}\varphi_n : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ \xi &\mapsto \sum_{k=0}^{n} \frac{(x - \xi)^k}{k!} f^{(k)}(\xi) + \frac{R_n(x)}{x^{n+1}}(x - \xi)^{n+1}.\end{aligned}$$

Alors

$$\varphi_n(0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + R_n(x) = f(x)$$
$$\varphi_n(x) = f(x).$$

Par le théorème de Rolle $\boxed{\text{il existe donc } \xi \in]0, x[}$ tel que

$$\varphi_n'(\xi) = 0.$$

De plus φ_n est dérivables sur $[0, x]$ de dérivée,$\forall \xi \in [0, x]$,

$$\begin{aligned}\varphi_n'(\xi) &= \sum_{k=0}^{n}\left(-k\frac{(x-\xi)^{k-1}}{k!}f^{(k)}(\xi)+\frac{(x-\xi)^k}{k!}f^{(k+1)}(\xi)\right)-(n+1)\frac{R_n(x)}{x^{n+1}}(x-\xi)^n\\ &= -\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{(x-\xi)^{k-1}}{(k-1)!}f^{(k)}(\xi)\right)+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(x-\xi)^k}{k!}f^{(k+1)}(\xi)+\cdots\\ &\cdots+\frac{(x-\xi)^n}{n!}f^{(n+1)}(\xi)-(n+1)\frac{R_n(x)}{x^{n+1}}(x-\xi)^n\\ &= 0+(n+1)(x-\xi)^n\left(\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}-\frac{R_n(x)}{x^{n+1}}\right)\end{aligned}$$

et donc si $\varphi_n'(\xi)=0$, $\xi\neq x$, on a

$$\boxed{R_n(x)=\tfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)}$$

ce qui est bien le résultat recherché.

Solution pour l'exercice 18 · Énoncé p. 564 · Indication p. 580 (Une inégalité de Landau - Kolmogorov)

1. Soit $x\in\mathbb{R}$ et $h\in\mathbb{R}$.

Par le théorème de Taylor-Lagrange (exercice 13) appliqué à f au point x il existe ξ entre x et $x+h$ tel que

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{f''(\xi)}{2}h^2.$$

Donc

$$|f(x+h)-(f(x)+hf'(x))\,|=|\frac{f''(\xi)}{2}h^2|$$

et comme

$$|f''(\xi)|\leq M_2$$

on en déduit

$$\boxed{|f(x+h)-(f(x)+hf'(x))\,|\leq M_2\tfrac{h^2}{2}}.$$

2. Soit $x\in\mathbb{R}$ et $h>0$.

D'après la question précédente on a

$$\begin{aligned}|f'(x)| &= |f'(x)-\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\frac{f(x+h)-f(x)}{h}|\\ &\leq |f'(x)-\frac{f(x+h)-f(x)}{h}|+|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}|\\ &\leq \frac{M_2h^2}{2h}+\frac{|f(x+h)|+|f(x)|}{h}\\ &\leq h\frac{M_2}{2}+\frac{1}{h}2M_0.\end{aligned}$$

et donc on bien

$$\boxed{|f'(x)| \leq h\frac{M_2}{2} + \frac{1}{h}2M_0}.$$

3. Constatons tout d'abord que si $M_2 = 0$ alors f est affine, donc comme elle est bornée elle est constante et alors l'inégalité est vraie.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

L'inégalité précédente est vraie pour tout $h > 0$, elle est en particulier vraie pour $h = \sqrt{2\frac{M_0}{M_2}}$.

Remarque: on peut obtenir ce h optimal en étudiant la fonction $h \mapsto h\frac{M_2}{2} + \frac{1}{h}2M_0$.

On a donc

$$|f'(x)| \leq 2\frac{M_0}{M_2}\frac{M_2}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\frac{M_0}{M_2}}}2M_0 = 2\sqrt{M_0M_2}.$$

Et comme cela est vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a bien par passage au supremum

$$\boxed{M_1 \leq 2\sqrt{M_0M_2}}.$$

Solution pour l'exercice 22 · Énoncé p. 565 · Indication p. 580 (Une variante de la règle de l'Hopital)
Posons la fonction

$$\begin{aligned}\varphi : I &\to \mathbb{R}\\ x &\mapsto (f(b)-f(a))g(x) - (g(b)-g(a))f(x).\end{aligned}$$

Alors φ est dérivable sur I comme combinaisons linéaire de fonctions dérivables.

De plus

$$\varphi(a) = (f(b)-f(a))g(a) - (g(b)-g(a))f(a) = f(b)g(a) - g(b)f(a)$$

$$\varphi(b) = (f(b)-f(a))g(b) - (g(b)-g(a))f(b) = -g(b)f(a) + f(b)g(a)$$

donc

$$\varphi(a) = \varphi(b).$$

Par le **théorème de Rolle** $\boxed{\text{il existe donc } c \in]a,b[}$ tel que

$$\varphi'(c) = 0$$

c'est à dire, par l'expression de φ,

$$(f(b)-f(a))g'(c) - (g(b)-g(a))f'(c) = 0$$

ce qui revient à

$$\boxed{\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}}.$$

Solution pour l'exercice 35 · Énoncé p. 570 · Indication p. 582 (L'exponentielle n'est vraiment pas un polynôme)
On procède par récurrence sur d.

Pour $d \in \mathbb{N}$ soit

$$\mathcal{Q}_d : \forall P \text{ de degré } d, |\{x \in \mathbb{R} \mid e^x = P(x)\}| \leq d+1.$$

Initialisation

Soit P de degré 0 c'est à dire P un polynôme constant.

Alors avec $f : x \mapsto e^x - P(x)$ on a f dérivable et

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = e^x > 0.$$

Donc f est strictement croissante. En particulier elle est injective et l'équation

$$f(x) = 0$$

admet au plus une solution.

Hérédité Soit $d \in \mathbb{N}$ et supposons $\mathcal{Q}_d$ vraie.

Soit P un polynôme de degré $d+1$ et soit

$$f : x \mapsto e^x - P(x).$$

Notons m le nombre de solutions de $f(x) = 0$ et $x_1 < x_2 < \cdots < x_m$ ces solutions.

Alors comme f est dérivable et que

$$\forall k \in [\![1, m-1]\!], f(x_k) = 0 = f(x_{k+1})$$

par le théorème de Rolle,

$$\forall k \in [\![1, m-1]\!], \exists y_k \in]x_k, x_{k+1}[, f'(y_k) = 0.$$

On a donc $y_1 < y_2 < \cdots < y_{m-1}$ qui sont solutions de

$$f'(x) = 0$$

, équation qui admet donc au moins $m-1$ solutions.

[Faire un schéma]

Or

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = e^x - \underbrace{P'(x)}_{\text{polynôme de degré } d}$$

et donc par l'hypothèse de récurrence $f'(x) = 0$ admet au plus $d+1$ solutions.

Donc $m - 1 \leq d + 1$ c'est à dire

$$m \leq (d+1) + 1$$

et on a donc bien montré $\mathcal{Q}_{d+1}$.

Conclusion On a donc montré $\mathcal{Q}_0$ et que $\forall d \in \mathbb{N}$, $\mathcal{Q}_d \Rightarrow \mathcal{Q}_{d+1}$. Donc par récurrence pour tout $d \in \mathbb{N}$ la propriété est vraie.

Chapitre 17

Matrices (Retour)

Énoncés 594
Ouvertures 609
Indications 611
Solutions 619

Énoncés

Dans toute la feuille du TD, sauf mention du contraire, $n \in \mathbb{N}^*$ est un entier naturel non nul, $\mathbb{K}$ un corps (tel que $2 \neq 0$) et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

Exercice 1 (◔★♣ Classes de similitudes des homothéties)
Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

Déterminer l'ensemble des matrices semblables à λI_n.

Indication p. 611

Exercice 2 (◔★♣ Rang et petit bloc)
Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ s'écrivant par blocs

$$A = \left(\begin{array}{c|ccc} \alpha & * & * & * \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \tilde{A} & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

avec $\alpha \in \mathbb{K}^*$ et $\tilde{A} \in \mathrm{M}_{n-1}(K)$.

Montrer que

$$\mathrm{rg}(A) = 1 + \mathrm{rg}\left(\tilde{A}\right).$$

Indication p. 611

Exercice 3 (◔★♠ Matrices de rang 1 (ligne/colonne))
Soit $A \in \mathrm{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.

Montrer que les deux conditions suivantes sont **équivalentes**:

(i) $\mathrm{rg}(A) = 1$

(ii) $\exists L \in M_{1,q}(\mathbb{K}) \setminus \left\{0_{1,q}\right\}, C \in M_{p,1}(\mathbb{K}) \setminus \left\{0_{p,1}\right\}, A = CL$

Indication p. 611

Exercice 4 (◔★♠ Matrices de rang 1 (similitudes/trace))
Soit u un endomorphisme de rang 1.

Montrer que

- ▹ **Si** $\mathrm{tr}(u) \neq 0$ **alors** il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que
$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{tr}(u) & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right).$$
- ▹ **Si** $\mathrm{tr}(u) = 0$ **alors** il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que
$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 1 & \\ 0 & 0 \\ \vdots & \\ 0 & \end{array}\right).$$

Indication p. 611

Exercice 5 (◔★♣ Trace d'un projecteur/d'une symétrie)
Soient F et S deux sevs supplémentaires de E. Soit π la projection sur F parallèlement à S et σ la symétrie par rapport à F parallèlement à S.

1. Exprimer $\mathrm{tr}(\pi)$ et $\mathrm{tr}(\sigma)$ en fonction de $\dim(F)$ et $\dim(S)$.

2. Exprimer $\mathrm{tr}(\pi)$ en fonction de $\mathrm{rg}(\pi)$.

Indication p. 611

Exercice 6 (◔★ Le rang ne dépend pas du corps)
Soit $A \in \mathrm{M}_{p,q}(\mathbb{R}) \subset \mathrm{M}_{p,q}(\mathbb{C})$.

On note $\mathrm{rg}_{\mathbb{R}}(A)$ le rang de A en tant que matrice de $\mathrm{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ et $\mathrm{rg}_{\mathbb{C}}$ le rang de A en tant que matrice de $\mathrm{M}_{p,q}(\mathbb{C})$.

Montrer que
$$\mathrm{rg}_{\mathbb{R}}(A) = \mathrm{rg}_{\mathbb{C}}(A).$$

Indication p. 611

Exercice 7 (◔★ Un théorème de représentation)
Soit φ une forme linéaire sur $\mathrm{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.

Montrer qu'il existe une et unique matrice $A \in \mathrm{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ telle que

$$\forall M \in \mathrm{M}_{p,q}(\mathbb{K}), \varphi(M) = \mathrm{tr}(A^\top M).$$

Indication p. 611

Exercice 8 (◑★ Nilpotent d'ordre maximal)
Une matrice $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ est dite nilpotente d'ordre $d \in \mathbb{N}^*$ ssi $A^d = 0_n$ et $A^{d-1} \neq 0_n$.

1. Soit A une matrice nilpotente d'ordre n.

Montrer que A est semblable à

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

2. En déduire que toutes les matrices nilpotentes d'ordre n sont semblables.

3. Dans le cas $n = 4$ proposer deux matrices nilpotentes d'ordre 2 non semblables.

Indication p. 611

Exercice 9 (◔★ Sous-algèbre et inverses)
On dit que $\mathcal{A} \subset \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ est une sous-algèbre de $(\mathrm{M}_n(\mathbb{K}), +, \times, .)$ si c'est un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{A}, +, .)$ et un sous-anneau de $(\mathcal{A}, +, \times)$.

Autrement dit une sous-algèbre est un ensemble stable par combinaison linéaire et produit et contenant I_n.

1. Donner des exemples de sous-algèbres de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

2. Soit $\mathcal{A}$ une sous-algèbre de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

Montrer que pour $P \in \mathcal{A} \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, $P^{-1} \in \mathcal{A}$.

Indication p. 612

Exercice 10 (◔★ Matrice d'une structure complexe)
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^2 = -\mathrm{Id}_E$.

Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Indication p. 612

Exercice 11 (◑★ Classes de similitude dans $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$)
Soit $A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$. Montrer qu'une et exactement une des propositions suivantes est vérifiée.

(i) Il existe $\lambda \in \mathbb{C}$, tel que $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, et dans ce cas λ est unique.

(ii) Il existe $\lambda \in \mathbb{C}$, tel que A semblable à $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, et dans ce cas λ est unique.

(iii) Il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$, $\lambda \neq \mu$ tel que A semblable à $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ et dans ce cas $\{\lambda, \mu\}$ est unique.

Indication p. 612

Exercice 12 (◔★ Trace de la transposée)
Soit $T \in \mathcal{L}(M_n(K))$ l'application qui à toute matrice associe sa transposée.

Déterminer $\mathrm{tr}(T)$.

Indication p. 612

Exercice 13 (◔★ Similitude et corps, cas 2×2)
Soient $A, B \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \subset \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$.

Montrer que A et B semblables dans $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ **ssi** A et B semblables dans $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$.

Indication p. 612

Exercice 14 (◔★ Matrice d'Attila)
Soit

$$J = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

la matrice de $\mathrm{M}_n(K)$ dont tous les coefficients valent 1.

Montrer que J est semblable à

$$\left(\begin{array}{c|c} n & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right).$$

Indication p. 612

Exercice 15 (◔★ Des Huns camouflés)
Déterminer en fonction de $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ le rang de

$$M_{\alpha,\beta} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \cdots & \beta \\ \beta & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \beta \\ \beta & \cdots & \beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

Indication p. 612

Exercice 16 (◑★♠ Rang par blocs)
Soient $A \in \mathrm{M}_p(\mathbb{K})$, $C \in \mathrm{M}_q(\mathbb{K})$ et $B \in \mathrm{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.

On suppose

$$\mathrm{Im}(B) \subset \mathrm{Im}(A).$$

Montrer que

$$\mathrm{rg}\left(\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right)\right) = \mathrm{rg}(A) + \mathrm{rg}(C).$$

Indication p. 612

Exercice 17 (◔★ Un seul bloc inversible)
Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes
(i) $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Ker}(A^2)$
(ii) $\mathbb{K}^n = \mathrm{Ker}(A) \oplus \mathrm{Im}(A)$
(iii) A est semblable à une matrice

$$\left(\begin{array}{c|c} B & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

où $B \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{K})$, $r = \mathrm{rg}(A)$.

Indication p. 613

Exercice 18 (◔★ Tout hyperplan contient une matrice inversible)
Soit H un hyperplan de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

Montrer que

$$H \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \neq \varnothing.$$

Indication p. 613

Exercice 19 (◑★ Caractérisation du rang et produit)
Soit $M \in \mathrm{M}_{np}(\mathbb{K})$.

Montrer que

$$\mathrm{rg}(M) = \min\left(\left\{r \in \mathbb{N} \mid \exists (A,B) \in M_{nr}(\mathbb{K}) \times M_{rp}(\mathbb{K}), M = AB\right\}\right).$$

Indication p. 613

Exercice 20 (◑★ Une autre caractérisation du rang)
Soit $M \in \mathrm{M}_{np}(\mathbb{K})$ et $r \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\mathrm{rg}(M) = r$ **ssi** il existe $(X_1, ..., X_r) \in (\mathbb{K}^n)^r$ libre et $(Y_1, ..., Y_r) \in (\mathbb{K}^p)^r$ libre tels que

$$A = \sum_{k=1}^{r} X_k Y_k^\top.$$

Indication p. 613

Exercice 21 (◔★ Calcul explicite: périodiques (détaillé))
Soit $N \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{R}_p$ l'ensemble des suites p-périodiques

$$\mathcal{R}_p = \left\{ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \;\middle|\; \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+p} = u_n \right\}$$

et T l'opérateur de translation

$$\begin{aligned} T : \mathbb{C}^{\mathbb{N}} &\to \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} &\mapsto (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}. \end{aligned}$$

1. Montrer que $\mathcal{R}_p$ est un sev de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et est stable par T.
2. Montrer que l'endomorphisme induit $T_{\mathcal{R}_p}$ est un automorphisme.
3. Pour tout $k \in [\![0, p-1]\!]$ on note c_k la suite définie par, $\forall n \in \mathbb{N}, (c_k)_n = \delta_{n\equiv k[p]}$.

   Montrer que $\mathcal{C} = (c_0, c_1, ..., c_{p-1})$ est une base de $\mathcal{R}_p$.
4. Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}\left(T_{\mathcal{R}_p}\right)$.
5. Soit $\omega = e^{\frac{2i\pi}{p}}$.

   Pour tout $k \in [\![0, p-1]\!]$ on note u_k la suite définie par, $\forall n \in \mathbb{N}, (u_k)_n = \left(\omega^k\right)^n$.

   Montrer que $\mathcal{U} = (u_0, u_1, ..., u_{p-1})$ est une base de $\mathcal{R}_p$.
6. Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{U}}\left(T_{\mathcal{R}_p}\right)$.
7. Montrer que les matrices

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \omega & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \omega^{p-1} \end{pmatrix}$$

   sont semblables.

Indication p. 613

Exercice 22 (◔☆ Pivot et similitude: est-ce une bonne idée ?)
On suppose que E est de dimension 2, soit (e_1, e_2) une base de E et $u \in \mathcal{L}(E)$.

On note

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \mathrm{Mat}_{(e_1,e_2)}(u).$$

1. Déterminer $\mathrm{Mat}_{(e_2,e_1)}(u)$.
2. Soit $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Déterminer $\mathrm{Mat}_{(\lambda e_1,e_2)}(u)$.
3. Soit $\mu \in \mathbb{K}$. Déterminer $\mathrm{Mat}_{(e_1+\mu e_2,e_2)}(u)$.

Indication p. 614

Exercice 23 (◑★ Nilpotents d'ordre 2)
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \left(\begin{array}{c|c} 0_{r,n-r} & I_r \\ \hline 0_{n-r,n-r} & 0_{n-r,r} \end{array}\right)$$

où $r = \mathrm{rg}(u) \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$.

Indication p. 614

Exercice 24 (◔★ Encore Vandermonde et Lagrange)
Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x = (x_0, ..., x_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$.

On note

$$\begin{aligned} \mathrm{eval}_x \, \mathbb{K}_n[X] &\to \mathbb{K}^{n+1} \\ P &\mapsto \begin{pmatrix} P(x_0) \\ \vdots \\ P(x_n) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

1. Montrer **avec le moins de calculs possibles** que eval_x est inversible **ssi** les x_k $(0 \leq k \leq n)$ sont deux à deux distincts.
2. En déduire (toujours avec le moins de calculs possibles) une CNS sur les x_k $(0 \leq k \leq n)$ pour que la matrice

$$V_n = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix}$$

soit inversible.
3. Proposer au moins 3 méthodes pour calculer de manière générale une expression de $\mathrm{rg}(V_n)$ en fonction de $\left|\{x_k\}_{0\leq k\leq n}\right|$ (c'est à dire du nombre de x_k distincts). En rédiger au moins une.

Indication p. 614

Exercice 25 (◔★ Inversible et projecteur)
Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

Montrer qu'il existe $U \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $P \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice vérifiant $P^2 = P$ tels que

$$A = UP.$$

Indication p. 614

Exercice 26 (◑☆ Formes linéaires invariantes par similitudes)
Soit $\varphi \in (\mathrm{M}_n(\mathbb{K}))^*$ une forme linéaire sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ invariante de similitude, c'est à dire telle que pour toutes matrices A et B de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, si A et B sont semblables alors $\varphi(A) = \varphi(B)$.

Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\varphi = \lambda \operatorname{tr}$.

Indication p. 614

Exercice 27 (◑☆ Un bloc maximal)
Soit $r \in [\![0, n]\!]$ et $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice de rang r qui peut s'écrire par blocs

$$M = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right)$$

où $A \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{K})$.

1. Montrer que

$$\mathrm{Im}(M) = \left\{ M\begin{pmatrix} X \\ 0 \end{pmatrix}, X \in \mathbb{K}^r \right\}.$$

2. En déduire que pour tout $Y \in \mathbb{K}^{n-r}$ il existe un et unique $X \in \mathbb{K}^r$ tel que

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(M)$$

et exprimer X en fonction de Y.

3. En utilisant la question précédente montrer que

$$D - CA^{-1}B = 0.$$

Indication p. 614

Exercice 28 (◔★ Retour sur les matrices de Pascal)
Pour $\alpha \in \mathbb{K}$ on note

$$T_n(\alpha) = \left(\binom{j-1}{i-1}\alpha^{j-i}\right)_{\substack{1\leq i\leq n+1\\ 1\leq j\leq n+1}}.$$

1. Montrer **avec le moins de calculs possibles** que pour tous $(\alpha,\beta)\in\mathbb{K}^2$, $T_n(\alpha+\beta) = T_n(\alpha)T_n(\beta)$.
2. Soient $(u_k)_{0\leq k\leq n} \in \mathbb{K}^{n+1}$ et $(v_k)_{0\leq k\leq n}\in\mathbb{K}^{n+1}$ tels que

$$\forall i \in [\![0,n]\!], v_i = \sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j}u_j.$$

Déterminer une expression de $(u_k)_{0\leq k\leq n}$ en fonction de $(v_k)_{0\leq k\leq n}$.

Indication p. 615

Exercice 29 (◑☆ Matrices semblables à leur carré)
Déterminer l'ensemble des matrices de $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ semblables à leur carré.

Indication p. 615

Exercice 30 (◑★ Triangulaires et drapeaux)
Soit E un espace vectoriel de dimension n.

On dit qu'une suite de sevs de E, $F_0,...,F_d$ est un *drapeau* si

$$\{0_E\}\subset F_1\subset F_2\subset\cdots\subset F_{d-1}\subset F_d = E.$$

On dit de plus que le drapeau est *complet* ssi $d=n$ et pour tout $k\in[\![0,...,n]\!]$, $\dim(F_k)=k$.

On dit qu'un endomorphisme $u\in\mathcal{L}(E)$ *stabilise* un tel drapeau ssi $\forall k\in[\![0,...,d]\!]$, u stabilise F_k.

1. Donner un exemple de drapeau, un exemple de drapeau complet.
2. Soit $u\in\mathcal{L}(E)$. Montrer l'équivalence entre
   (i) il existe un drapeau complet stabilisé par u
   (ii) il existe une base dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure
3. Montrer que toute matrice triangulaire supérieure stricte est nilpotente.

Indication p. 615

Exercice 31 (◑★ Équations matricelles avec trace)

1. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. On note $\mathcal{S}_A$ l'ensemble des solutions de l'équation matricielle

$$X^\top + X = \mathrm{tr}(X)A$$

d'inconnue $X \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

1.1. Montrer que $A_n(\mathbb{K}) \subset \mathcal{S}_A$.

1.2. Montrer que **si** $\mathrm{tr}(A) \neq 2$ ou $A \notin S_n(\mathbb{K})$ **alors** $\mathcal{S}_A = A_n(\mathbb{K})$.

1.3. Montrer que **si** $\mathrm{tr}(A) = 2$ et $A \in S_n(\mathbb{K})$ **alors** $\mathcal{S}_A = A_n(\mathbb{K}) \oplus \mathrm{Vect}(A)$.

2. Soient $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. On note $\mathcal{S}_{A,B}$ l'ensemble des solutions de l'équation matricielle

$$X = \mathrm{tr}(X)A + B$$

d'inconnue $X \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

2.1. Montrer que si $\mathrm{tr}(A) \neq 1$ on a

$$\mathcal{S}_{A,B} = \left\{ \frac{\mathrm{tr}(B)}{1 - \mathrm{tr}(A)} A + B \right\}.$$

2.2. Montrer que si $\mathrm{tr}(A) = 1$ et $\mathrm{tr}(B) \neq 0$ alors

$$\mathcal{S}_{A,B} = \varnothing.$$

2.3. Montrer que si $\mathrm{tr}(A) = 1$ et $\mathrm{tr}(B) = 0$ alors

$$\mathcal{S}_{A,B} = \{\lambda A + B, \lambda \in \mathbb{K}\}.$$

Indication p. 615

Exercice 32 (◔★ Puissances d'une matrice de rang 1)
Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\mathrm{rg}(A) = 1$.

Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$

$$A^k = \mathrm{tr}(A)^{k-1} A.$$

Indication p. 615

Exercice 33 (◔★ Une inégalité de Sylvester sur le rang)
Soient $A \in \mathrm{M}_{np}(\mathbb{K})$, $B \in \mathrm{M}_{pq}(\mathbb{K})$.

Montrer que

$$\mathrm{rg}(AB) \geq \mathrm{rg}(A) + \mathrm{rg}(B) - p$$

avec égalité ssi $\mathrm{Ker}(A) \subset \mathrm{Im}(B)$.

Indication p. 615

Exercice 34 (◑★ Une inégalité de Frobenius sur le rang)
Soient A, B, C trois matrices telles que le produit ABC est bien défini.

Montrer que

$$\mathrm{rg}(ABC) \geq \mathrm{rg}(AB) + \mathrm{rg}(BC) - \mathrm{rg}(B)$$

avec égalité ssi $\mathrm{Im}(B) \cap \mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Im}(BC) \cap \mathrm{Ker}(A)$.

Indication p. 616

Exercice 35 (◔☆ Arithmético-géométrique)
Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, $B \in \mathbb{K}^n$ et $U_0 \in \mathbb{K}^n$.

On considère la suite $(U_k)_{k\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{K}^n)^{\mathbb{N}}$ définie par

$$U_0 = U_0$$
$$\forall k \in \mathbb{N}, U_{k+1} = AU_k + B$$

Donner pour tout $n \in \mathbb{N}$ une expression explicite de U_n.

Indication p. 616

Exercice 36 (◑☆ Modifier la diagonale)
Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice n'étant pas une homothétie.

1. Montrer qu'il existe $X \in \mathbb{K}^n$ tel que (X, AX) est libre.
2. Montrer qu'il existe $B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ semblable à A telle que la première colonne de B est $E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$.
3. Montrer qu'il existe $B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ semblable à A dont tous les coefficients diagonaux sont nuls sauf le dernier qui est $\mathrm{tr}(A)$.

Indication p. 616 · Solution p. 619

Exercice 37 (◑☆ Commutateurs et trace nulle)
Montrer que

$$\left\{AB - BA, (A, B) \in \left(\mathrm{M}_n(\mathbb{K})\right)^2\right\} = \mathrm{Ker}(\mathrm{tr}).$$

Indication p. 616 · Solution p. 621

Exercice 38 (◔★ Espace engendré par les matrices inversibles)
Montrer que $\mathrm{Vect}(\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})) = \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

Indication p. 616

Exercice 39 (◔★ Des inversibles dans toutes les directions !)
1. Montrer que toute matrice non inversible est équivalente à une matrice triangulaire supérieure stricte.
2. Soit A une matrice non inversible. Montrer qu'il existe $U \in \mathrm{GL}_n(K)$ telle que
$$\{A + \lambda U, \lambda \in \mathbb{K}^*\} \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}).$$

Indication p. 616

Exercice 40 (◔☆ Un terme au milieu)
Soient $A \in \mathrm{M}_{np}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathrm{M}_{pq}(\mathbb{K})$ deux matrices non nulles.

Montrer qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ telle que $APB \neq 0_{nq}$.

Indication p. 617

Exercice 41 (◑☆ Encore un terme au milieu)
Soient $A \in \mathrm{M}_{np}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathrm{M}_{qm}(\mathbb{K})$ deux matrices.

Déterminer
$$\dim\big(\{M \in \mathrm{M}_{pq}(\mathbb{K}) \mid AMB = 0_{nm}\}\big).$$

Indication p. 617

Exercice 42 (◕☆ Un peu comme le rang)
Déterminer toutes les fonctions $f : \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \to [\![0, n]\!]$ vérifiant
$$\forall (A, B) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}), f(AB) \leq \min(f(A), f(B)).$$

Indication p. 617

Exercice 43 (◔☆ Un calcul avec des rangs et projections)
Soient $A \in \mathrm{M}_{3,2}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathrm{M}_{2,3}(\mathbb{K})$ tels que

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(B) = 2$.
2. Montrer que $BA = I_2$.

Indication p. 617

Exercice 44 (◔☆ Minicalcul)
Soit $n \geq 2$.

Déterminer $\mathrm{rg}\Big((\sin(i+j))_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq n}}\Big)$.

Indication p. 617

Exercice 45 (◔☆ Un petit calcul explicite)
Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

Pour $k \in [\![0, n]\!]$ on note $\varphi_k \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ définie par $\varphi_k : t \mapsto t^k e^{\alpha t}$.
1. Déterminer la dimension de $E = \mathrm{Vect}\Big((\varphi_k)_{0\leq k\leq n}\Big)$.
2. Montrer que $D \in \mathcal{L}(E)$ définie par $D : f \mapsto f'$ est bien définie.
3. Écrire la matrice de D dans la base $(\varphi_0, ..., \varphi_n)$.
4. Déterminer l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $D - \lambda \mathrm{Id}_E \notin \mathrm{GL}(E)$.

Indication p. 617

Exercice 46 (◔☆ Matrice de la multiplication matricielle à gauche)
Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{K})$. Soit $\varphi_A \in \mathcal{L}(\mathrm{M}_2(\mathbb{K}))$ défini par

$$\begin{aligned} \varphi_A : \mathrm{M}_2(\mathbb{K}) &\to \mathrm{M}_2(\mathbb{K}) \\ M &\mapsto AM. \end{aligned}$$

Soit $\mathcal{B} = (E_{11}, E_{21}, E_{12}, E_{22})$ la base canonique de $\mathrm{M}_2(\mathbb{K})$.

Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi_A)$.

Proposer une généralisation.

Indication p. 617

Exercice 47 (◔☆ Rang de la multiplication à gauche)
Soient n, p, q des entiers.

Soit $A \in \mathrm{M}_{np}(\mathbb{K})$. Exprimer en fonction de $\mathrm{rg}(A)$ le rang de

$$\begin{aligned} \mathrm{M}_{pq}(\mathbb{K}) &\to \mathrm{M}_{nq}(\mathbb{K}) \\ M &\mapsto AM. \end{aligned}$$

Indication p. 617

Exercice 48 (◔☆ Idéaux bilatères de $M_n(\mathbb{K})$)
Soit $\mathcal{I} \subset \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ tel que:
- ▹ $\mathcal{I}$ sous-groupe additif de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$,
- ▹ $\forall X \in \mathcal{I}, \forall A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}), AX \in \mathcal{I}$,
- ▹ $\forall X \in \mathcal{I}, \forall A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}), XA \in \mathcal{I}$.

Montrer que $\mathcal{I} = \left\{0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{K})}\right\}$ ou $\mathcal{I} = \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

Indication p. 618

Exercice 49 (◑☆ Projecteurs et groupe)
Soit $\mathcal{G}$ un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ de cardinal fini.

On pose (au cas où cela serait utile dans la preuve)

$$\Pi = \frac{1}{|\mathcal{G}|} \sum_{M \in \mathcal{G}} M.$$

Montrer que $\sum_{M \in \mathcal{G}} \mathrm{tr}(M) \in \mathbb{N}$ et

$$|\mathcal{G}| \mid \sum_{M \in \mathcal{G}} \mathrm{tr}(M).$$

Indication p. 618

Exercice 50 (◑☆ Un peu de comptage)
Dans cette question on suppose que le corps $\mathbb{K}$ admet un nombre fini $q \in \mathbb{N}^*$ d'éléments.

1. Soit F un sev de $\mathbb{K}^n$ de dimension d. Montrer qu'il y a exactement $q^n - q^d$ vecteurs de $\mathbb{K}^n$ non contenus dans F.
2. En déduire que

$$|\mathrm{GL}_n(K)| = \prod_{k=0}^{n-1} \left(q^n - q^k\right).$$

Indication p. 618

Exercice 51 (◑☆ Coefficient et similitude)
Soit $n \geq 2$.

1. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que A n'est pas une homothétie. Montrer que pour tout $\beta \in \mathbb{K}^*$ et pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $i \neq j$ il existe B une matrice semblable à A telle que $(B)_{ij} = \beta$.
2. Que dire dans le cas $i = j$?

Indication p. 618

Ouvertures

Les résultats et méthodes de ces exercices seront revus et améliorés en deuxième année.

Exercice 52 (◑★ Début de trigonasibilité des matrices complexes)
Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{C}_{n^2}[X]$ non nul tel que $P(A) = 0$.
2. On rappelle que tout polynôme complexe non nul peut s'écrire comme un produit de la forme $\prod_{k=1}^{r} (X - \lambda_k)^{m_k}$ (où les $(\lambda_k)_{1\leq k\leq r} \in \mathbb{C}^r$ et $(m_k)_{1\leq k\leq r} \in (\mathbb{N}^*)^r$).

   Montrer que A est semblable à une matrice de la forme

$$\left(\begin{array}{c|ccc} \lambda & * & * & * \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

   où $\lambda \in \mathbb{C}$ et $B \in \mathrm{M}_{n-1}(\mathbb{C})$.
3. Commenter.

Indication p. 618

Exercice 53 (◑★ Mini lemme des noyaux et diagonasibilité)
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ distincts.

On suppose que

$$(u - \lambda \operatorname{Id}_E) \circ (u - \mu \operatorname{Id}_E) = 0_E.$$

Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle u est une matrice diagonale dont tous les coefficients diagonaux sont dans $\{\lambda, \mu\}$.

Indication p. 618

Exercice 54 (◔☆ Liberté de vecteurs propres)
Soient $u \in \mathcal{L}(E)$, $\lambda_1, ..., \lambda_d \in \mathbb{K}^d$ deux à deux distincts et $x_1, ..., x_d \in E^d \setminus \{0_E\}$ des vecteurs non nuls.

On suppose que pour tout $k \in [\![1, d]\!]$, $u(x_k) = \lambda_k x_k$.

Montrer que la famille $(x_1, ..., x_d)$ est libre.

Indication p. 618

Indications

Indication 1 · Énoncé p. 594 (Classes de similitudes des homothéties)
L'écrire. On obtient λI_n est tout seul dans sa classe de similitude.

Indication 2 · Énoncé p. 594 (Rang et petit bloc)
Par exemple commencer par faire un pivot de pivot α.

Indication 3 · Énoncé p. 594 (Matrices de rang 1 (ligne/colonne))
Il y a au moins une méthode par définition du rang !

- ▷ En tant que rang des colonnes, avec $L = \begin{pmatrix} \ell_1 & \cdots & \ell_q \end{pmatrix}$ et C une colonne on a CL la matrice de colonnes $(\ell_1 C | \cdots | \ell_q C)$.
- ▷ En tant que rang des lignes avec $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_p \end{pmatrix}$ et L une ligne on a CL la matrice de lignes $\begin{pmatrix} c_1 L \\ \hline \vdots \\ \hline c_p L \end{pmatrix}$.
- ▷ En tant que rang d'une application linéaire si A est de rang A prendre C tq $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Vect}(C)$ et $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Ker}(L)$ et conclure.

Indication 4 · Énoncé p. 595 (Matrices de rang 1 (similitudes/trace))
Soit $x \in E$ tel que $\mathrm{Vect}(x) \oplus \mathrm{Ker}(u) = E$ (pourquoi existe-t-il ?). Écrire dans une base adaptée en distinguant les cas $u(x) \neq 0_E$ de $u(x) = 0_E$.

Indication 5 · Énoncé p. 595 (Trace d'un projecteur/d'une symétrie)
Écrire la matrice dans une base adaptée à $F \oplus S = E$.

Indication 6 · Énoncé p. 595 (Le rang ne dépend pas du corps)
Se convaincre que cela est par exemple issu du pivot de Gauss.

Rédiger par équivalence à J_r.

Indication 7 · Énoncé p. 596 (Un théorème de représentation)
Commencer par l'unicité, puis en déduire l'existence.

Plus précisément il y a au moins deux méthodes:

- ▷ Par **analyse-synthèse**. Pour l'analyse si A convient en évaluant en les matrices élémentaires on obtient pour tout i, j, $(A)_{ij} = \varphi(E_{ij})$. Faire ensuite la synthèse.
- ▷ Par **dualité et dimension**. Considérer $\Xi \in \mathcal{L}\big(\mathrm{M}_{p,q}(\mathbb{K}), \mathrm{M}_n(\mathbb{K})^*\big)$ définie par $\Xi : A \mapsto (M \mapsto \mathrm{tr}(A^\top M))$. Alors Ξ est injective car pour tout $A \in \mathrm{Ker}(\Xi)$, $\mathrm{tr}(A^\top A) = 0$ donc $A = 0$. Et par dimension Ξ est donc surjective.

Indication 8 · Énoncé p. 596 (Nilpotent d'ordre maximal)

1. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'ordre $n-1$. Montrer que $(x, u(x), ..., u^{n-1}(x))$ est un base de E.
2. La similitude est un relation d'équivalence.
3. Regarder par exemple deux blocs diagonaux 2×2.

Indication 9 · Énoncé p. 596 (Sous-algèbre et inverses)

1. Par exemple les matrices triangulaires supérieures, inférieures, triangulaires supérieures strictes, inférieures strictes. Ou encore les matrices diagonales.

   Ou bien étant donnée une structure de blocs, les matrices triangulaires supérieures (reps. inférieures, resp. strict), diagonales, etc. par blocs.

2. Étant donné $P \in \mathcal{A}$ inversible considérer l'application $M \mapsto PM$. Elle est injective par inversibilité de P et donc bijective par dimension. Il suffit ensuite de regarder l'antécédent de I_n.

$\mathcal{A} \to \mathcal{A}$

Indication 10 · Énoncé p. 597 (Matrice d'une structure complexe)
Prendre x non nul, montrer que $(x, u(x))$ est une base.

Indication 11 · Énoncé p. 597 (Classes de similitude dans $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$)
Pour l'existence remarquer que $A^2 - \mathrm{tr}(A)A + \det(A)I_2 = 0_2$.

Distinguer selon le nombre de racines de $X^2 - \mathrm{tr}(A)X + 1$.

- ▷ Pour une racine double, on a $\mathrm{Ker}\left((A - \lambda I_2)^2\right) = \mathbb{C}^2$, et distinguer sur $\dim(\mathrm{Ker}((A - \lambda)))$.
- ▷ Pour de racines distinctes, montrer que $\mathrm{Ker}(A - \lambda I_2) \oplus \mathrm{Ker}(A - \mu I_2) = \mathbb{C}^2$.

Pour l'unicité considérer les $\mathrm{rg}(A - tI_2)$.

Indication 12 · Énoncé p. 597 (Trace de la transposée)
Au choix: l'écrire dans une base et faire le calcul. Ou bien remarquer que T est la symétrie par rapport à $S_n(\mathbb{K})$ parallèlement à $A_n(\mathbb{K})$.

Indication 13 · Énoncé p. 597 (Similitude et corps, cas 2×2)
Pour le sens $\Rightarrow$ avec $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ tq $A = P^{-1}AP$, montrer qu'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{Re}(P) + t\,\mathrm{Im}(P) \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$.

Pour cela considérer la fonction polynomiale $t \mapsto \det(\mathrm{Re}(P) + t\,\mathrm{Im}(P))$.

Indication 14 · Énoncé p. 598 (Matrice d'Attila)
On pourra commencer par remarquer que $\mathrm{rg}(J) = 1$ et utiliser ensuite l'un des nombreux exercices sur les matrices de rang 1.

Ou bien déterminer une base adaptée à partir de la base canonique (par exemple $\left(\sum_{i=1}^n e_i, e_1 - e_2, e_1 - e_3, ..., e_1 - e_n\right)$).

Indication 15 · Énoncé p. 598 (Des Huns camouflés)
Posons $J = M_{1,1}$. Alors $M_{\alpha,\beta} = \beta J + (\alpha - \beta)I_n$.

Et J est semblable à une matrice simple (cf 14).

Indication 16 · Énoncé p. 598 (Rang par blocs)
Par exemple procéder par blocs.

Effectuer une « transvection par blocs » sur les colonnes par blocs en multipliant à gauche par

$$\left(\begin{array}{c|c} I_p & D \\ \hline 0 & I_q \end{array}\right)$$

et montrer que la condition $\mathrm{Im}(B) \subset \mathrm{Im}(A)$ permet d'annuler le bloc sur-diagonal.

Utiliser ensuite la caractérisation du rang par équivalence.

Indication 17 · Énoncé p. 599 (Un seul bloc inversible)
L'implication (et même équivalence) entre (i) et (ii) a déjà été traitée. (Par exemple travailler sur $\mathrm{Ker}(A) \cap \mathrm{Im}(A)$ et conclure par dimension).

L'implication de (ii) vers (iii) se traite en choisissant une base adaptée à $\mathrm{Im}(A) \oplus \mathrm{Ker}(A) = \mathbb{K}^n$.

L'implication (iii) vers (ii) est un calcul.

Indication 18 · Énoncé p. 599 (Tout hyperplan contient une matrice inversible)
On peut par exemple utiliser l'exercice 7. Alors il existe $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $H = \{M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \mid \mathrm{tr}(A^\top M) = 0\}$. On cherche donc M inversible telle que $\mathrm{tr}(A^\top M) = 0$. Prendre par exemple une matrice d'opération élémentaire bien choisie.

Indication 19 · Énoncé p. 599 (Caractérisation du rang et produit)
- ▷ Le minimum est bien défini car $M = MI_p = I_n M$.
- ▷ Le rang est inférieur au minimum car si $M = AB$, $\mathrm{rg}(M)$ est majoré par les rang de A et B et en particulier par les dimensions de A et B.
- ▷ Il reste à montrer qu'avec $r = \mathrm{rg}(M)$, il existe $(A, B) \in \mathrm{M}_{nr}(\mathbb{K}) \times \mathrm{M}_{rp}(\mathbb{K})$ tq $M = AB$. Il y a alors plusieurs méthodes: rang sur lignes/colonnes, forme géométrique du théorème du rang, etc.

Indication 20 · Énoncé p. 599 (Une autre caractérisation du rang)
Pour le sens direct on peut par exemple se ramener à J_r par équivalence.

De même pour le sens réciproque, ou bien varier et interpréter comme un produit par blocs.

Indication 21 · Énoncé p. 600 (Calcul explicite: périodiques (détaillé))
1. Écrire les définitions.
2. L'injectivité est immédiate, conclure par dimension.
3. Une suite périodique de période p est entièrement définie par ses p premières valeurs. Remarquer que ces p premières valeurs sont les coordonnées dans $\mathcal{C}$.
4. On a $Tc_k = c_{k-1}$ (avec $0 - 1 = p - 1$).
5. Pour la liberté, une relation de liaison $\sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k u_k = 0$ revient, en posant $Q = \sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k X^k$ à $\forall \omega \in \mathbb{U}_p, Q(\omega) = 0$. Compter ensuite le nombre de racines et un majorant du degré. Conclure ensuite par dimension.
6. On a $Tu_k = \omega^k u_k$.

7. Peut très bien se faire sans les questions précédentes (penser matrice compagnon, endomorphismes cycliques, etc.) ou bien juste regarder les matrices obtenues précédemment.

Indication 22 · Énoncé p. 600 (Pivot et similitude: est-ce une bonne idée ?)
Faire le calcul explicitement, et en déduire que le résultat n'était peut être pas celui que vous attendiez.

Indication 23 · Énoncé p. 601 (Nilpotents d'ordre 2)
Interpréter $u^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$ géométriquement par $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(u)$.

Soit S un supplémentaire du noyau, avec $(s_1, ..., s_r)$ une base de S, remarquer que $(u(s_1), ..., u(s_r))$ est une base de $\mathrm{Im}(u)$ que l'on peut compléter en une base de $\mathrm{Ker}(u)$.

Indication 24 · Énoncé p. 601 (Encore Vandermonde et Lagrange)

1. Par dimension cela revient à calculer le noyau. Ce noyau est $\{P \in \mathbb{K}_n[X] \mid \forall k \in [\![0, n]\!], P(x_k) = 0\}$. Si les x_k tous distincts compter le nombre de racines et un majorant du degré. Si par exemple $x_1 = x_2$, que dire de $(X - x_1)(X - x_3)(X - x_4)\cdots(X - x_n)$.

2. Écrire la matrice de eval_x dans les bases canoniques respectives de $\mathbb{K}_n[X]$ et $\mathbb{K}^{n+1}$.

3. Soit r le nombre de valeurs distinctes, quitte à réordonner $(x_1, ..., x_r)$ deux à deux distincts.

- ▷ Juste regarder les lignes (ou les colonnes) !
- ▷ Par pivot malin et récurrence sur les matrices de Vandermonde tout échelonner…
- ▷ Le rang est majoré par r et par le cas inversible montrer qu'il existe une sous-matrice inversible de taille r.
- ▷ Le noyau $\mathrm{Ker}(\mathrm{eval}_x)$ est l'intersection des hyperplans $\mathrm{Ker}(P \mapsto P(x_k))$ et le rang de ces formes linéaires est r.
- ▷ Le noyau de $\mathrm{Ker}(\mathrm{eval}_x)$ est (factorisation par racines) $\{(X - x_1)(X - x_2)\cdots(X - x_r)Q(X), Q \in \mathbb{K}_{n-r}[X]\}$.
- ▷ L'image de eval_x est de dimension $\leq r$. Par interpolation l'image est de dimension $\geq r$.

Indication 25 · Énoncé p. 602 (Inversible et projecteur)
Utilise une forme du théorème du rang.

Par exemple la forme géométrique, ou bien $A = UV^{-1}J_rV$.

Indication 26 · Énoncé p. 602 (Formes linéaires invariantes par similitudes)
On pourra par exemple montrer que pour tous i et j, $E_{ii} \sim E_{jj}$ et $E_{ij} \sim -E_{ij}$.

Indication 27 · Énoncé p. 602 (Un bloc maximal)

1. Une inclusion est immédiate. Conclure par dimension.

2. Cela revient à montrer qu'il existe X tel que $M\begin{pmatrix} X \\ 0 \end{pmatrix} = M\begin{pmatrix} 0 \\ -Y \end{pmatrix}$. Pour l'expression explicite et l'expression remarquer que l'on obtient par calcul par blocs, $AX + BY = 0$ (et $CX + DY = 0$) et que A est inversible.

3. Montrer que pour tout Y, $DY = CA^{-1}BY$. Pour cela prendre le X précédent et écrire la seconde équation par bloc, $CX + DY = 0$.

Indication 28 · Énoncé p. 603 (Retour sur les matrices de Pascal)

1. Considérer l'endomorphisme de $\tau_\alpha \in \mathbb{K}_n[\mathcal{X}]$ défini par $\tau_\alpha : P \mapsto P(X+\alpha)$ et sa matrice dans la base canonique.

2. En particulier $T_n(1)^{-1} = T_n(-1)$.

Indication 29 · Énoncé p. 603 (Matrices semblables à leur carré)
Être semblable à son carré est stable par similitude. Par l'exercice 11 se ramener à un nombre fini de cas à traiter.

On obtient les classes de similitude de $\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}j&0\\0&j^2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$.

Indication 30 · Énoncé p. 603 (Triangulaires et drapeaux)

1. Par exemple le drapeau complet $(\mathbb{K}_k[X])_{k\in[\![0,n]\!]}$, ou bien avec $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent, le drapeau $\left(\mathrm{Ker}\left(u^k\right)\right)_{0\leq k\leq d}$.

2. Si la matrice dans $(e_1, ..., e_n)$ est triangulaire supérieure, considérer les $(\mathrm{Vect}(e_1, ..., e_k))_{0\leq k\leq n}$.

Dans l'autre sens prendre une base adaptée au drapeau, c'est à dire telle que pour tout k, $(e_1, ..., e_k)$ est une base de F_k (pourquoi est-ce possible ?)

3. L'intérêt est ici d'utiliser des drapeaux pour formaliser la preuve.

Indication 31 · Énoncé p. 604 (Équations matricelles avec trace)

1. **1.1.** On rappelle que les matrices antisymétriques sont en particulier de coefficients diagonaux nuls.

1.2. Si X est un solution non antisymétrique alors $\mathrm{tr}(X)A \neq 0_n$. En prenant la trace obtenir $2\,\mathrm{tr}(X) = \mathrm{tr}(X)\,\mathrm{tr}(A)$ et en prenant la transposée $\mathrm{tr}(X)A = \mathrm{tr}(X)A^\top$.

1.3. Commencer par l'inclusion et le caractère direct de la somme. Utiliser ensuite une analyse-synthèse (ou une CL bien choisie).

2. Commencer par remarquer que pour déterminer X il suffit de déterminer $\mathrm{tr}(X)$.

2.1. Soit X une solution. Prendre la trace de l'équation. Vérifier que c'est bien une solution.

2.2. L'inclusion $\subset$ est toujours vraie. Vérifier que l'inclusion $\supset$ est bien vérifiée.

Indication 32 · Énoncé p. 604 (Puissances d'une matrice de rang 1)
On pourra commencer par traiter les exercices 3 ou 4.

Indication 33 · Énoncé p. 604 (Une inégalité de Sylvester sur le rang)
Écrire votre forme préférée du théorème du rang (par exemple $\mathrm{rg}(AB) = \mathrm{rg}\left(A_{|B}\right) = \mathrm{rg}(B) - \dim(\mathrm{Ker}(A) \cap \mathrm{Im}(B))$ et $\dim(\mathrm{Ker}(A)) = p - \mathrm{rg}(A)$).

On pourra regarder aussi l'exercice 34 qui est une généralisation de ce résultat.

Indication 34 · Énoncé p. 605 (Une inégalité de Frobenius sur le rang)
On pourra commencer par regarder l'exercice 33 qui est un cas particulier.

Écrire la formule du rang appliquée à $A_{|\mathrm{Im}(B)}$ et $A_{|\mathrm{Im}(BC)}$.

Alternativement (pourquoi est-ce en fait la même méthode ?), prendre S un supplémentaire de $\mathrm{Im}(BC)$ dans $\mathrm{Im}(B)$ et montrer que $\mathrm{Im}\left(A_{|S}\right) + \mathrm{Im}\left(A_{|BC}\right) = \mathrm{Im}(AB)$.

Ou encore (pourquoi est-ce en fait la même méthode ?) se ramener à des matrices de la forme $Q^{-1}J_rP$ et faire plein de calculs par blocs…

Indication 35 · Énoncé p. 605 (Arithmético-géométrique)
Faire de même que pour les suites réelles.

Indication 36 · Énoncé p. 605 (Modifier la diagonale)

1. Si pour tout X, (X, AX) liée alors A est une homothétie.
2. Compléter (X, AX) en une base.
3. Faire une récurrence.

   Pour l'hérédité, avec A semblable à $\left(\begin{array}{c|c} 0 & * \\ \hline * & \tilde{A} \end{array}\right)$ si $\tilde{A}$ n'est une homothétie considérer une matrice P de la forme $\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & \tilde{P} \end{array}\right)$. Si c'est une homothétie nulle il n'y a plus rien à faire, et si c'est une homothétie non nulle se ramener au cas général par une transvection.

Solution p. 619

Indication 37 · Énoncé p. 605 (Commutateurs et trace nulle)
Le sens $\subset$ est rapide.

Pour le sens réciproque, se ramener, par exemple en utilisant l'exercice 36, au cas de la diagonale nulle.

Pour le cas de diagonale nulle, prendre A diagonale, B quelconque et écrire $AB - BA$.

Solution p. 621

Indication 38 · Énoncé p. 606 (Espace engendré par les matrices inversibles)
Il suffit d'écrire les E_{ij} comme CL de matrices inversibles.

Pour $i \neq j$, que dire de la transvection $I_n + E_{ij}$? Pour $i = j$ que dire de $P_\tau + E_{ii}$ où τ est une transposition telle que $\tau(i) \neq i$?

Indication 39 · Énoncé p. 606 (Des inversibles dans toutes les directions !)

1. Il s'agit ici d'équivalence. Donc rang.
2. Traiter le cas triangulaire supérieur.

Indication 40 · Énoncé p. 606 (Un terme au milieu)
Par exemple en terme d'endomorphismes, avec $x \in \mathrm{Im}(B)$ non nul et $y \notin \mathrm{Ker}(A)$, construire C tq $y = Cx$ puis compléter.

Indication 41 · Énoncé p. 606 (Encore un terme au milieu)
On peut par équivalence se ramener au cas ou $A = J_{\mathrm{rg}(A)}$ et $B = J_{\mathrm{rg}(B)}$ et interpréter par blocs.

Alternativement (et de manière équivalente) constater qu'une CNS d'appartenance de M à l'ensemble est $\mathrm{Im}\left(M_{\mathrm{Im}(B)}\right) \subset \mathrm{Ker}(A)$.

Indication 42 · Énoncé p. 606 (Un peu comme le rang)
- ▷ On constate que les fonctions $f = F \circ \mathrm{rg}$ avec $F :: [\![0, n]\!] \to [\![0, n]\!]$ croissante conviennent.
- ▷ Remarquer que $f(I_n) = \max_{\mathrm{M}_n(\mathbb{K})}(f)$, puis en montrer que pour tout $A \in \mathrm{GL}_n(K)$, $f(A) = \max_{\mathrm{M}_n(\mathbb{K})}(f)$.
- ▷ Montrer que multiplier par une matrice fait diminuer f, et donc par symétrie conserve f.
- ▷ Montrer que si A et B sont équivalentes alors $f(A) = f(B)$ et en déduire qu'il existe F tq $f = F \circ \mathrm{rg}$.
- ▷ Pour la monotonie, remarquer que $J_r J_{r+1} = J_r$.

Indication 43 · Énoncé p. 607 (Un calcul avec des rangs et projections)
1. Le rang est au moins 2 par le produit, et donc exactement 2 par les tailles.
2. On a $(AB)^2 = AB$ donc $A(BA - I_2)B = 0_3$. Calculer ensuite les possibilités pour le rang de $BA - I_2$.

Indication 44 · Énoncé p. 607 (Minicalcul)
Utiliser les formules d'addition pour montrer que le rang est inférieur à 2. Montrer que le rang est 2.

Indication 45 · Énoncé p. 607 (Un petit calcul explicite)
1. Montrer que la famille est libre en remarquant qu'une relation de liaison $\sum_{k=0}^{n} \varphi_k = 0$ peut s'interpréter comme $\forall t \in \mathbb{R}, P(t)e^{\alpha t} = 0$ pour $P = \sum_{k=0}^{n} X^k$.
2. La linéarité est immédiate, pour montrer que E stable par D remarquer que $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(P(t)e^{\alpha t}) = (\alpha P(t) + P'(t))e^{\alpha t}$
3. Le calcul précédent montrer que $D(\varphi_k) = \alpha\varphi_k + k\varphi_{k-1}$ pour $k \geq 1$.
4. Remarquer que $D - \lambda\,\mathrm{Id}$ admet une matrice triangulaire dans la base précédente.

Indication 46 · Énoncé p. 607 (Matrice de la multiplication matricielle à gauche)
Aucun piège, il faut juste calculer les AE_{ij} puis prendre les coordonnées.

Indication 47 · Énoncé p. 608 (Rang de la multiplication à gauche)
Par exemple le noyau est l'ensemble des matrices M telles que $\mathrm{Im}(M) \subset \mathrm{Ker}(A)$, qui est isomorphe à $\mathcal{L}(\mathbb{K}^q, \mathrm{Ker}(A))$.

Ou bien en s'inspirant de l'exercice 46, écrire la matrice de l'application dans la base canonique bien ordonnée et conclure par rang par bloc.

Indication 48 · Énoncé p. 608 (Idéaux bilatères de $M_n(\mathbb{K})$)
Remarquer que $\mathcal{I}$ est en particulier stable par équivalence.

Montrer que si on a un J_r non nul alors on a J_1 puis conclure.

Indication 49 · Énoncé p. 608 (Projecteurs et groupe)
Montrer que Π est un projecteur et en déduire que sa trace est entière.

Indication 50 · Énoncé p. 609 (Un peu de comptage)

1. Un sev de dimension d admet q^d vecteurs.
2. Pour construire successivement les colonnes d'une matrice inversible, il faut et suffit qu'à chaque étape la colonne suivante soit non contenue dans le Vect des colonnes précédentes.

Indication 51 · Énoncé p. 609 (Coefficient et similitude)

1. Montrer qu'il existe x tq $(x, u(x))$ est libre et compléter en une base. Cela permet de traiter $(i, j) = (1, 2)$ et $\beta = 1$. Le cas général s'y ramène.
2. Commencer par regarder le cas de la dimension 2.

Indication 52 · Énoncé p. 609 (Début de trigonasibilité des matrices complexes)

1. Cela revient à montrer qu'il existe une relation de liaison non triviale pour la famille $\left(I_n, A, A^2, ..., A^{n^2}\right)$. Compter le nombre de vecteurs.
2. Avec $P = \prod_{k=1}^{r} (X - \lambda_k)^{m_k}$ on obtient alors $\prod_{k=1}^{r} (A - \lambda_k I_n)^{m_k} = 0_n$. Donc au moins un des $A - \lambda_k I_n$ est non inversible (car un produit de matrices inversibles est inversible et en particulier non nul). Fixons un tel λ Avec $x \in \mathrm{Ker}(A - \lambda I_n)$ non nul toute base adaptée à $\mathrm{Vect}(x) \subset \mathbb{K}^n$ convient.
3. Beaucoup de commentaires à faire ! Sans viser l'exhaustivité:
   - ▷ Par récurrence on peut alors montrer que toute matrice complexe est semblable à une matrice triangulaire.
   - ▷ Ce résultat est faux dans $\mathbb{R}$, ainsi $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ n'est semblable à aucune matrice triangulaire.
   - ▷ Ce n'est que le début de la *réduction des endomorphismes* !

Indication 53 · Énoncé p. 610 (Mini lemme des noyaux et diagonasibilité)
Commencer par montrer que

$$\mathrm{Ker}(u - \lambda \,\mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(u - \mu \,\mathrm{Id}_E) = E$$

puis prendre une base adaptée à cette somme directe.

Indication 54 · Énoncé p. 610 (Liberté de vecteurs propres)
Écrire une relation de liaison. Appliquer u un certain nombre de fois, faire des combinaisons linéaires et remarquer l'apparition de Vandermonde/Lagrange.

Solutions

Solution pour l'exercice 36 · Énoncé p. 605 · Indication p. 616 (Modifier la diagonale)

1. Il s'agit d'un exercice classique.

Supposons par l'absurde que pour tout $X \in \mathbb{K}^n$, (X, AX) est liée. Par conséquent pour tout $X \in \mathbb{K}^n \setminus \{0_{\mathbb{K}^n}\}$ il existe $\lambda_X \in \mathbb{K}$ tel que $AX = \lambda_X X$ (car $X \neq 0_{\mathbb{K}^n}$).

Soit $X, Y \in \mathbb{K}^n \setminus \{0_{\mathbb{K}^n}\}$. Procédons par disjonction de cas pour montrer que $\lambda_X = \lambda_Y$.

- Si X, Y est liée alors (comme $Y \neq 0_{\mathbb{K}^n}$) il existe $\mu \in \mathbb{K}$ tel que $X = \mu Y$. Comme $X \neq 0_{\mathbb{K}^n}$ on a $\mu \neq 0$.

  On a alors
  $$AX = A(\mu Y) = \mu AY = \mu\lambda_Y Y$$
  ainsi que
  $$AX = \lambda_X X = \lambda_X \mu Y.$$
  Comme $Y \neq 0_{\mathbb{K}^n}$, on en déduit que $\mu\lambda_X = \mu\lambda_Y$.

  Et comme $\mu \neq 0$ on a bien
  $$\lambda_X = \lambda_Y.$$
- Si X, Y est libre alors
  $$A(X+Y) = (\lambda_{X+Y})(X+Y)$$
  et aussi
  $$A(X+Y) = AX + AY = \lambda_X X + \lambda_Y Y.$$
  Par conséquent
  $$(\lambda_{X+Y} - \lambda_X)X + (\lambda_{X+Y} - \lambda_Y)Y = 0_{\mathbb{K}^n}$$
  et donc par liberté
  $$\lambda_X = \lambda_{X+Y} = \lambda_Y.$$

Dans tous les cas $\lambda_X = \lambda_Y$.

Ainsi, il existe donc $\lambda \in \mathbb{K}$ (indépendant de X) tel que pour tout $X \in \mathbb{K}^n \setminus \{0_{\mathbb{K}^n}\}$, $AX = \lambda X$. Comme on a aussi $A0_{\mathbb{K}^n} = 0_{\mathbb{K}^n}$ on en déduit $A = \lambda I_n$.

D'où A est une homothétie, ce qui est absurde.

On a donc bien montré qu'il $\boxed{\text{existe } X \in \mathbb{K}^n \text{ tel que } (X, AX) \text{ est libre}}$.

2. Soit
$$\begin{aligned} u : \mathbb{K}^n &\to \mathbb{K}^n \\ X &\mapsto AX \end{aligned}$$
l'application linéaire canoniquement associée à A.

Par la question précédent il existe $X_1 \in \mathbb{K}^n$ tel que (X_1, AX_1) est libre. Par le théorème de la base incomplète on peut compléter cette famille libre en une base de $\mathbb{K}^n$, $\mathcal{B}(X_1, AX_1, X_3, ..., X_n)$.

Comme $u(X_1) = AX_1 = 0X_1 + 1AX_1 + \sum_{k=2}^{n} 0X_k$, on en déduit que la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ est

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & * & * & \cdots & * \\ 1 & * & * & \cdots & * \\ 0 & * & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & * & * & \cdots & * \end{pmatrix}.$$

Et comme A est semblable à cette matrice (matrices du même endomorphismes dans des bases), on en déduit en particulier que $\boxed{A \text{ est semblable à une matrice de première colonne } E_2}$.

3. On procède par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons $\mathcal{P}_n$: toute matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ qui n'est pas une homothétie est semblable à une matrice dont tous les coefficients diagonaux sont nuls sauf le dernier qui est $\mathrm{tr}(A)$.

▷ **Initialisation**

Soit $(a) \in \mathrm{M}_1(\mathbb{K})$ on a $(a) \sim (a)$ et $a = \mathrm{tr}((a))$.

▷ **Hérédité**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons $\mathcal{P}_n$.

Soit $A \in \mathrm{M}_{n+1}(\mathbb{K})$ qui n'est pas une homothétie.

Par la question précédente on sait que A est semblable à une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & * & * & * \\ 1 & & & \\ \vdots & & \tilde{A} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

où $\tilde{A} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

On procède par disjonction de cas.

▷ Si $\tilde{A}$ n'est pas une homothétie.

Alors par $\mathcal{P}_n$ il existe $\tilde{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ tel que

$$\tilde{P}^{-1}\tilde{A}\tilde{P} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & * & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ * & \cdots & 0 & * \\ * & \cdots & * & \mathrm{tr}\left(\tilde{A}\right) \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{K}).$$

En posant

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{P} \end{pmatrix}$$

on a, comme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{P} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{P}^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} = I_{n+1}$$

que $P \in \mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{K})$ et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{P}^{-1} \end{pmatrix}$.

D'où par produit par blocs

$$P^{-1}\begin{pmatrix} 0 & * \\ * & \tilde{A} \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} 0 & * & \cdots & * & * \\ * & 0 & \cdots & * & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ * & * & \cdots & 0 & * \\ * & * & \cdots & * & \mathrm{tr}\left(\tilde{A}\right) \end{pmatrix}.$$

on a donc A semblable à cette matrice, et comme la trace est un invariant de similitude, en prenant a posteriori la trace on a bien $\mathrm{tr}\left(\tilde{A}\right) = \mathrm{tr}(A)$.

▷ Si $\tilde{A}$ est une homothétie.

On a donc A semblable à une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & * & \cdots & * \\ 1 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix}$$

.

Si $n+1 = 2$ alors on a bien A semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} 0 & * \\ * & \lambda \end{pmatrix}$ et a posteriori, la trace étant un invariant de similitude, $\lambda = \mathrm{tr}(A)$.

Si $n+1 \geq 3$, alors avec $P = I_n + E_{13}$ on a P inversible et $P^{-1} = I_n - E_{13}$ (matrice de transvection).

De plus on a le produit matriciel [à détailler si nécessaire]

$$(I_n + E_{13})\begin{pmatrix} 0 & * & * & \cdots & * \\ 1 & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix}(I_n - E_{13}) = \begin{pmatrix} 0 & * & * & \cdots & * \\ 1 & \lambda & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix}.$$

Et donc on se ramène au cas où $\tilde{A}$ n'est pas une homothétie.

▷ **Conclusion** Par récurrence on a donc bien montré que toute matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ est semblable à une matrice de la forme

$$\boxed{\begin{pmatrix} 0 & \cdots & * & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ * & \cdots & 0 & * \\ * & \cdots & * & \mathrm{tr}(A) \end{pmatrix}}$$

Solution pour l'exercice 37 · Énoncé p. 605 · Indication p. 616 (Commutateurs et trace nulle)
Notons $\Gamma = \left\{AB - BA, (A,B) \in \left(\mathrm{M}_n(\mathbb{K})\right)^2\right\} \subset \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

On constate tout d'abord que pour tous $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, on a $\mathrm{tr}(AB - BA) = \mathrm{tr}(AB) - \mathrm{tr}(BA) = 0$ d'où l'inclusion $\boxed{\subset}$.

On s'intéresse désormais à l'autre inclusion.

Soient $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, on constate que pour toute matrice $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ on

$$P(AB - BA)P^{-1} = (PAP^{-1})(PBP^{-1}) - (PBP^{-1})(PAP^{-1}).$$

Ainsi pour tout $M \in \Gamma$, pour tout $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, $PMP^{-1} \in \Gamma$, c'est à dire que l'appartenance à Γ est un invariant de similitude.

Soit $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $\mathrm{tr}(M) = 0$. Par ce qu'on vient de constater il suffit de montrer qu'il existe une matrice semblable à M qui est dans Γ.

On commence par traiter l'exercice 36.

Il existe alors une matrice $\widetilde{M}$ de diagonale nulle semblable à M.

Soit $B = \left(b_{i,j}\right)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice quelconque et $\Lambda = \mathrm{Diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice diagonale telle que pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\lambda_i \neq \lambda_j$.

On a alors

$$\begin{aligned} B\Lambda - \Lambda B &= \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1 b_{11} & \lambda_2 b_{12} & \cdots & \lambda_n b_{1n} \\ \lambda_1 b_{21} & \lambda_2 b_{22} & \cdots & \lambda_n b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1 b_{n1} & \lambda_2 b_{n2} & \cdots & \lambda_n b_{nn} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda_1 b_{11} & \lambda_1 b_{12} & \cdots & \lambda_1 b_{1n} \\ \lambda_2 b_{21} & \lambda_2 b_{22} & \cdots & \lambda_2 b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_n b_{n1} & \lambda_n b_{n2} & \cdots & \lambda_n b_{nn} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & (\lambda_2 - \lambda_1) b_{12} & \cdots & (\lambda_n - \lambda_1) b_{1n} \\ (\lambda_1 - \lambda_2) b_{21} & 0 & \cdots & (\lambda_n - \lambda_2) b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\lambda_1 - \lambda_n) b_{n1} & (\lambda_2 - \lambda_n) b_{n2} & \cdots & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et donc en prenant $\lambda_1, ..., \lambda_n$ n scalaires distincts (ce qui est possible car $\mathbb{K}$ est infini) et en posant pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ si $i \neq j$, $b_{i,j} = \frac{m_{i,j}}{\lambda_j - \lambda_i}$ et par exemple $b_{i,i} = 0$, on a bien $\boxed{\widetilde{M} = B\Lambda - \Lambda B \in \Gamma}$.

D'où l'inclusion $\boxed{\supset}$.

Chapitre 18

Polynômes

Énoncés 624
Polynômes 624
Thème: Fonctions polynomiales réelles 635
Thème: Équations fonctionnelles polynomiales 639
Thème: Fonctions polynomiales complexes 641
Thème: Polynômes et arithmétique de $\mathbb{Z}$ 642
Indications 645
Solutions 657

Énoncés

Dans toute la feuille du TD, sauf mention du contraire, $\mathbb{K}$ est un corps de caractéristique nulle (c'est à dire tel que $\forall n \in \mathbb{N}^*, n \cdot 1 \neq 0$).

Polynômes

Exercice 1 (◔★♣ Racines et conjugués)
Soit $P \in \mathbb{R}[X] \subset \mathbb{C}[X]$.

Montrer que si $\alpha \in \mathbb{C}$ est une racine de P alors $\overline{\alpha}$ est une racine de P.

Indication p. 645

Exercice 2 (◔★♠ Parité et polynômes)
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. On dit que P est pair ssi $P(-X) = P(X)$, et on dit que P est impair ssi $P(-X) = -P(X)$.

1. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes
   (i) $P(-X) = P(X)$
   (ii) tous les coefficients d'ordre impair de P sont nuls
   (iii) il existe un polynôme Q tel que $P(X) = Q(X^2)$.

   Énoncer et démontrer un résultat similaire pour les polynômes impairs.
2. Soit P un polynôme pair (resp. impair). Montrer que P' est impair (resp. pair).
3. Montrer que l'ensemble des polynômes pairs et l'ensemble des polynômes impairs sont des sevs de $\mathbb{K}[X]$ supplémentaires.

Indication p. 645 · Solution p. 657

Exercice 3 (◔★♣ Degré d'une composée)
Soit $P, Q \in \mathbb{K}[X]$.

- ▷ Montrer que si Q est non constant, alors $\deg(P \circ Q) = \deg(P) \times \deg(Q)$.
- ▷ Que dire de $\deg(P \circ Q)$ si Q est constant ?

Indication p. 645

Exercice 4 (◔★♠ S'est échappé d'un TD précédent)
Montrer que

1. Tout polynôme réel impair admet au moins une racine réelle.
2. Si un polynôme réel est scindé à racines simples alors sa dérivée est scindée à racine simple.
3. Si un polynôme réel est scindé alors sa dérivée est scindée.

Indication p. 645

Exercice 5 (◔★♣ Calculs de reste)
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.

1. Soit $\alpha \in \mathbb{K}$. Déterminer le reste de la division euclidienne de P par $X - \alpha$.
2. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ distincts. Déterminer le reste de la division euclidienne de P par $(X - \alpha)(X - \beta)$.
3. Soient $\alpha \in \mathbb{K}$. Déterminer le reste de la division euclidienne de P par $(X - \alpha)^2$.

Indication p. 645 · Solution p. 660

Exercice 6 (◔★♠ Polynômes à coefficients dans un anneau)
Soit A un sous-anneau de $\mathbb{K}$.

On note $A[X]$ l'ensemble des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ dont tous les coefficients sont dans A.

1. Montrer que $A[X]$ est un sous-anneau de $\mathbb{K}[X]$. Déterminer $(A[X])^\times$.
2. Soient $S \in A[X]$ et $T \in A[X]$ non nul et de **coefficient dominant inversible** (dans A).

   Montrer qu'il existe un unique couple $(Q, R) \in (A[X])^2$ tel que

   $$S = QT + R$$
   $$\deg(R) < \deg(T).$$

   Ce résultat reste-t-il vrai si on ne suppose plus l'inversibilité du coefficient dominant ?

Indication p. 645

Exercice 7 (◔★ Racines et arithmétique dans les petits degrés)

1. Donner un exemple de polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré 4 n'admettant aucune racine et n'étant pas irréductible.
2. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\deg(P) \in \{2, 3\}$. Montrer que si P n'est pas irréductible ssi P admet une racine.

Indication p. 645

Exercice 8 (◑★ Petites sommes de Newton)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré n.

On note $\lambda_1, ..., \lambda_n$ les racines de P comptées avec multiplicité

On rappelle que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ on note σ_k la k-ième fonction élémentaire des racines

$$\sigma_k = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n} \lambda_{i_1} \lambda_{i_2} \cdots \lambda_{i_k}.$$

1. Rappeler l'expression des fonctions élémentaires des racines en fonction des coefficients de P.

Pour tout $d \in \mathbb{N}$ on note S_d la somme de Newton

$$S_d = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^d.$$

1. Exprimer S_1 et S_2 en fonction de σ_1 et σ_2.
2. Exprimer S_3 en fonction de $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.

Indication p. 646

Exercice 9 (◑★ Systèmes de sommes de Newton)
Déterminer tous les $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{C}^3$ tels que

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 \\ \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1 \\ \lambda_1^3 + \lambda_2^3 + \lambda_3^3 = -5. \end{cases}$$

Indication p. 646

Exercice 10 (◔★♠ Vers les fractions rationnelles: dérivée logarithmique)
Soit $P = \alpha \prod_{k=1}^{r} (X - \lambda_k)^{m_k} \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme scindé.

Montrer que pour tout $z \in \mathbb{K}$ tel que $P(z) \neq 0$ on a

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \sum_{k=1}^{r} \frac{m_k}{z - \lambda_k}.$$

Indication p. 646

Exercice 11 (◔★ Quelques polynômes usuels)
Pour chacun des polynômes suivants déterminer sa factorisation en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$.

1. Pour $\theta \in \mathbb{R}$,

$$X^2 - 2\cos(\theta)X + 1$$

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$X^n + 1$$

3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=0}^{n} X^k$$

Indication p. 646

Exercice 12 (◔★ Polynômes réels et racines complexes)
Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P_z \in \mathbb{R}[X]$ tel que pour tout $Q \in \mathbb{R}[X]$, $Q(z) = 0$ **ssi** $P_z \mid Q$.

Indication p. 646

Exercice 13 (◔★ Nombre de racines distinctes)
Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme non constant.

Montrer que $\deg(P) - \deg(P \wedge P')$ est égal au nombre de racines distinctes de P.

Indication p. 646

Exercice 14 (◔★ Entre Taylor et Lagrange)
Soit $P \in \mathbb{K}_3[X]$.

Exprimer P en fonction de $P(0), P'(0), P(1), P'(1)$.

Indication p. 646

Exercice 15 (◔★♣ Rappels sur les coefficients binomiaux)
On rappelle que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$(1+X)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k.$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer la formule de la capitaine

$$\forall k \in [\![1, n]\!], k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}.$$

3. Soient $p, q \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$ Montrer la formule de Vandermonde

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k}\binom{q}{n-k} = \binom{p+q}{n}.$$

4. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $r \in [\![0, n]\!]$. Montrer la formule des capitaines généralisée

$$\forall k \in [\![r, n]\!], \binom{k}{r}\binom{n}{k} = \binom{n}{r}\binom{n-r}{k-r}.$$

Indication p. 646 · Solution p. 661

Exercice 16 (◔★ Régularité de la composition à droite)
Soient $Q_1, Q_2 \in \mathbb{K}[X]$ et $P \in \mathbb{K}[X]$ **non constant**.

Montrer que

$$Q_1(P) = Q_2(P) \Rightarrow Q_1 = Q_2.$$

Indication p. 647

Exercice 17 (◔☆ Divisibilité et composition à droite)
Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$ et $P \in \mathbb{K}[X]$ **non constant**.

Montrer que

$$A(P) \mid B(P) \Rightarrow A \mid B.$$

Indication p. 647

Exercice 18 (◔★ Petits couples de Bézout)
Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$ premiers entre eux et non constants.

Montrer qu'il existe U, V dans $\mathbb{K}[X]$, tels que

$$AU + BV = 1$$

et

$$\deg(U) < \deg(B)$$
$$\deg(V) < \deg(A).$$

Indication p. 647

Exercice 19 (◑★ PGCD et algorithme d'Euclide)
Soient $(n, m) \in \mathbb{N}^2$. Montrer que

$$(X^n - 1) \wedge (X^m - 1) = X^{n \wedge m} - 1.$$

Indication p. 647

Exercice 20 (◑★ Polynômes divisibles par leur dérivée)
Déterminer l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{K}[X]$ tels que $P' \mid P$.

Indication p. 647

Exercice 21 (◔★ Encore des coefficients binomiaux)
En s'inspirant de l'exercice 15 montrer

1. Une formule de sélection: pour $n \in \mathbb{N}$ et $N \in \mathbb{N}$

$$\sum_{\substack{k \in [\![0,n]\!] \\ k \equiv 0[N]}} \binom{n}{k} = \frac{1}{N} \sum_{\omega \in \mathbb{U}_N} (1+\omega)^n$$

2. La formule de Vandermonde généralisée: pour $(p_1, ..., p_r) \in \mathbb{N}^r$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{\substack{(i_1,\dots,i_r) \in \mathbb{N}^r \\ i_1+\cdots+i_r=n}} \binom{p_1}{i_1}\binom{p_2}{i_2}\cdots\binom{p_r}{i_r} = \binom{p_1+p_2+\cdots+p_r}{n}.$$

Indication p. 647

Exercice 22 (◔★ Calcul de coefficients dominants)
Pour chacun des polynômes suivants calculer son degré et ,si ce degré est un entier, son coefficient dominant.

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, et $P \in \mathbb{K}[X]$,
$$P(X+1) - P(X-1).$$
2. Pour $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$,
$$P(X) + P(X+\alpha).$$
3. Pour $P \in \mathbb{K}[X]$
$$P - XP'$$

Indication p. 647

Exercice 23 (◔★ Polynôme complexe trop réel)
Soit $P \in \mathbb{C}[X]$.

On suppose qu'il existe une infinité de réels α tels que $P(\alpha)$ est réel.

Montrer que tous les coefficients de P sont réels.

Indication p. 648

Exercice 24 (◔★ Changement de corps)
Soient $A, B \in \mathbb{R}[X] \subset \mathbb{C}[X]$ deux polynômes réels.

On suppose que $A \underset{\mathbb{C}[X]}{|} B$.

Montrer que $A \underset{\mathbb{R}[X]}{|} B$.

Indication p. 648

Exercice 25 (◔★ Racines et conjugués II)
Soit $P \in \mathbb{Q}[X] \subset \mathbb{R}[X]$.

1. Montrer que si $\sqrt{2}$ est racine de P alors $-\sqrt{2}$ est racine de P.
2. Soit $(a,b) \in \mathbb{Q}^2$. Montrer que si $a + b\sqrt{2}$ est racine de P alors $a - b\sqrt{2}$ est racine de P.

Indication p. 648

Exercice 26 (◔☆ Polynômes et module)
Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$ non réduit à un point.

1. Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $\forall x \in [a,b], |P(x)| = 1$.
2. Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $\forall x \in [a,b], |P(x)| = 1$.

Indication p. 648

Exercice 27 (◑★ Polynômes stabilisant le cercle unité)
Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(\mathbb{U}) \subset \mathbb{U}$.

Indication p. 648

Exercice 28 (◔★ La dérivation est localement nilpotente I)

1. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $Q \in \mathbb{K}_n[X]$.

   Montrer qu'il existe un et unique $P \in \mathbb{K}_n[X]$ tel que
   $$P - P' = Q$$
   et l'exprimer en fonction de Q.
2. Soit $Q \in \mathbb{K}[X]$.

   Montrer qu'il existe un et unique $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que
   $$P - P' = Q$$
   et l'exprimer en fonction de Q.

Indication p. 648

Exercice 29 (◑★ La dérivation est localement nilpotente II: Polynôme en la dérivée polynomiale)
Soit $D \in \mathcal{L}(\mathbb{K}[X])$ définie par
$$\begin{aligned} D : \mathbb{K}[X] &\to \mathbb{K}[X] \\ Q &\mapsto Q' \end{aligned}$$
et $P \in \mathbb{K}[X]$.

Montrer que $P(D) \in \mathrm{GL}(\mathbb{K}[X])$ ssi $P(0) \neq 0$.

Indication p. 648

Exercice 30 (◑☆ Une divisibilité)
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.

Montrer que P divise $P(X+P)$.

Indication p. 649

Exercice 31 (◔★ Un triangle et son inversion)
Soient $(z_1, z_2, z_3) \in (\mathbb{C}^*)^3$ tels que

$$z_1 + z_2 + z_3 = 0 \text{ et } \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} = 0.$$

Montrer que $|z_1| = |z_2| = |z_3|$ et faire un schéma.

Indication p. 649

Exercice 32 (◔☆ Un Vandermonde peu camouflé)
Soit $(\lambda_0, ..., \lambda_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ deux à deux distincts.

Montrer que $\left((X-\lambda_k)^n\right)_{0\leq k\leq n}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Indication p. 649

Exercice 33 (◑★ Divisibilité et Bernoulli itéré)
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.

1. Montrer que $P - X$ divise $P \circ P - X$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P - X$ divise $\underbrace{P \circ P \circ \cdots \circ P}_{n \text{ fois}} - X$.

Indication p. 649

Exercice 34 (◔☆ Le jeu immoral du docteur B.)
Un professeur de mathématiques vous propose le jeu suivant:

- ▹ Vous choisissez une suite finie (de longueur de votre choix et secrète) d'entiers **naturels** $(a_0, ..., a_n) \in \mathbb{N}^{n+1}$.
- ▹ À chaque tour du jeu, le professeur vous donne un entier $\beta \in \mathbb{N}$ et vous lui répondez par la valeur de $\sum_{k=0}^{n} a_k \beta^k$.
- ▹ Au bout de N tours (ou avant si il le souhaite) le professeur propose une suite finie d'entiers naturels. Si il s'agit de la bonne suite il gagne la partie, sinon il perd.

Si le professeur gagne vous lui devez une tablette de chocolat, sinon il vous doit une tablette de chocolat.

1. Pour quelle valeurs de $N \geq 2$ acceptez-vous de jouer à ce jeu ?

Le professeur vous propose une variante: vous pouvez choisir une suite finie d'entiers **relatifs** $(a_0, ..., a_n) \in \mathbb{Z}^{n+1}$, et en échange à chaque tour il peut choisir $\beta \in \mathbb{R}$.

1. Pour quelles valeurs de $N \geq 1$ acceptez-vous de jouer à cette variante ?

Indication p. 649

Exercice 35 (◔☆ Symétrie point par point)
Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ deux polynômes réel unitaires de degrés 2024 tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) \neq Q(x)$.

Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $P(x - \alpha) = Q(x + \alpha)$.

Indication p. 649

Exercice 36 (◑☆ Contourner Bézout)
Soient $\lambda_1, ..., \lambda_n$ des scalaires deux à deux distincts.

1. Montrer à l'aide d'une relation de Bézout qu'il existe $P_1, ..., P_n$ des polynômes tels que

$$\sum_{k=1}^{n} P_k \times \prod_{\substack{j \in [\![1,n]\!] \\ j \neq k}} (X - \lambda_j) = 1.$$

2. Montrer sans utiliser relation de Bézout qu'il existe $P_1, ..., P_n$ des polynômes tels que

$$\sum_{k=1}^{n} P_k \times \prod_{\substack{j \in [\![1,n]\!] \\ j \neq k}} (X - \lambda_j) = 1.$$

Indication p. 650

Exercice 37 (◑☆ Familles libres ou liées)
Soient P et Q deux polynômes non constants.

1. Montrer que la famille $\left(P^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est libre.

2. Montrer que la famille $\left(P^kQ^j\right)_{(k,j)\in\mathbb{N}^2}$ est liée.

Indication p. 650

Exercice 38 (◑★ Exponentielle de la dérivée)
Soit $D \in \mathcal{L}(\mathbb{K}[X])$ l'opérateur de dérivation.

Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et $P \in \mathbb{K}[X]$,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda D)^k}{k!}(P) = P(X+\lambda).$$

Indication p. 650

Exercice 39 (◑☆ Une autre façon de primitiver)
Soit $n \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{K}_n[X]$.

On pose

$$Q = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(-1)^k}{(k+1)!} X^{k+1} P^{(k)}.$$

Montrer que $Q(0) = 0$ et

$$Q' = P.$$

Indication p. 650

Exercice 40 (◔☆ Un exercice d'entraînement rapide)
Soit $n \in \mathbb{N}$.

Montrer qu'il existe un et unique $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que

$$P(X+1) + P(X) = X^n.$$

Indication p. 650

Exercice 41 (◕☆ Comme le spectre mais dimension quelconque)
Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. Pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$, on pose

$$\mathrm{Sp}(u) = \{\lambda \in \mathbb{C}, u - \lambda \mathrm{Id}_E \notin \mathrm{GL}(E)\}.$$

Montrer que pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$ et pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, on a

$$P(\mathrm{Sp}(u)) = \mathrm{Sp}(P(u)).$$

Indication p. 650

Exercice 42 (◑☆ Un autre exemple de base)
Soient $a, b \in \mathbb{K}$ distincts.

Montrer que $\left((X-a)^k(X-b)^{n-k}\right)_{k\in[\![0,n]\!]}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Indication p. 650

Exercice 43 (◔★ Application linéaires et degré)
Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}[X])$.

1. On suppose que pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, $\deg(u(P)) \geq \deg(P)$. Montrer que u est injective.
2. On suppose qu'il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, si $\deg(P) \geq r$ alors $\deg(u(P)) = \deg(P) - r$. Montrer que u est surjective.
3. On suppose que pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, $\deg(u(P)) = \deg(P)$. Montrer que u est un automorphisme.

Indication p. 650

Thème: Fonctions polynomiales réelles

Exercice 44 (◑★ Fonctions localement polynomiales)
Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ une fonction localement polynomiale c'est à dire telle que

$$\forall a \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0, \exists P \in \mathbb{R}[X], \forall x \in [a-\delta, a+\delta], f(x) = P(x).$$

Montrer que f est une fonction polynomiale.

Indication p. 650

Exercice 45 (◑★ Somme de deux carrés)
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.

Montrer que

$$(\forall x \in \mathbb{R}, P(x) \geq 0) \Leftrightarrow (\exists (A,B) \in (\mathbb{R}[X])^2, P = A^2 + B^2).$$

Indication p. 651 · Solution p. 663

Exercice 46 (◑☆ Une variante de sommes de deux carrés)
Soit $P \in R[X]$ tel que pour tout $x \in [-1,1]$, $P(x) \geq 0$.

Montrer qu'il existe $A, B \in \mathbb{R}[X]$ tels que

$$P = A^2 + (1-X^2)B^2.$$

Indication p. 651 · Solution p. 664

Exercice 47 (◑★ Somme des dérivées)
Soit $n \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) \geq 0$.

On pose $Q = P + P' + P'' + \cdots P^{(n)}$.

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $Q(x) \geq 0$.

Indication p. 651

Exercice 48 (◔★ Fonctions non polynomiales)
1. Montrer que $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n'est pas polynomiale (c'est à dire qu'il n'existe pas de $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall t \in \mathbb{R}, \exp(t) = P(t)$.)
2. Montrer que $\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ n'est pas polynomiale.
3. Montrer que $\begin{array}{c}\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ \mathbb{C} \to \mathbb{C}\end{array}$ n'est pas polynomiale.
4. Montrer que $z \mapsto \overline{z}$ n'est pas polynomiale.

Indication p. 651

Exercice 49 (◔★ Une inégalité)
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé.

Montrer que

$$\forall t \in \mathbb{R}, P(t)P''(t) \leq (P'(t))^2.$$

Indication p. 651

Exercice 50 (◔☆ Petite factorisation réelle)
Soient $n \in \mathbb{N}$ et P et Q deux polynômes distincts de réels de degrés n.

Montrer que

$$\deg(P^3 - Q^3) \geq 2n$$

et donner un exemple où l'égalité est atteinte.

Le résultat reste-t-il vrai si on considère des polynômes complexes ?

Indication p. 651

Exercice 51 (◑★ Un peu mieux que Rolle)
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré n scindé à racines simples et $\lambda_1 < ... < \lambda_n$ ses racines.

1. Rappeler brièvement pourquoi P' est scindé à racine simples et de racines $\mu_1 < ... < \mu_{n-1}$ vérifiant

$$\forall k \in [\![1, n-1]\!], \lambda_k < \mu_k < \lambda_{k+1}.$$

2. Montrer que pour tout $j \in [\![1, n-1]\!]$,

$$n\prod_{k=1}^{n}(\lambda_j - \mu_k) = \prod_{\substack{1\leq k\leq n\\ k\neq j}}(\lambda_j - \lambda_k).$$

3. Montrer que pour tout

$$\forall k \in [\![1, n-1]\!], \lambda_k + \frac{\lambda_{k+1} - \lambda_k}{n} < \mu_k < \lambda_{k+1} - \frac{\lambda_{k+1} - \lambda_k}{n}.$$

Indication p. 652

Exercice 52 (◔★ Somme partielle de l'exponentielle)
Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose

$$P_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$$

Déterminer pour $n \in \mathbb{N}$ le nombre de racines réelles de P_n.

Indication p. 652

Exercice 53 (◕☆ Polynômes surjectifs)
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que l'application

$$\begin{aligned} \mathbb{N} &\to \mathbb{N} \\ n &\mapsto P(n) \end{aligned}$$

est surjective.

Montrer que $P = X$.

Indication p. 652

Exercice 54 (◔☆ Un ordre assez lexicographique)
On définit une relation $\lhd$ sur $\mathbb{R}[X]$ par

$$\forall (P,Q) \in (\mathbb{R}[X])^2, P \lhd Q \Leftrightarrow \exists A \in \mathbb{R}, \forall t \geq A, P(t) \leq Q(t).$$

Montrer que $\lhd$ est une relation d'ordre total sur $\mathbb{R}[X]$.

Indication p. 652

Exercice 55 (◑★ Polynômes orthogonaux sans le dire)
Soit $[a,b]$ un segment non trivial de $\mathbb{R}$ et $\omega \in \mathcal{C}^0([a,b],]0,+\infty[)$.

On admet que pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^0([a,b],[0,+\infty[)$, si $\int_a^b f(t)\omega(t)\,\mathrm{d}t = 0$ alors $f = 0_{[a,b]\to\mathbb{R}}$.

Soit $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une base échelonnée de $\mathbb{R}[X]$ telle que

$$\forall i,j \in \mathbb{N}, i \neq j \Rightarrow \int_a^b P_i(t)P_j(t)\omega(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, P_k est scindé à racines simples et que toutes ses racines sont dans $[a,b]$.

Indication p. 652

Exercice 56 (◔☆ Monotonie ÀPCR)
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ non constant.

Montrer qu'il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que $P_{(|[A,+\infty[)}$ est strictement monotone.

Indication p. 652

Thème: Équations fonctionnelles polynomiales

Exercice 57 (◑☆ Polynômes multiplicatifs)
Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{C}^2, P(xy) = P(x)P(y).$$

Indication p. 652

Exercice 58 (◔★ Des équations fonctionnelles polynomiales)
Pour chaque équation suivante déterminer l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{K}[X]$ satisfaisant la condition.

1. $P \circ P = P$.
2. $P(X^2) = (X^2+1)P(X)$.
3. $P(2X) = P(X) - X$.

Indication p. 652 · Solution p. 666

Exercice 59 (◔★ Déjà vu au moins deux fois)
Déterminer l'ensemble des polynômes P tels que

$$P(X+1) - P(X) = X^2.$$

Indication p. 652

Exercice 60 (◕★ Une équation fonctionnelle de commutativité)
Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que

$$P(X)^2 + 1 = P(X^2+1).$$

Indication p. 653

Exercice 61 (◑★ Une équation fonctionnelle polynomiale ultra-classique)
Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que

$$P(X^2) = P(X-1)P(X).$$

Indication p. 653

Exercice 62 (◔☆ Encore une équation fonctionnelle polynomiale)
Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que

$$P(X) + (X-1)P'(X) = X^n.$$

Indication p. 653

Exercice 63 (◑★ Re-encore une équation fonctionnelle polynômes)
Déterminer l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que

$$XP(X+1) = (X+2)P(X)$$

Indication p. 653

Exercice 64 (●★ Block-Thielmann)
Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base échelonnée de $\mathbb{K}[X]$. On dit qu'une telle base est commutante ssi pour tous $n, m \in \mathbb{N}$, $P_n \circ P_m = P_m \circ P_n$.

1. Montrer que la base canonique $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi que la base de Tchebychev $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont commutantes.
2. Soit Λ un polynôme de degré 1. Montrer que Λ est inversible. On note Λ^{-1} son inverse.
3. Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base commutante de $\mathbb{K}[X]$. Montrer que $(\Lambda \circ P_n \circ \Lambda^{-1})_{n\in\mathbb{N}}$ est une base commutante de $\mathbb{K}[X]$.
4. Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base commutante tel qu'il existe $c \in \mathbb{K}$ tel que $P_2 = X^2 + c$. Montrer que $c \in \{0, -2\}$.
5. En déduire qu'une base est commutante ssi existe Λ un polynôme de degré 1 tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n = \Lambda \circ X^n \circ \Lambda^{-1}$ ou qu'il existe Λ un polynôme de degré 1 tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n = \Lambda \circ T_n \circ \Lambda^{-1}$.

Indication p. 653

Thème: Fonctions polynomiales complexes

Exercice 65 (◑☆ Norme infinie sur le cercle unité)
Soient $n \in \mathbb{N}$ et $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}_n[X]$.

1. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{N} \sum_{\omega \in \mathbb{U}_N} \omega^k = \begin{cases} 1 & \text{si } N \mid k \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

2. Soit $N > n$. Montrer que

$$\frac{1}{N} \sum_{\omega \in \mathbb{U}_N} P(\omega) = a_0.$$

3. Soit $N > n$. Montrer que

$$\max_{\omega \in \mathbb{U}_N} (|P(\omega)|) \geq \max_{k \in [\![0,n]\!]} (|a_k|)$$

Indication p. 654

Exercice 66 (◑★ Formule de Cauchy)
Soit $P \in \mathbb{C}[X]$.

1. Calculer

$$\frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} \frac{P\left(e^{i\theta}\right)}{e^{i\theta}} i e^{i\theta} \, \mathrm{d}\theta.$$

2. Soit $z_0 \in \mathcal{D}(\omega, R) \setminus \mathcal{C}(\omega, R)$. Calculer

$$\frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} \frac{P\left(\omega + Re^{i\theta}\right)}{Re^{i\theta} - z_0} i R e^{i\theta} \, \mathrm{d}\theta.$$

Indication p. 654

Exercice 67 (◕☆ Principe du maximum)
Soient $\omega \in \mathbb{C}$ et $R > 0$.

On note $\mathcal{D}(\omega, R) = \{z \in \mathbb{C}, |z - \omega| \leq R\}$ le disque fermé de rayon R et de centre ω, ainsi que $\mathcal{C}(\omega, R) = \{z \in \mathbb{C}, |z - \omega| = R\}$ le cercle de rayon R et de centre ω.

Soit $z_0 \in \mathcal{D}(\omega, R)$. Montrer que

$$|P(z_0)| \leq \max_{z \in \mathcal{C}(\omega, R)} |P(z)|.$$

Indication p. 654

Thème: Polynômes et arithmétique de $\mathbb{Z}$

Exercice 68 (◔★ Un petit lemme utile en arithmétique)
Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ un polynôme à coefficients entiers.

Montrer que pour tous entiers a et b, $a-b$ divise $P(a)-P(b)$ (pour la division dans $\mathbb{Z}$).

Indication p. 654 · Solution p. 667

Exercice 69 (◔☆ Progression divisible)
Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ un polynôme à coefficients entiers.

Montrer que pour tout entier n il existe un entier N_n tel que

$$n \mid \sum_{k=0}^{N_n} P(k).$$

Indication p. 654

Exercice 70 (◑☆ Un exemple d'irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$)
Soient $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ des entiers deux à deux distincts.

On pose

$$P = \prod_{k=1}^{n} (X - \lambda_k) - 1.$$

Montrer que P est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$.

Indication p. 654

Exercice 71 (◔☆ Divisibilité et divisibilité)
Soient P et Q deux polynômes à coefficients entiers, unitaires et non constants.

On suppose qu'il existe une infinité d'entiers n tels que $P(n)$ divise $Q(n)$ (dans $\mathbb{Z}$).

Montrer que P divise Q (dans $\mathbb{Z}[X]$).

Indication p. 655

Exercice 72 (◑☆ Polynôme qui permute ?)

1. Soient $a_1, ..., a_r$ des réels deux à deux distincts.

Montrer qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ tel que pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, $P(a_i) = a_{i+1}$ (avec la notation $a_{r+1} = a_1$).

2. Existe-t-il un polynôme $P \in \mathbb{Z}[X]$ à coefficients **entiers** et $r \geq 3$ entiers $a_1, ..., a_r$ deux à deux distincts tels que pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, $P(a_i) = a_{i+1}$ (avec la notation $a_{r+1} = a_1$) ?

Indication p. 655

Exercice 73 (◔★♠ Petit critère d'Eisenstein)
Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{Z}[X]$ un polynôme à coefficients entiers.

Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que $\alpha \wedge \beta = 1$.

Montrer que

$$P\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) = 0 \Rightarrow (\alpha \mid a_0 \text{ et } \beta \mid a_n).$$

Commenter.

Indication p. 655

Exercice 74 (◑★♠ Contenu d'un polynôme et lemme de Gauss polynomial)
Pour tout $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{Z}[X]$ un polynôme à coefficients entiers, on appelle son *contenu*, noté $c(P)$ le pgcd de ses coefficients, c'est à dire

$$c(P) = \bigwedge_{k=0}^{n} a_k.$$

1. Commenter la définition.

2. Soient $P_1, P_2 \in \mathbb{Z}[X]$ tels que $c(P_1) = 1$ et $c(P_2) = 1$. Montrer que $c(P_1 P_2) = 1$.

3. Soient $P_1, P_2 \in \mathbb{Z}[X]$. Montrer que $c(P_1 P_2) = c(P_1)c(P_2)$.

Indication p. 655

Exercice 75 (◔★ Petit théorème de Fermat et coefficients binomiaux)
Soit p un nombre premier. On admet le petit théorème de Fermat.

Montrer que dans $\frac{\mathbb{Z}}{p}\mathbb{Z}[X]$,

$$(X+1)^p = X^p + 1$$

En déduire que pour tout $k \in [\![1, p-1]\!]$, $p \mid \binom{p}{k}$.

Indication p. 655 · Solution p. 667

Exercice 76 (◕★ Polynômes à valeurs entières)
On note dans cet exercice $\mathcal{H}$ l'ensemble des polynômes à valeurs entières sur les entiers, c'est à dire

$$\mathcal{H} = \{P \in \mathbb{Q}(X) \mid \forall n \in \mathbb{Z}, P(n) \in \mathbb{Z}\}.$$

On note aussi Δ l'opérateur de différence discrète, c'est à dire

$$\begin{aligned}\Delta : \mathbb{Q}[X] &\to \mathbb{Q}[X] \\ P &\mapsto P(X+1) - P(X).\end{aligned}$$

Enfin on note pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$H_p = \frac{X(X-1)\cdots(X-p+1)}{p!}.$$

1. Montrer que $\mathcal{H}$ est une partie stable par Δ, et que pour tout $P \in \mathcal{H}$, si $\Delta(P) \in \mathcal{H}$ et $P(0) \in \mathbb{Z}$ alors $P \in \mathcal{H}$.
2. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $H_p \in \mathcal{H}$.
3. Soit $P \in \mathbb{Q}_d[X]$.

   Montrer que

$$P \in \mathcal{H} \Leftrightarrow \exists (a_0, ..., a_d) \in \mathbb{Z}^{d+1}, P = \sum_{k=0}^{d} a_k H_k.$$

Indication p. 656

Indications

Indication 1 · Énoncé p. 624 (Racines et conjugués)
Montrer que comme P est à coefficients réels, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\overline{P(z)} = P(\overline{z})$.

Indication 2 · Énoncé p. 624 (Parité et polynômes)

1. Procéder par chaîne d'implications.

   Le résultat pour les polynômes impairs est
   (i) $P(-X) = -P(X)$
   (ii) tous les coefficients d'ordre pair de P sont nuls
   (iii) il existe un polynôme Q tel que $P(X) = XQ(X^2)$.
2. Juste dériver la relation.
3. Montrer que le seul polynôme pair et impair est 0 et remarque que pour tout P, $P = \frac{1}{2}(P(X) + P(-X)) + \frac{1}{2}(P(X) - P(-X))$.

   Alternativement remarquer que $P \mapsto P(-X)$ est une symétrie.

Solution p. 657

Indication 3 · Énoncé p. 624 (Degré d'une composée)
Dans le cas Q constant distinguer selon que cette constante est ou non une racine de P.

Indication 4 · Énoncé p. 625 (S'est échappé d'un TD précédent)

1. Limites et TVI.
2. Rolle.
3. Re-Rolle.

Indication 5 · Énoncé p. 625 (Calculs de reste)

1. Évaluer en α.
2. Évaluer en α et β
3. Évaluer et évaluer la dérivée en α.

Solution p. 660

Indication 6 · Énoncé p. 625 (Polynômes à coefficients dans un anneau)

1. Vérifier la définition de sous-anneau. On a $(A[X])^\times = A^\times$, en identifiant un polynôme constant à la constante associée.
2. Faire la même preuve que pour un corps, et noter l'utilisation de l'inversibilité du coeff dominant.

   Le résultat est faux de manière générale. Ainsi remarquer que dans $\mathbb{Z}[X]$ il n'existe pas de division euclidienne entre X^2 et $2X$!

Indication 7 · Énoncé p. 625 (Racines et arithmétique dans les petits degrés)

1. N'importe quel polynôme de signe constant convient, que dire par exemple de $X^4 + 1$?

2. Remarquer que si $a+b \in \{2,3\}$ avec a et b dans $\mathbb{N}^*$ alors au moins l'un des deux vaut 1.

Indication 8 · Énoncé p. 626 (Petites sommes de Newton)

1. Il s'agit des relations coefficients-racines.

2. On obtient $S_1 = \sigma_1$, $S_2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$.

3. On obtient $S_3 = S_1S_2 - \sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3$.

Indication 9 · Énoncé p. 626 (Systèmes de sommes de Newton)
Avec $P = (X-\lambda_1)(X-\lambda_2)(X-\lambda_3)$ que dire de P ?

Remarquer que -1 est racine «évidente» de $X^3 - X^2 + 2$.

Ne pas oublier les 3! permutations à la fin.

Indication 10 · Énoncé p. 626 (Vers les fractions rationnelles: dérivée logarithmique)
Écrire l'expression explicite de la dérivée d'un produit.

Indication 11 · Énoncé p. 627 (Quelques polynômes usuels)
Une fois factorisé dans $\mathbb{C}[X]$ en regroupant les racines complexes conjuguées deux par deux on obtient la factorisation dans $\mathbb{R}[X]$.

1. À connaître par cœur, ou au pire c'est un trinôme. Ne pas oublier les deux cas particuliers dans $\mathbb{R}[X]$ que sont $\cos(\theta) = \pm 1$.

2. Quasiment les racines n-ièmes.

3. Pour trouver les racines complexes, pour $z \neq 1$ c'est une somme géométrique puis des racines n-ièmes.

Indication 12 · Énoncé p. 627 (Polynômes réels et racines complexes)
Si $z \in \mathbb{R}$ c'est un résultat du cours.

Si $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $P_z = X^2 - 2\,\mathrm{Re}(z)X + |z|^2$ (pourquoi ?).

Alternativement utiliser la structure des idéaux de $\mathbb{R}[X]$.

Indication 13 · Énoncé p. 627 (Nombre de racines distinctes)
Étudier les racines, et donc dans $\mathbb{C}$ les facteurs irréductibles, des diviseurs communs à P et P'.

Indication 14 · Énoncé p. 627 (Entre Taylor et Lagrange)
Il s'agit bien évidemment de déterminer des polynômes tels qu'une valeur vaut 1 et les autres s'annulent.

Indication 15 · Énoncé p. 628 (Rappels sur les coefficients binomiaux)

1. Utiliser le fait que $1+1=2$.

2. D'un côté dériver puis développer par le binôme. De l'autre développer par le binôme puis dériver.

3. D'un côté faire le produit puis développer par le binôme. De l'autre développer par le binôme puis faire le produit.
4. Dériver r fois.

Solution p. 661

Indication 16 · Énoncé p. 628 (Régularité de la composition à droite)
Par degré, la famille $\left(P^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est libre.

Alternativement, dans le cas $\mathbb{K}$ infini, remarquer que si P non constant alors l'image de P est infinie.

Indication 17 · Énoncé p. 628 (Divisibilité et composition à droite)
Par exemple déduire la division euclidienne de $B(P)$ par $A(P)$ de celle de B par A.

Indication 18 · Énoncé p. 629 (Petits couples de Bézout)
Comme dans $\mathbb{Z}$, déterminer tous les couples de Bézout, et montrer qu'au moins un convient.

Indication 19 · Énoncé p. 629 (PGCD et algorithme d'Euclide)
Cf le TD d'arithmétique.

Montrer pour tous a et $b\neq 0$ entiers avec r le reste de la division euclidienne de a par b, X^r-1 est le reste de la division euclidienne de X^a-1 par X^b-1.

Faire tourner un algorithme d'Euclide.

Indication 20 · Énoncé p. 629 (Polynômes divisibles par leur dérivée)
Le quotient est de degré 1, par conséquent $P=\kappa(X-\alpha)P'$.

Écrire ensuite P dans la base de Taylor adaptée.

En déduire que $P=C(X-\alpha)^n$ pour un certain n.

Indication 21 · Énoncé p. 629 (Encore des coefficients binomiaux)
1. Écrire une somme double et intervertir. On pourrait par ailleurs s'intéresser à une généralisation, le calcul de $\sum_{\substack{k\in[\![0,n]\!]\\ k\equiv r[N]}}\binom{n}{k}$ en regardant l'exercice 65.
2. Calculer $(1+X)^{p_1}(1+X)^{p_2}\cdots(1+X)^{p_r}$.

Indication 22 · Énoncé p. 630 (Calcul de coefficients dominants)
1. Développer le binôme. On obtient un degré $n-1$ et un coefficient dominant $2n$.
2. Déterminer le coefficient dominant et degré de $P(X+\alpha)$ en fonction de celui de P on obtient le même degré que P et si celui est positif un coefficient dominant double de P.
3. Distinguer le cas où P est de degré 1.

Indication 23 · Énoncé p. 630 (Polynôme complexe trop réel)
Le polynôme P est égal à un polynôme d'interpolation réel en suffisamment de points.

Indication 24 · Énoncé p. 630 (Changement de corps)
Existence de la division euclidienne dans le petit cours et unicité de la division euclidienne dans le grand.

Indication 25 · Énoncé p. 630 (Racines et conjugués II)

1. Écrire $P\left(\sqrt{2}\right) = A + \sqrt{2}B$ avec A et B rationnels et constater que $P\left(\sqrt{2}\right) = A - \sqrt{2}B$. De $A + B\sqrt{2} = 0$, déduire que $A = B = 0$ Alternativement constater que $\mathbb{Q}\left[\sqrt{2}\right] = \left\{a + b\sqrt{2}, (a,b) \in \mathbb{Q}\right\}$ est un corps compris entre $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$.

   Montrer que la conjugaison $a + b\sqrt{2} \mapsto a - b\sqrt{2}$ est bien définie et est un morphisme de corps.

   Refaire l'exercice 1.
2. Idem. Ou bien poser $Q(X) = P(a + bX)$.

Indication 26 · Énoncé p. 631 (Polynômes et module)

1. Par exemple TVI, ou que dire de P^2 ?
2. Que dire de $P\overline{P}$?

Indication 27 · Énoncé p. 631 (Polynômes stabilisant le cercle unité)
Écrire $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et remarquer que la proposition se traduit par $z \in \mathbb{U}$, $P(z)\overline{P(z)} = 1$.

De là on peut par exemple en déduire que pour tout n,

$$\sum_{k-l=n} a_k \overline{a_l} = \delta_{n=0}$$

puis que les a_k sont tous nuls sauf 1.

Alternativement poser $\tilde{P}(X) = \sum_{k=0}^{n} \overline{a_{n-k}} X^k$, déterminer $P\tilde{P}$ et en déduire P.

Indication 28 · Énoncé p. 631 (La dérivation est localement nilpotente I)

1. On peut écrire le système sur les coefficients. Ou plus simplement constater qu'avec D l'endomorphisme de dérivation sur $\mathbb{K}_n[X]$ on a $D^{n+1} = 0$ et que l'on cherche à déterminer l'inversibilité et l'inverse de $\mathrm{Id} - D$.
2. Tout polynôme appartient à un certain $\mathbb{K}_n[X]$. Ne pas oublier de traiter de l'unicité (noyau).

Indication 29 · Énoncé p. 631 (La dérivation est localement nilpotente II: Polynôme en la dérivée polynomiale)
Remarquer que $P(D) = P(0)\,\mathrm{Id}_{\mathbb{K}[X]} + \sum_{k=1}^{n} a_k D^k$.

Si $P(0) = 0$ alors les polynômes constants sont dans le noyaux.

Si $P(0) = 0$ montrer au choix que l'image d'une famille échelonnée est échelonnée ou expliciter l'inverse par nilpotence de D et car X et P premiers entre eux.

Indication 30 · Énoncé p. 632 (Une divisibilité)
Par exemple développer explicitement mais judicieusement $P(X+P(X))$ pour vérifier que la somme des termes ne comportant pas explicitement P est en fait … égale à P !

Alternativement appliquer l'exercice 33 à $P+X$.

Indication 31 · Énoncé p. 632 (Un triangle et son inversion)
On a les z_k racines de $X^3-\sigma_3=0$.

Conclure (on a même mieux que l'égalité des modules, les angles sont espacés de $\frac{2\pi}{3}$).

Indication 32 · Énoncé p. 632 (Un Vandermonde peu camouflé)
Par le binôme se ramener à une matrice (ou un système) de Vandermonde.

Indication 33 · Énoncé p. 632 (Divisibilité et Bernoulli itéré)
On peut montrer que pour tout R

$$R(P(X))-R(X)=Q_R(X)(P(X)-X)$$

et conclure avec les cas particulier $R=P$ et $R=X$.

Pour cela il suffit de traiter le cas $R=X^k$ et utiliser une formule de Bernoulli.

Pour la deuxième question appliquer à $R=P^{(\circ n)}$ et $R=P^{(\circ(n-1))}$ et télescoper.

Alternativement appliquer l'exercice 30 à $P-X$.

Alternativement remarquer que modulo $P-X$, $P\equiv X[P-X]$ et itérer.

Indication 34 · Énoncé p. 633 (Le jeu immoral du docteur B.)
De manière peu intuitive le professeur gagne toujours au jeu qu'il a proposé !

Il est en effet toujours possible de terminer le jeu en exactement deux tours.

Tout d'abord en obtenant une borne sur l'ensemble des coefficients, puis en évaluant en un nombre assez grand (par exemple 10^N où tq 10^N est bien plus grand que chaque coefficient).

De cette intuition, montrer que pour $\beta\in\mathbb{R}$ un seul tour suffit: il suffit de prendre β tel que $\left(\beta^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est $\mathbb{Q}$-libre, une construction explicite pouvant s'inspirer du cas précédent (par exemple $\sum_k \frac{1}{10^{k!}}$).

Indication 35 · Énoncé p. 633 (Symétrie point par point)
Poser $P=\sum a_kX^k$, $Q=\sum b_kX^k$.

Constater que par la première condition $a_{2023}\neq b_{2023}$.

On cherche ensuite à montrer que $R=P(X-\alpha)-Q(X+\alpha)$ admet une racine.

Le coefficient de R de degré 2024 est 0, celui de degré 2023 est $a_{2023}-b_{2023}-2\times 2024\alpha$.

Donc R est de degré impair.

Indication 36 · Énoncé p. 633 (Contourner Bézout)
1. Par exemple utiliser la décomposition en facteurs irréductibles pour conclure la primalité dans l'ensemble.
2. Interpoler 1 en $\lambda_1, ..., \lambda_n$.

Indication 37 · Énoncé p. 634 (Familles libres ou liées)
1. Par degré.
2. Par degré, pour $n \in \mathbb{N}$ minorer le nombre de vecteur dans $\mathbb{K}_n[X]$ et prendre n assez grand.

Indication 38 · Énoncé p. 634 (Exponentielle de la dérivée)
Tout d'abord montrer que comme P est de degré fini la somme est bien définie car nulle à partir d'un certain rang.

Ensuite vérifier la relation sur une base (par exemple canonique ou Taylor).

Indication 39 · Énoncé p. 634 (Une autre façon de primitiver)
Par exemple calculer explicitement la dérivée de Q et télescoper.

Indication 40 · Énoncé p. 634 (Un exercice d'entraînement rapide)
Il suffit de montrer qu'un endomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$ est surjectif.

Indication 41 · Énoncé p. 635 (Comme le spectre mais dimension quelconque)
Ici le corps $\mathbb{C}$ est essentiel.

Dans un sens écrire $P - P(\lambda)$ comme produit d'irréductibles et idem avec $P - \lambda$ dans l'autre. Remarquer qu'en dimension quelconque un produit de non inversibles peut être non inversible mais qu'ici comme $\mathbb{K}[u]$ est commutatif on s'en sort par la droite ou la gauche.

Indication 42 · Énoncé p. 635 (Un autre exemple de base)
Évaluer en a et continuer.

Indication 43 · Énoncé p. 635 (Application linéaires et degré)
1. Que dire du noyau ?
2. Montrer que pour tout n, $u^{|\mathbb{K}_n[X]}_{|\mathbb{K}_{n+r}[X]}$ est bien définie et surjective par dimension. Puis se rappeler que pour tout $Q \in \mathbb{K}[X]$ il existe n tel que $Q \in \mathbb{K}_n[X]$.
3. Utiliser les deux questions précédentes.

Indication 44 · Énoncé p. 635 (Fonctions localement polynomiales)
Constater que si deux polynômes coïncident sur un intervalle (non vide et non réduit à un point) alors ils sont égaux.

Utiliser ensuite un principe de continuation. Étant donné $a \in \mathbb{R}$ et $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que f et $t \mapsto P(t)$ coïncident sur un voisinage de a, considérer $\{x \geq a, f(x) = P(x)\}$ et notamment son sup.

Indication 45 · Énoncé p. 636 (Somme de deux carrés)
Le sens réciproque est immédiat.

Pour le sens direct, procéder comme pour l'exercice dans $\mathbb{Z}$: montrer que l'ensemble des sommes de deux carrés est stable par produit et traiter le cas des polynômes irréductibles de degré 2.

Solution p. 663

Indication 46 · Énoncé p. 636 (Une variante de sommes de deux carrés)
▷ Montrer que dans un anneau quelconque on a pour tout a, b,

$$(a^2+ub^2)(c^2+ud^2) = (ac+ubd)^2 + u(ad-bc)^2.$$

▷ Faire le cas de degré ≤ 2.
▷ DPI

Solution p. 664

Indication 47 · Énoncé p. 636 (Somme des dérivées)
Commencer par remarquer que $Q = P + Q'$.

Montrer que Q ayant même degré et coefficient dominant que P admet un minimum global donc local.

En déduire que ce minimum est une valeur de P donc positif.

Alternativement étudier $t \mapsto Q(t)e^{-t}$.

Indication 48 · Énoncé p. 636 (Fonctions non polynomiales)
1. Croissance comparée ou remarquer qu'il n'existe pas de polynôme P tel que $P' = P$.
2. Croissance comparée ou remarquer qu'il n'existe pas de polynôme P tel que $XP' = 1$.
3. Croissance comparée ou remarquer qu'il n'existe pas de polynôme P tel que $P'' = -P$.
4. Par exemple, que dire de $XP(X)$?

Indication 49 · Énoncé p. 637 (Une inégalité)
Utiliser l'exercice 10 et dériver.

Indication 50 · Énoncé p. 637 (Petite factorisation réelle)
Se rappeler des règles de calcul dans un anneau commutatif, par exemple $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$. Regarder ensuite le coefficients dominant de $P^2 + PQ + Q^2$.

Il y a égalité par pour $P - Q$ constant, par exemple $X^n + 1$ et X^n.

Enfin dans $\mathbb{C}$ la factorisation reste correcte mais il n'y a plus de positivité des carrés (et conséquences) permettant de conclure à la non nullité du coefficient d'ordre $2n$. Regarder par exemple jX^n et X^n.

Indication 51 · Énoncé p. 637 (Un peu mieux que Rolle)

1. Rolle.
2. Calculer de deux manières différentes $P'(\lambda_j)$.
3. Remarquer que l'égalité précédente peut se réécrire

$$\frac{\mu_k - \lambda_k}{\lambda_{k+1} - \lambda_k} = \frac{1}{n} \prod_{j=1}^{k-1} \frac{\lambda_k - \lambda_j}{\lambda_k - \mu_j} \prod_{j=k+1}^{n} \frac{\lambda_k - \lambda_{j+1}}{\lambda_k - \mu_j}$$

Indication 52 · Énoncé p. 638 (Somme partielle de l'exponentielle)
Remarquer que $P_n' = P_{n-1}$ et $P_n = P_{n-1} + \frac{X^n}{n!}$ et procéder par récurrence.

Indication 53 · Énoncé p. 638 (Polynômes surjectifs)
Que dire d'une application de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{N}$ surjective monotone à partir d'un certain rang ?

Indication 54 · Énoncé p. 638 (Un ordre assez lexicographique)
Remarquer que cela revient à $P - Q$ positif au voisinage de $+\infty$.

Indication 55 · Énoncé p. 638 (Polynômes orthogonaux sans le dire)
Remarquer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, pour tout $L \in \mathbb{R}_{k-1}[X]$, $\int_a^b P_k(t)L(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

En déduire que si P_k admet strictement moins de k changements de signes, par interpolation, on obtient une contradiction.

Indication 56 · Énoncé p. 639 (Monotonie ÀPCR)
On a P' admet une limite de signe strict.

Indication 57 · Énoncé p. 639 (Polynômes multiplicatifs)
Déduire que pour tout $y \in \mathbb{C}$, $P(yX) = P(y)P(X)$ puis que $P(y) = y^n$ pour un certain n.

Conclure.

Indication 58 · Énoncé p. 639 (Des équations fonctionnelles polynomiales)
De manière générale une idée est de commencer par considérer le degré/coefficient dominant (après avoir traiter le polynôme nul).

On obtient alors une condition nécessaire sur le degré.

Il suffit alors de déterminer les coefficients.

Solution p. 666

Indication 59 · Énoncé p. 639 (Déjà vu au moins deux fois)
Montrer que $\Delta : P \mapsto P(X+1) - P(X)$ est linéaire, de noyau $\mathbb{K}_0[X]$, etc.

Ou bien juste majorer le degré de P est résoudre un système linéaire sur les coefficients.

Ou bien avoir l'intuition télescopique que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n) = P(0) + \frac{(n-1)(n-2)(2n-3)}{6}$.

Indication 60 · Énoncé p. 639 (Une équation fonctionnelle de commutativité)
Posons $Q = X^2 + 1$.

On cherche alors tous les polynômes P tels que

$$P \circ Q = Q \circ P.$$

On remarque tout d'abord que l'ensemble des polynômes convenant est stable par composition et que pour tout $r \in \mathbb{N}$, $\underbrace{Q \circ \cdots \circ Q}_{r \text{ fois}}$ convient.

De plus tout polynôme constant égal à c où $c = c^2 + 1$ convient.

Il reste à montrer que ce sont les seuls.

Tout d'abord on a $P(-X)^2 = P(X)^2$ donc $(P(X) - P(-X))(P(X) + P(-X)) = 0$.

Par intégrité P est pair ou P est impair.

- ▹ Si P est impair en particulier $P(0) = 0$.

  En considérant la suite $u_{n+1} = Q(u_n)$ on obtient une infinité de points où P coïncide avec X.
- ▹ Si P est pair on peut écrire $P = R(X^2)$ et donc à décalage près $P = S(X^2 + 1)$ où $S(X) = R(X^2 - 1)$. Donc $P = S \circ Q$.

  Alors $S \circ Q \circ Q = Q \circ S \circ Q$. Comme Q non constant $S \circ Q = Q \circ S$.

  De plus si S non constant le degré est strictement plus petit d'où le résultat par descente infinie.

Indication 61 · Énoncé p. 640 (Une équation fonctionnelle polynomiale ultra-classique)
Que dire des racines complexes de P ?

Montrer successivement qu'elles sont de module 1, puis sont égales à j ou $\overline{j}$.

Indication 62 · Énoncé p. 640 (Encore une équation fonctionnelle polynomiale)
Écrire dans la base canonique et identifier un système vérifié par les coefficients.

En déduire que $P = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+1} X^k$.

Indication 63 · Énoncé p. 640 (Re-encore une équation fonctionnelle polynômes)
Montrer que si z est une racine non nulle alors $z + 1$ aussi.

Indication 64 · Énoncé p. 640 (Block-Thielmann)

1. Pour Tchebychev remarquer que pour tout x, $\cos(n(mx)) = \cos(m(nx))$.
2. On a $y = ax + b$ ssi $x = \frac{y-b}{a}$.
3. Calcul explicite.
4. Regarder P_3.
5. Constater qu'en choisissant Λ on peut se ramener à $P_2 = X^2 + c$. Le cas $c = 0$ correspond à la base canonique et $c = -2$ à la base de Tchebychev.

Indication 65 · Énoncé p. 641 (Norme infinie sur le cercle unité)

1. Utiliser un peu de théorie des groupes ou juste remarquer qu'il s'agit d'une somme géométrique.
2. Utiliser une somme double: $\sum_{\omega\in\mathbb{U}_N} P(\omega) = \sum_{\omega\in\mathbb{U}_N}\sum_{k=0}^{n} a_k\omega^k = \sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{\omega\in\mathbb{U}_N}\omega^k$.
3. S'inspirer de la question précédente. À $k \in [\![0,n]\!]$ fixé, pour « isoler » un coefficient a_k remarquer que

$$\frac{1}{N}\sum_{\omega\in\mathbb{U}_N} \omega^{-k}P(\omega) = a_k$$

et conclure que comme

$$\frac{1}{N}\sum_{\omega\in\mathbb{U}_N} |P(\omega)| \geq |a_k|$$

au moins un des termes est plus grand que a_k.

Indication 66 · Énoncé p. 641 (Formule de Cauchy)
(Les non simplifications de l'énoncé sont volontaires.)

1. Traiter le cas des monômes puis conclure par linéarité (ou de manière équivalente écrire $P = \sum a_k X^k$).
2. Se ramener par « changement de variables » au cas précédent.

   Alternativement traiter le cas de la base de Taylor adaptée à z_0.

Indication 67 · Énoncé p. 641 (Principe du maximum)
Au choix utiliser la formule de Cauchy, ou bien le principe d'Argand, cf DM.

Indication 68 · Énoncé p. 642 (Un petit lemme utile en arithmétique)
Bernoulli.

Solution p. 667

Indication 69 · Énoncé p. 642 (Progression divisible)
On remarque que pour tout entier k, $P(n+k) \equiv P(k)[n]$.

Donc, en regroupant les termes on a

$$\sum_{k=0}^{n^2-1} P(k) = \sum_{r=0}^{n-1}\sum_{q=0}^{n-1} P(qn+r)$$

qui est divisible par n.

Indication 70 · Énoncé p. 642 (Un exemple d'irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$)
Supposons $P = AB$ avec A et B dans $\mathbb{Z}[X]$ non constants.

Pour tout k, $A(\lambda_k)B(\lambda_k) = -1$ donc $(A+B)(\lambda_k) = 0$.

Conclure par degré et en comptant les racines que $P = -A^2$ ce qui est impossible par coefficient dominant.

Indication 71 · Énoncé p. 642 (Divisibilité et divisibilité)
Comme il s'agit de polynômes unitaires, on peut effectuer une division euclidienne dans $\mathbb{Z}[X]$, soient A et B dans $\mathbb{Z}[X]$ tels que

$$Q = AP + B$$

et $\deg(B) < \deg(P)$.

Alors il existe une infinité d'entiers n tels que $P(n)$ divise $B(n) = A(n)P(n) - Q(n)$.

Comme $\deg(P) > \deg(B)$, à partir d'un certain rang on a de plus $|P(n)| > |B(n)|$.

Donc (comme l'intersection d'un ensemble infini et du complémentaire d'un ensemble borné est infini), il existe une infinité d'entiers n tels que $B(n) = 0$.

Indication 72 · Énoncé p. 643 (Polynôme qui permute ?)

1. Lagrange.
2. Il n'existe pas de telle configuration.

   En effet pour tout $i \in [\![1, r]\!]$ comme $a_{i+1} - a_i \mid P(a_{i+1}) - P(a_i)$, on a en particulier $a_{i+1} - a_i \mid a_{i+2} - a_{i+1}$.

   Donc en particulier, pour tout i, $|a_{i+1} - a_i| = |a_{i+2} - a_{i+1}|$. De plus si $a_{i+1} - a_i = -(a_{i+2} - a_{i+1})$ alors $a_i = a_{i+2}$, ce qui contredit le caractère distinct.

   Donc on a que pour tout i, $a_{i+2} - a_{i+1} = a_{i+1} - a_i$.

   Mais donc $a_r - a_1 = a_2 - a_1$ et $a_r - a_1 = (r-1)(a_r - a_1)$ ce qui est absurde.

Indication 73 · Énoncé p. 643 (Petit critère d'Eisenstein)
On a $\sum_{k=0}^{n} a_k \alpha^k \beta^{n-k} = 0$ d'où $\alpha\left(\sum_{k=1}^{n} a_k \alpha^{k-1} \beta^{n-k}\right) = -a_0 \beta^n$ et $\beta\left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k \alpha^k \beta^{n-1-k}\right) = -a_n \alpha^n$.

On remarquer donc que si on recherche des racines « évidentes » on peut se restreindre à un nombre fini de valeurs à tester.

Indication 74 · Énoncé p. 643 (Contenu d'un polynôme et lemme de Gauss polynomial)

1. Deux commentaires possibles: cela ne dépend pas de n, et pour tout P, $P = c(P)\tilde{P}$ où $c(\tilde{P}) = 1$, ce qui est essentiel pour étudier les irréductibles.
2. Si p est un diviseur premier de $c(PQ)$, remarquer que $r = \min(\{k, pdivides.\neg a_k\})$ et $s = \min(\{k, pdivides.\neg b_k\})$ existent.

   Montrer que le coefficient de X^{r+s} dans PQ n'est pas divisible par p.
3. Se ramener à un contenu de 1.

Indication 75 · Énoncé p. 644 (Petit théorème de Fermat et coefficients binomiaux)
Le polynôme $(X+1)^p - (X^p + 1)$ est de degré $\leq p - 1$ et s'annule p fois.

Solution p. 667

Indication 76 · Énoncé p. 644 (Polynômes à valeurs entières)

1. Différence d'entiers et télescopage.

2. Que dire de $\Delta(H_p)$? Ou bien juste un coefficient binomial (disjonction de cas selon $n < 0$ ou $n > p$)

3. Écrire une «formule de Taylor discrète».

Solutions

Solution pour l'exercice 2 · Énoncé p. 624 · Indication p. 645 (Parité et polynômes)

1. Notons $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et procédons par chaîne d'implications.

▷ (i) ⇒ (ii) : Supposons que $P(-X) = P(X)$, c'est à dire

$$\sum_{k=0}^{n} a_k (-X)^k = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k.$$

Alors

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \big(1 - (-1)^k\big) X^k = 0$$

et donc (liberté de la base canonique), pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $a_k\big(1 - (-1)^k\big) = 0$.

En particulier pour tout k impair $2a_k = 0$ c'est à dire $a_k = 0$.

D'où (ii).

▷ (ii) ⇒ (iii) : Supposons que tous les coefficients d'ordre impair de P sont nuls.

Alors

$$\begin{aligned} P &= \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \\ &= \sum_{\substack{k \in [\![0,n]\!] \\ k \text{ pair}}} a_k X^k + 0 \\ &= \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} a_{2j} X^{2j}. \end{aligned}$$

Posons

$$Q = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} a_{2j} X^j.$$

On a alors $Q(X^2 = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} a_{2j} X^{2j}$ et donc (iii).

▷ (iii) ⇒ (i) : Supposons qu'il existe Q tel que $P = Q(X^2)$.

Alors

$$P(-X) = Q\big((-X)^2\big) = Q(X^2) = P(X)$$

d'où (i).

D'où l'équivalence.

Pour l'imparité on a équivalence entre

(i) $P(-X) = -P(X)$
(ii) tous les coefficients d'ordre pair de P sont nuls
(iii) il existe un polynôme Q tel que $P(X) = XQ(X^2)$.

Procédons par exactement la même chaîne d'implications.

▷ (i) ⇒ (ii) : Supposons que $P(-X) = -P(X)$, c'est à dire

$$\sum_{k=0}^{n} a_k(-X)^k = -\sum_{k=0}^{n} a_k X^k.$$

Alors

$$\sum_{k=0}^{n} a_k\big(1+(-1)^k\big)X^k = 0$$

et donc (liberté de la base canonique), pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $a_k\big(1+(-1)^k\big) = 0$.

En particulier pour tout k pair $2a_k = 0$ d'où $a_k = 0$.

D'où (ii).

▷ (ii) ⇒ (iii) : Supposons que tous les coefficients d'ordre pair de P sont nuls.

Alors

$$\begin{aligned} P &= \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \\ &= \sum_{\substack{k\in[\![0,n]\!] \\ k \text{ impair}}} a_k X^k + 0 \\ &= \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} a_{2j+1} X^{2j+1} \\ &= X \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} a_{2j+1} X^{2j}. \end{aligned}$$

Posons

$$Q = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} a_{2j+1} X^{j}.$$

On a alors $Q(X^2) = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} a_{2j+1} X^{2j}$ et donc $P = XQ(X^2)$ d'où (iii).

▷ (iii) ⇒ (ii) : Supposons qu'il existe Q tel que $P = XQ(X^2)$.

Alors $P(-X) = (-X)Q((-X)^2) = -XQ(X^2) = -P(X)$ d'où (ii).

D'où l'équivalence pour les polynômes impairs.

2.

3. Chacune des trois caractérisations permet de montrer ce résultat.

▷ **Par (i)**

Supposons P pair c'est à dire

$$P(-X) = P(X).$$

Alors en dérivant

$$-P'(-X) = P'(X)$$

i.e

$$P'(-X) = -P'(X)$$

et donc P' est impair.

Supposons que P est impair, c'est à dire

$$P(-X) = -P(X).$$

Alors en dérivant

$$-P'(-X) = -P'(X)$$

i.e

$$P'(-X) = P'(X)$$

et donc P' est pair.

▷ **Par (ii)**

Supposons

$$P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$$

où pour tout k impair $a_k = 0$.

Alors

$$P' = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) a_{k+1} X^k$$

et on a bien pour tout k pair, comme $k+1$ impair, $(k+1)a_{k+1} = (k+1) \times 0 = 0$.

Supposons

$$P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$$

où pour tout k pair $a_k = 0$.

Alors

$$P' = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) a_{k+1} X^k$$

et on a bien pour tout k impair, comme $k+1$ pair, $(k+1)a_{k+1} = (k+1) \times 0 = 0$.

▷ **Par (iii)**

Supposons qu'il existe un polynôme Q tel que

$$P = Q(X^2)$$

alors en dérivant on a

$$P' = 2XQ'(X^2)$$

et en posant

$$R = 2Q'$$

on a bien

$$P' = XR(X^2).$$

Supposons qu'il existe un polynôme Q tel que

$$P = XQ(X^2)$$

alors en dérivant

$$P' = Q(X^2) + 2X^2Q'(X^2)$$

et en posant

$$R = (Q + 2XQ')$$

on a bien

$$P' = R(X^2).$$

4. Pour varier proposons une preuve qui utilise l'algèbre linéaire plutôt qu'une des trois caractérisations précédentes.

Soit

$$\begin{aligned} s : \mathbb{K}[X] &\to \mathbb{K}[X] \\ P &\mapsto P(-X). \end{aligned}$$

Alors s est linéaire et pour tout P, $s(s(P)) = P(-(-X)) = P$. D'où s est une symétrie.

Par le cours sur les symétries vectorielles, on en déduit

$$\mathrm{Ker}\Big(s - \mathrm{Id}_{\mathbb{K}[X]}\Big) \oplus \mathrm{Ker}\Big(s + \mathrm{Id}_{\mathbb{K}[X]}\Big) = \mathbb{K}[X].$$

Or

$$\mathrm{Ker}\Big(s - \mathrm{Id}_{\mathbb{K}[X]}\Big) = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(-X) - P(X) = 0\}$$

c'est à dire l'ensemble des polynômes pairs, et

$$\mathrm{Ker}\Big(s + \mathrm{Id}_{\mathbb{K}[X]}\Big) = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(-X) + P(X) = 0\}$$

c'est à dire l'ensemble des polynômes impairs.

D'où le l'ensemble des polynômes pairs et l'ensemble des polynômes impairs sont des sevs de $\mathbb{K}[X]$ supplémentaires.

Solution pour l'exercice 5 · Énoncé p. 625 · Indication p. 645 (Calculs de reste)

1. Par division euclidienne il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ et $R \in \mathbb{K}_0[X]$ tels que

$$P = Q(X-\alpha) + R$$
$$\deg(R) < \deg(X-\alpha) = 1.$$

En évaluant en α on a

$$P(\alpha) = 0 + R(\alpha)$$

et comme R est un polynôme constant, on en déduit

$$\boxed{R = P(\alpha)}.$$

2. Par division euclidienne il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ et $R \in \mathbb{K}_1[X]$ tels que

$$P = Q(X-\alpha)(X-\beta) + R$$
$$\deg(R) < \deg((X-\alpha)(X-\beta)) = 2.$$

En évaluant en α et en β on obtient

$$\begin{cases} P(\alpha) = 0 + R(\alpha) \\ P(\beta) = 0 + R(\beta). \end{cases}$$

Comme R est affine et que $\alpha \neq \beta$, on en déduit (équation d'une droite passant par deux points ou cas particulier de l'interpolation de Vandermonde, à revoir sans hésitation si nécessaire) que

$$\boxed{R = P(\alpha)\tfrac{X-\beta}{\alpha-\beta} + P(\beta)\tfrac{X-\alpha}{\beta-\alpha}} = \frac{P(\alpha)-P(\beta)}{\alpha-\beta}X + \frac{\alpha P(\beta) - \beta P(\alpha)}{\alpha-\beta}.$$

3. Par division euclidienne il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ et $R \in \mathbb{K}_1[X]$ tels que

$$P = Q(X-\alpha)^2 + R$$
$$\deg(R) < \deg((X-\alpha)^2) = 2.$$

En évaluant en α on obtient

$$P(\alpha) = 0 + R(\alpha).$$

De plus en dérivant on obtient

$$P' = Q'(X-\alpha)^2 + 2Q(X-\alpha) + R'$$

et donc en évaluant en α de nouveau

$$P'(\alpha) = 0 + 0 + R'(\alpha).$$

Par conséquent comme R est affine, on en déduit (équation d'une droite donnée par un point et une pente ou cas particulier de la formule de Taylor, à revoir sans hésitation si nécessaire) que

$$\boxed{R = P'(\alpha)(X-\alpha) + P(\alpha)}.$$

Solution pour l'exercice 15 · Énoncé p. 628 · Indication p. 646 (Rappels sur les coefficients binomiaux)
On a l'égalité polynomiale (formule du binôme)

$$(1+X)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k.$$

1. En évaluant en 1 on obtient

$$(1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k$$

c'est à dire

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

2. En dérivant on obtient

$$n(1+X)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} kX^{k-1}$$

c'est à dire par la formule du binôme de nouveau

$$n\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} X^k = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} kX^{k-1}$$

c'est à dire après une renumérotation

$$\sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1} X^{k-1} = \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} kX^{k-1}.$$

Par égalité des coefficients on obtient donc que pour tout k

$$\boxed{k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}}.$$

3. En effectuant le produit $(1+X)^p(1+X)^q$ puis en utilisant la formule du binôme on a d'un côté

$$\begin{aligned}(1+X)^p(1+X)^q &= (1+X)^{p+q} \\ &= \sum_{k=0}^{p+q} \binom{p+q}{k} X^k\end{aligned}$$

et de l'autre côté par la formule du binôme puis la définition du produit polynomial

$$\begin{aligned}(1+X)^p(1+X)^q &= \left(\sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i} X^i\right)\left(\sum_{j=0}^{q} \binom{q}{j} X^j\right) \\ &= \sum_{k=0}^{p+q} \left(\sum_{i+j=k} \binom{p}{i}\binom{q}{j}\right) X^k.\end{aligned}$$

Par conséquent (par égalité) on a pour tout k,

$$\sum_{i+j=k} \binom{p}{i}\binom{q}{j} = \binom{p+q}{k}$$

ce qui est bien le résultat recherché.

4. On a pour tout entier r, par récurrence immédiate

$$\begin{aligned}((1+X)^n)^{(r)} &= n(n-1)\cdots(n-r+1)(1+X)^{n-r}\\ &= r!\binom{n}{r}(1+X)^{n-r}\end{aligned}$$

et donc d'un côté par dérivation puis par formule du binôme (et changement d'indice)

$$\begin{aligned}((1+X)^n)^{(r)} &= r!\binom{n}{r}\sum_{k=0}^{n-r}\binom{n-r}{k}X^k\\ &= r!\sum_{k=r}^{n}\binom{n}{r}\binom{n-r}{k-r}X^{k-r}.\end{aligned}$$

De l'autre côté par formule du binôme puis par dérivation

$$\begin{aligned}((1+X)^n)^{(r)} &= \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}X^k\right)^{(r)}\\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(X^k)^{(r)}\\ &= \sum_{k=r}^{n}\binom{n}{k}r!\binom{k}{r}X^{k-r}\\ &= r!\sum_{k=r}^{n}\binom{n}{k}\binom{k}{r}X^{k-r}.\end{aligned}$$

Par égalité on a donc bien pour tout k,

$$\binom{k}{r}\binom{n}{k} = \binom{n}{r}\binom{n-r}{k-r}.$$

Solution pour l'exercice 45 · Énoncé p. 636 · Indication p. 651 (Somme de deux carrés)

Indications détaillées

Une somme de deux carrés étant toujours positive le sens réciproque est immédiat.

Pour le sens réciproque on procède de la manière suivante

- ▹ On montre que tout polynôme positif s'écrit comme produit de polynômes de degré 2 et de carrés de polynômes de degré 1.
- ▹ On montre que l'ensemble des polynômes s'écrivant comme somme de deux carrés est stable par produit
- ▹ On montre que les polynômes de degré 2 sans racine et les carrés de polynômes de degré 1 sont somme de deux carrés.

Ces trois points permettent alors de conclure.

Plus en détails

- ▹ Soit P un polynôme positif, par la caractérisation des polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$, on peut écrire

$$P = \alpha \prod_{j=1}^{r} (X-\lambda_j)^{m_j} \prod_{k=1}^{d} (X^2+b_kX+c_k)^{n_k}$$

où pour tout k, $(b_k)^2 - 4c_k < 0$, et les λ_j distincts.

Si par l'absurde il existe un j tel que m_j est impair alors au voisinage de λ_j, P change de signe ce qui est absurde.

Donc pour tout j, m_j est pair.

▷ Pour le deuxième point il s'agit de la remarque habituelle (cf nombre complexes)

$$(A^2+B^2)(C^2+D^2) = (AC-BD)^2 + (AD+BC)^2.$$

▷ Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ on a

$$(X-\lambda)^2 = (X-\lambda)^2 + 0$$

et pour $b, c \in \mathbb{R}$ tels que $b^2 - 4c < 0$, or a la forme canonique

$$X^2+bX+c = \left(X - \left(-\frac{b}{2}\right)\right)^2 + \left(\sqrt{c-\frac{b^2}{4}}\right)^2.$$

Solution pour l'exercice 46 · Énoncé p. 636 · Indication p. 651 (Une variante de sommes de deux carrés)

1. Supposons tout d'abord que $\deg(P) \leq 2$.

Procédons d'abord au brouillon (phase d'analyse non nécessaire)

▷ **Brouillon** (ne pas écrire au propre)

On cherche A de degré au plus 1 et B de degré au plus 0 (constante) tels que

$$P = A^2 + (1-X^2)B^2.$$

Si de tels A et B conviennent alors en évaluant en 1 et -1 on a

$$P(1) = A(1)^2,$$
$$P(-1) = A(-1)^2.$$

i.e, comme $P(1)$ et $P(-1) \geq 0$,

$$A(1) = \pm\sqrt{P(1)}$$
$$A(-1) = \pm\sqrt{P(-1)}.$$

Pour déterminer B, cela est pratique si par exemple si A admet une racine λ dans $[-1,1]$ alors en évaluant en λ on a

$$B^2(1-\lambda^2) = P(\lambda)$$

et donc (positivité de P en λ), pour $\lambda \neq \pm 1$,

$$B = \pm\sqrt{\frac{P(\lambda)}{1-\lambda^2}}.$$

En choisissant les $\pm$ on peut de plus forcer A à changer de signe.

Il reste alors à gérer $\lambda = \pm 1$, par exemple une dérivée car

$$P'(1) = 2A(1)A'(1) - 2B^2$$

et si $P(1) = 0$ et P positive au voisinage à gauche de 1 alors $P'(1) \leq 0$.

▷ **Construction au propre**

Posons (comme $P(1)$ et $P(-1)$ sont positifs),

$$A = \sqrt{P(1)}\frac{X+1}{1+1} + \left(-\sqrt{P(-1)}\right)\frac{X-1}{-1-1}.$$

Il s'agit d'un polynôme de degré ≤ 1 vérifiant

$$A(1) = \sqrt{P(1)},$$
$$A(-1) = -\sqrt{P(-1)}.$$

d'où

$$(P - A^2)(1) = 0,$$
$$(P - A^2)(-1) = 0.$$

Par conséquent

$$(1 - X^2) \mid P - A^2$$

et comme par degré

$$\deg(P - A^2) \leq 2$$

on en déduit qu'il existe $\beta \in \mathbb{R}$ tel que

$$P - A^2 = \beta(1 - X^2).$$

- ▷ Si $P(1) > 0$ et $P(-1) > 0$, alors A change de signe entre -1 et 1 et donc il existe $\lambda \in]-1, 1[$ tel que $A(\lambda) = 0$.

  En évaluant en λ on a

  $$\beta = \frac{P(\lambda)}{1 - \lambda^2} \geq 0.$$

- ▷ Si par exemple $P(1) = 0$ alors en dérivant puis en évaluant en 1,

  $$P'(1) - 0 = -2\beta$$

  et comme P admet un minimum local à gauche en 1, $P'(1) \leq 0$ et donc $\beta \geq 0$.

Dans tous les cas $\beta \geq 0$ et en posant $B = \sqrt{\beta}$ on a bien

$$\boxed{P = A^2 + (1 - X^2)B^2}.$$

2. On a de manière générale pour tout $Q \in \mathbb{R}[X]$ (peut se retrouver en calculant au brouillon dans $(\mathbb{R}[X])\left[\sqrt{Q}\right]$), pour tous $A, B, C, D \in \mathbb{R}[X]$,

$$(A^2+QB^2)(C^2+QD^2)=(AC+QBD)^2+Q(AD-BC)^2.$$

Ainsi les polynômes de la forme A^2+QB^2 sont stables par produit.

Considérons la décomposition en produit de facteurs irréductibles de P dans $\mathbb{R}[X]$.

Il existe $\lambda_1,...,\lambda_r\in\mathbb{R}$ et $Q_1,...,Q_s\in\mathbb{R}[X]$ irréductibles unitaires de degré 2 tels que

$$P=\kappa\prod_{\substack{i\in[\![1,r]\!]\\ \lambda_i\leq -1}}(X-\lambda_i)^{\alpha_i}\prod_{\substack{(i\in[\![1,r]\!]\\ \lambda_i\in]}}-1,1[)(X-\lambda_i)^{\alpha_i}\prod_{\substack{i\in[\![1,r]\!]\\ \lambda_i\geq 1}}(\lambda_i-X)^{\alpha_i}\prod_{j=1}^{s}Q_j^{\beta_j}.$$

- ▷ Tous les facteurs Q_j sont strictement positifs sur $\mathbb{R}$ et en particulier sur $[-1,1]$. Par le point précédent, ils sont de la forme $A^2+(1-X^2)B^2$.
- ▷ Soit $i\in[\![1,r]\!]$ tel que $\lambda_i\in]-1,1[$.

  Alors au voisinage de λ_i on a

  $$P(x)\underset{x\to\lambda_i}{\sim}\underbrace{\kappa\prod_{\ell\neq i}(\lambda_i-\lambda_\ell)^{\alpha_\ell}\prod_{j=1}^{s}Q_j(\lambda_i)}_{\text{constante non nulle}}\qquad (x-\lambda_i)^{\alpha_i}.$$

  Par positivité de P au voisinage de λ_i, α_i est **pair** et on a $(X-\lambda_i)^2$ qui est de la forme $A^2+(1-X^2)B^2$.
- ▷ Soit $i\in[\![1,r]\!]$ tel que $\lambda_i\notin]-1,1[$. Alors $X-\lambda_i$ si $\lambda_i\leftarrow 1$ ou λ_i-X si $\lambda_i>1$ est positif sur $[-1,1]$ et par conséquent de la forme $A^2+(1-X^2)B^2$.
- ▷ Enfin on a $\kappa>0$ (quotient de deux termes positifs, en évaluant en un point de $]-1,1[$ qui n'est pas racine de P) et donc de la forme $A^2+(1-X^2)B^2$.

Par conséquent $\boxed{P \text{ est de la forme } A^2+(1-X^2)B^2}$.

Solution pour l'exercice 58 · Énoncé p. 639 · Indication p. 652 (Des équations fonctionnelles polynomiales)

1. Les polynômes constants sont solutions.

Si P est solution non constante alors $\deg(P)^2=\deg(P)$ d'où $\deg(P)=1$.

De plus $P=aX+b$ est solution ssi $a(aX+b)+b=aX+b$ c'est à dire $a^2=a$ et $ab+b=b$.

Les solutions sont donc les polynômes constants et X.

2. Si P est une solution alors $2\deg(P)=2+\deg(P)$ d'où $\deg(P)=-\infty$ ou $\deg(P)=2$.

On peut alors continuer l'analyse, par exemple en remarquant que $P(1)=2P(1)$ d'où $P(1)=0$ et $2P(-1)=P(1)$ d'où $P(-1)=0$, d'où $X^2-1\mid P$, etc. ou tout simplement résoudre le système 3×3 sans réfléchir.

Un polynôme $P=aX^2+bX+c$ est solution ssi $aX^4+bX^2+c=aX^4+bX^3+(a+c)X^2+bX+c$ c'est à dire ssi

$$\begin{cases} a & = a \\ b & = 0 \\ a+c & = 0 \\ b & = 0 \\ c & = c. \end{cases}$$

ou encore ssi $a = -c$ et $b = 0$.

On obtient donc (après synthèse) que les solutions sont les

$$\lambda(X^2-1), \lambda \in \mathbb{K}.$$

3. Aucun polynôme constant n'est solution.

De plus si P de degré $n \geq 1$ et de coefficient dominant $a_n \neq 0$ est solution alors $2^n a_n = a_n$.

Il n'y a donc pas de solution.

Solution pour l'exercice 68 · Énoncé p. 642 · Indication p. 654 (Un petit lemme utile en arithmétique)
Pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a $a-b$ divise $a^k - b^k$ (formule de Bernoulli). D'où avec $P = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k X^k$ où pour tout k, $\alpha_k \in \mathbb{Z}$ on a

$$P(a) - P(b) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \left(a^k - b^k\right)$$

est divisible par $a-b$.

Solution pour l'exercice 75 · Énoncé p. 644 · Indication p. 655 (Petit théorème de Fermat et coefficients binomiaux)
On effectue tous les calculs dans $\frac{\mathbb{Z}}{p}Z$ et $\frac{\mathbb{Z}}{p}\mathbb{Z}[X]$.

D'après le petit théorème de Fermat les polynômes $(X+1)^p$ et X^p+1 coïncident sur tout $\frac{\mathbb{Z}}{p}\mathbb{Z}$, car pour tout a, $(a+1)^p = a+1 = a^p+1$.

Donc le polynôme $Q = (X+1)^p - (X^p+1)$ admet au moins p racines.

Or il est de degré inférieur ou égal à $p-1$, en effet $(X+1)^p$ et X^p+1 sont tous les deux de degré p et ont le même coefficient dominant (égal à 1).

Par conséquent $Q = 0$ c'est à dire

$$(X+1)^p = X^p + 1$$

Par le binôme, comme $(X+1)^p = 1 + \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} X^k + X^p$ on en déduit que, dans $\frac{\mathbb{Z}}{p}\mathbb{Z}$, pour tout k entre 1 et $p-1$, $\binom{p}{k} = 0$ ce qui est le résultat recherché.

Chapitre 19

Fractions Rationnelles

Énoncés 669
Le plus important 669
Fractions rationnelles 669
Indications 680

Énoncés

Dans tout le TD, sauf mention du contraire, $\mathbb{K}$ est un corps.

Le plus important

Travailler en autonomie sur **des décompositions en éléments simples explicites**, par exemple dans le cahier de calcul.

Fractions rationnelles

Exercice 1 (◔★ Rigidité)
Soient F_1 et F_2 dans $\mathbb{K}(X)$ dont les fonctions rationnelles associées coïncident sur une infinité de points.

Montrer que $F_1 = F_2$.

Indication p. 680

Exercice 2 (◔★♣ Le classique P' sur P)
Soit $P \in \mathbb{C}[X]$.

Déterminer la décomposition en éléments simples de

$$\frac{P'}{P}.$$

Indication p. 680

Exercice 3 (◔★ Racines de l'unité)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Déterminer la décomposition en éléments simples de

$$\frac{1}{X^n - 1}.$$

Indication p. 680

Exercice 4 (◔★ Un calcul qui revient souvent)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Déterminer la décomposition en éléments simples de

$$\frac{1}{X(X-1)(X-2)\cdots(X-n)}.$$

(Exprimer le résultat à l'aide de factorielles).

Indication p. 680

Exercice 5 (◑★ Gauss-Lucas)
Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme non constant.

Montrer que les racines de P' peuvent s'écrire comme barycentres des racines de P.

Indication p. 680

Exercice 6 (◔★ Le changement de variables à connaître)
Soit $F \in \mathbb{C}(X)$ dont aucun pôle n'est de module 1 et $[a,b] \in]-\pi,\pi[$.

Montrer qu'il existe $G \in \mathbb{C}(X)$ et $[\alpha,\beta] \subset]-\infty,+\infty[$ tel que

$$\int_a^b F\left(e^{i\theta}\right) \mathrm{d}\theta = \int_\alpha^\beta G(t)\,\mathrm{d}t.$$

Commenter.

Indication p. 680

Exercice 7 (◔★ Quelques calculs de sommes)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes:

1. $$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$$

2. $$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$$

Indication p. 680

Exercice 8 (◔★ Quelques sommes de calculs)
Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer les sommes suivantes:

1. $$\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n \setminus \{1\}} \frac{1}{1-\omega}$$

2. $$\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n \setminus \{1\}} \frac{1}{(1-\omega)^2}$$

Indication p. 680

Exercice 9 (◔★ Des décompositions en éléments simples)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Décomposer en éléments simples les fractions rationnelles suivantes.

1. Pour $m \in \mathbb{N}$, et $\lambda \in \mathbb{K}$,
$$\frac{X^m}{(X-\lambda)^n}.$$

2.
$$\frac{nX^{n-1}}{(X^n-1)^2}.$$

3.
$$\frac{1}{(X^n-1)^2}.$$

4.
$$\frac{X^{n-1}}{X^n-1}.$$

5.
$$\frac{X^n-1}{X^n+1}.$$

6.
$$\frac{1}{(X-1)(X^n-1)}.$$

Indication p. 680

Exercice 10 (◔★ Fractions rationnelles et racines)
Soit $A \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme.

Montrer que

$$(\exists F \in \mathbb{K}(X), F^2 = A) \Leftrightarrow (\exists P \in \mathbb{K}[X], P^2 = A).$$

Indication p. 681

Exercice 11 (◔★ Quelques redites du chapitre polynômes)
1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé sur $\mathbb{R}$.

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(P'(x))^2 - P(x)P''(x) \geq 0$.
2. Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P'|P$.

Indication p. 681

Exercice 12 (◔☆ Rolle polynomial sans Rolle)
Dans cet exercice on n'utilisera pas le théorème de Rolle.

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé sur $\mathbb{R}$, de racines $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_r$ et de multiplicités $m_1, m_2, ..., m_r$.
1. Que dire des multiplicités de $\lambda_1, ..., \lambda_r$ en tant que racines de P' ?
2. Déterminer les variations de $F = \frac{P'}{P}$ sur son ensemble de définition et faire un schéma.
3. Montrer que pour tout $k \in [\![1, r-1]\!]$, P' admet une racine dans l'intervalle $]\lambda_k, \lambda_{k+1}[$.
4. Conclure que P' est scindé.

Indication p. 681

Exercice 13 (◑★ Degré et dérivée ou dérivée discrète)
Soit $F \in \mathbb{K}(X)$.

On définit

$$\begin{aligned} D : \mathbb{K}(X) &\to \mathbb{K}(X) \\ F &\mapsto F' \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \Delta : \mathbb{K}(X) &\to \mathbb{K}(X) \\ F &\mapsto F(X+1) - F(X) \end{aligned}$$

1. Soit $F \in \mathbb{K}(X)$. Montrer que $\deg(D(F)) \leq \deg(F) - 1$ et que $\deg(\Delta(F)) \leq \deg(F) - 1$.
2. Donner un exemple de fraction rationnelle non nulle où les inégalités précédentes sont strictes.
3. Montrer que si $\deg(F) \neq 0$ alors
   - ▷ $\deg(D(F)) = \deg(F) - 1$
   - ▷ $\deg(\Delta(F)) = \deg(F) - 1$.

Indication p. 681

Exercice 14 (◔★ Arctangente n'est pas une fraction rationnelle)
Montrer qu'il n'existe pas de $F \in \mathbb{R}(X)$ tel que, $\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \arctan(x)$.

Indication p. 681

Exercice 15 (◑★ Primitivation de fractions rationnelles)
On dit que $F \in \mathbb{K}(X)$ est *une dérivée* ssi il existe $G \in \mathbb{K}(X)$ telle que $G' = F$.

1. Parmi les fractions rationnelles suivantes lesquelles sont des dérivées ? (Justifier avec précision)

   (i) $\frac{1}{X}$
   (ii) $\frac{1}{X^2}$
   (iii) $\frac{1}{X^2+1}$
   (iv) $\frac{X}{X^2+1}$
   (v) $\frac{1}{(X^2+1)^2}$
   (vi) $\frac{X}{(X^2+1)^2}$
2. Donner une CNS sur la décomposition en éléments simples de $F \in \mathbb{C}(X)$ pour que F soit une dérivée.
3. Donner une CNS sur la décomposition en éléments simples de $F \in \mathbb{R}(X)$ pour que F soit une dérivée.

Indication p. 681

Exercice 16 (◔★ Sommes de Newton et DES)
Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$ tq $a_0 \neq 0$ et $\lambda_1, ..., \lambda_n$ ses racines comptées avec multiplicités.

1. Exprimer avec deux méthodes différentes que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\lambda_k}$$

en fonction des coefficients de P.

2. Exprimer (avec la méthode de votre choix) la somme

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(\lambda_k)^2}$$

en fonction des coefficients de P.

Indication p. 682

Exercice 17 (◑★ Image d'une fraction rationnelle)
Soit $F \in \mathbb{C}(X)$ une fraction rationnelle. Soit $\mathcal{P}_F$ l'ensemble des pôles de F.

Montrer que l'une des trois propositions suivantes est vraie:
- ▹ il existe $\gamma \in \mathbb{C}$, $F(\mathbb{C} \setminus \mathcal{P}_F) = \{\gamma\}$,
- ▹ $F(\mathbb{C} \setminus \mathcal{P}_F) = \mathbb{C}$,
- ▹ il existe $\gamma \in \mathbb{C}$, $F(\mathbb{C} \setminus \mathcal{P}_F) = \mathbb{C} \setminus \{\gamma\}$.

Indication p. 682

Exercice 18 (◔★ Fractions rationnelles paires et impaires)
Soit $F \in \mathbb{K}(X)$. On dit que F est paire si $F(X) = F(-X)$, et on dit que F est impaire si $F(X) = -F(-X)$.

Montrer que
(i) F paire **ssi** il existe $G \in \mathbb{K}(X)$ telle que $F(X) = G(X^2)$.
(ii) F impaire **ssi** il existe $G \in \mathbb{K}(X)$ telle que $F(X) = XG(X^2)$.

Indication p. 682

Exercice 19 (◑★ Tchebychev caché dans un TD de fractions rationnelles)

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe un et unique polynôme $T_n \in \mathbb{Z}[X]$ tel que

$$T_n\left(\frac{1}{2}\left(X+\frac{1}{X}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(X^n + \frac{1}{X^n}\right)$$

et commenter.

2. Décomposer $\frac{1}{T_n}$ en éléments simples.

Indication p. 682

Exercice 20 (◑★ Tangente de l'angle multiple)

1. Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'ensemble D_n intersection des ensembles de définition de $x \mapsto \tan(nx)$ et de $x \mapsto \tan(x)$.

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe une et unique fraction rationnelle $F_n \in \mathbb{R}(X)$ telle que

$$\forall x \in D_n, \tan(nx) = F_n(\tan(x))$$

Indication p. 682

Exercice 21 (◑★ Des relations parmi d'autres)

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ scindé à racines simples de degré ≥ 2, et $\lambda_1, ..., \lambda_n$ ses racines. On suppose que 0 n'est pas racine de P.

Montrer que

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\lambda_k P'(\lambda_k)} = -\frac{1}{P(0)}$

2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{P'(\lambda_k)} = 0$

3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{P''(\lambda_k)}{\lambda_k P'(\lambda_k)} = -\frac{P''(0)}{P(0)}$

Indication p. 683

Exercice 22 (◑☆ Minoration des valeurs d'un polynôme)
Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n \in \mathbb{N}^*$ **unitaire**.

1. Montrer que

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k}}{k!(n-k)!} P(k) = 1.$$

2. En déduire que

$$\forall k \in [\![0, n]\!], |P(k)| \geq \frac{n!}{2^n}.$$

3. Montrer qu'il existe un polynôme P tel que l'égalité précédent est une inégalité.

Indication p. 683

Exercice 23 (◕★ Un autre exemple d'anneau à valuation)
On note pour $n \in \mathbb{Z}$, $\mathbb{K}_n(X) = \{F \in \mathbb{K}(X) \mid \deg(F) \leq n\}$.

1. Montrer que $\mathbb{K}_0(X)$ est un anneau.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$.

Montrer que $\mathbb{K}_{-n}(X)$ est un idéal de $\mathbb{K}_0(X)$.

3. Déterminer les idéaux de $\mathbb{K}_0(X)$.

Indication p. 683

Exercice 24 (◕☆ Idéaux des principaux)
Soit $Q \in \mathbb{K}[X]$ non nul.

On pose

$$D_Q = \left\{ \frac{P}{Q^n}, (P, n) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{N} \right\}.$$

1. Montrer que D_Q est un sous-anneau de $\mathbb{K}(X)$.

2. Quels sont les idéaux de D_Q ?

Indication p. 683

Exercice 25 (◔★ Séries de Laurent finies)
Soit $a \in \mathbb{C}$.

On appelle ensemble des séries de Laurent finies, noté $\mathbb{C}\left[(X-a)^{\pm 1}\right]$ l'ensemble $\text{Vect}\left(\left\{(X-a)^k, k \in \mathbb{Z}\right\}\right)$.

Montrer que $\mathbb{C}\left[(X-a)^{\pm 1}\right]$ est une sous-algèbre stricte de $\mathbb{C}(X)$.

Indication p. 683

Exercice 26 (◕☆ Coefficients de Taylor d'une fraction rationnelle)
Soit $F \in \mathbb{K}(X)$.

Soit $\alpha \in \mathbb{K}$ qui n'est pas un pôle de F.

Montrer que la suite $\left(\frac{F^{(k)}(\alpha)}{k!}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ vérifie une relation de récurrence linéaire.

Indication p. 683

Exercice 27 (◔☆ Fractions rationnelles périodiques)
Déterminer l'ensemble des fractions rationnelles $F \in \mathbb{R}(X)$ telles que la fonction rationnelle associée est périodique.

Indication p. 683

Exercice 28 (◕☆ Fractions rationnelles conservant le cercle unité)
Déterminer les fractions rationnelles $F \in \mathbb{C}(X)$ dont aucun pôle n'est de module 1 et telles que $F(\mathbb{U}) \subset \mathbb{U}$.

Indication p. 684

Exercice 29 (◕☆ Comment faire sans Lagrange ?)
Soit $F \in \mathbb{C}(X)$. On note $\mathcal{P}_F$ l'ensemble des poles de F.

Montrer que **si**

$$\forall n \in \mathbb{Z} \setminus \mathcal{P}_F, F(n) \in \mathbb{Q}$$

alors

$$F \in \mathbb{Q}(X)$$

(c'est à dire il existe $\tilde{F} \in \mathbb{Q}(X) \subset \mathbb{C}(X)$ tel que $F = \tilde{F}$).

Indication p. 684

Exercice 30 (◑★ Morphismes et automorphismes de $\mathbb{K}(X)$: premier sens)

1. Soient $F \in \mathbb{K}(X)$ et $G \in \mathbb{K}(X)$. Justifier la bonne définition de $F(G)$.

2. Soit $G \in \mathbb{K}(X)$.

Montrer que

$$\begin{aligned}\Gamma_G : \mathbb{K}(X) &\to \mathbb{K}(X)\\ F &\mapsto F(G)\end{aligned}$$

est un endomorphisme d'algèbre.

3. Soit Φ un endomorphisme d'algèbre de $\mathbb{K}(X)$.

Montrer que Φ est de la forme Γ_G pour un certain $G \in \mathbb{K}(X)$.

Pour $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$ on note

$$H_M = \frac{aX+b}{cX+d}.$$

1. Montrer que pour $M_1, M_2 \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$, $H_{M_1}\left(H_{M_2}\right) = H_{M_1 M_2}$.

2. Soit $M \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$.

Montrer que Γ_{H_M} est un automorphisme de $\mathbb{K}(X)$.

Indication p. 684

Exercice 31 (◕★ Automorphismes de $\mathbb{K}(X)$: la réciproque)
Commencer par traiter l'exercice 30.

1. Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$ tels que $A \wedge B = 1$ et soient $(a_0, ..., a_n), (b_0, ..., b_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tels que

$$\sum_{k=0}^{n} (a_k - b_k X) A^k B^{n-k} = 0.$$

Montrer que A et B sont dans $\mathbb{K}_1[X]$.

2. Soient $F, G \in \mathbb{K}(X)$ tels que

$$F(G) = X.$$

Montrer qu'il existe $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$ tels que

$$G = \frac{aX+b}{cX+d}.$$

3. Déterminer l'ensemble des automorphismes d'algèbre de $\mathbb{K}(X)$.

Indication p. 684

Exercice 32 (◕★ Encore du Tchebychev ?)
Soit $F \in \mathbb{C}(X)$.

Commenter la bonne définition de $F\left(\frac{1}{X}\right)$.

Montrer que $F(X) = F\left(\frac{1}{X}\right)$ **ssi** il existe $G \in \mathbb{C}(X)$ telle que $F = G\left(X + \frac{1}{X}\right)$.

Indication p. 684

Indications

Indication 1 · Énoncé p. 669 (Rigidité)
Par définition $\frac{P_1}{Q_1} = \frac{P_2}{Q_2}$ ssi $P_1Q_2 - P_2Q_1 = 0$.

Indication 2 · Énoncé p. 669 (Le classique P' sur P)
Dans $\mathbb{C}[X]$ tous les polynômes sont scindés.

Indication 3 · Énoncé p. 669 (Racines de l'unité)
Les racines sont connues et sont simples ($\mathbb{U}_n$).

Indication 4 · Énoncé p. 670 (Un calcul qui revient souvent)
Les racines sont connues et sont simples ($[\![0, n]\!]$).

Indication 5 · Énoncé p. 670 (Gauss-Lucas)
Commencer par scinder P, $P = \alpha \prod_{k=1}^{r} (X - \lambda_k)^{m_k}$ et traiter le cas des racines de P' qui sont racines de P.

Considérer la décomposition en éléments simples de $\frac{P'}{P}$ pour montrer que pour tout z qui n'est pas racine de P,

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \sum_{k=1}^{r} \frac{m_k}{|z - \lambda_k|^2}(z - \lambda_k).$$

Évaluer ensuite en une racine de P' qui n'est pas racine de P, et constater que pour tout k, $\frac{m_k}{|z-\lambda_k|^2} > 0$.

Indication 6 · Énoncé p. 670 (Le changement de variables à connaître)
Changement de variables $t = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$.

Ainsi on peut intégrer toute fraction rationnelle en $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$.

Indication 7 · Énoncé p. 670 (Quelques calculs de sommes)
DÉS et télescopage.

Indication 8 · Énoncé p. 671 (Quelques sommes de calculs)
DÉS.

Plus précisément regarder $\frac{P'}{P}$ avec $P = \frac{X^n-1}{X-1}$.

Indication 9 · Énoncé p. 671 (Des décompositions en éléments simples)

1. Remarquer que $X = (X - \lambda) + \lambda$ et binôme.
2. Déterminer la décomposition en éléments simples de $\frac{1}{X^n-1}$ et dériver
3. Idem et l'élever au carré.
4. RAS.
5. Les pôles sont simples et sont les éléments de $\mathbb{U}_{2n} \setminus \mathbb{U}_n$.

6. Les parties polaires autres que celles de 1 sont immédiates. Il n'en reste plus qu'une à déterminer.

Indication 10 · Énoncé p. 672 (Fractions rationnelles et racines)
Faire exactement la même preuve que pour $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Z}$ (par exemple descente infinie, ou irréductibilité et Euclide, ou parité des valuations en les irréductibles, etc.).

Indication 11 · Énoncé p. 672 (Quelques redites du chapitre polynômes)
1. DES de $\frac{P'}{P}$ puis dériver. Constater qu'un réel au carré est positif. (Traiter à part les racines de P si nécessaire).
2. Idem, DES de $\frac{P'}{P}$ et unicité de la décomposition en éléments simples.

Indication 12 · Énoncé p. 672 (Rolle polynomial sans Rolle)
1. Multiplicités $m_k - 1$.
2. Décroissant sur chaque intervalle $]\lambda_k, \lambda_{k+1}[$ et de limites $+\infty$ en λ_k^+, et $-\infty$ en λ_k^-.
3. TVI
4. Compter les racines.

Indication 13 · Énoncé p. 673 (Degré et dérivée ou dérivée discrète)
1. Rappeler le cas des polynômes, remarquer que

$$D\left(\frac{P}{Q}\right) = \frac{P'Q - Q'P}{Q^2}$$

et

$$\Delta\left(\frac{P}{Q}\right) = \frac{\Delta(P)Q - Q\Delta(P)}{Q(X+1)\ Q(X)}$$

puis majorer le degré d'une somme.
2. Par exemple $1 - \frac{1}{X^2}$.
3. Plusieurs façons de procéder. Par exemple, sur $\mathbb{C}(X)$, considérer la décomposition en éléments simples de $\frac{F'}{F}$ (dérivée logarithmique) puis étudier le comportement de l'évaluation en z lorsque $|z| \to +\infty$ pour conclure sur le degré. Ou encore juste considérer le cas d'égalité dans le degré d'une somme pour $P'Q - PQ'$ en utilisant $\deg(P) \neq \deg(Q)$.

Indication 14 · Énoncé p. 673 (Arctangente n'est pas une fraction rationnelle)
Remarquer que pour une fraction rationnelle admettant une limite finie en $+\infty$, elle admet alors la même valeur en $-\infty$.

Indication 15 · Énoncé p. 673 (Primitivation de fractions rationnelles)
1. Pour justifier qu'une fraction rationnelle est une dérivée il suffit d'exhiber G tel que $G' = F$.

Pour justifier que ce n'est pas une dérivée, au choix montrer que les primitives en tant que fonctions ne sont pas des fractions rationnelles (pourquoi est-ce suffisant ?)

et pour cela étudier par exemple le comportement en l'infini ou encore faire une étude préliminaire sur le degré. On obtient

(i) Pas une dérivée.
(ii) Dérivée.
(iii) Pas une dérivée.
(iv) Pas une dérivée.
(v) Pas une dérivée.
(vi) Dérivée.

2. Une condition suffisante et que les coefficients des termes en $\frac{1}{(X-\lambda)^1}$ sont nuls. Pour montrer qu'elle est nécessaire écrire une décomposition en élément simple de G tel que $G' = F$ puis dériver.

3. Idem pour les éléments simples correspondant aux racines réelles. Pour les polynômes de degré 2 il est suffisant que les seuls termes non nuls soient de la forme $\frac{c(2X+a)}{(X^2+aX+b)^n}$ avec $n \geq 2$, et montrer de même que c'est nécessaire.

Indication 16 · Énoncé p. 674 (Sommes de Newton et DES)

1. Méthode polynomiale: mettre au même dénominateur et utiliser les relations coefficients-racines.

Méthode fraction rationnelle: Décomposer en éléments simples $\frac{P'}{P}$ et évaluer en 0.

2. Idem et dériver.

Indication 17 · Énoncé p. 674 (Image d'une fraction rationnelle)
Si il existe γ tel que $\gamma \notin F(\mathbb{C})$ alors avec $F = \frac{P}{Q}$ on a $P - \gamma Q$ ne s'annule jamais donc est constant.

Indication 18 · Énoncé p. 674 (Fractions rationnelles paires et impaires)
Rappeler le cas des polynômes et traiter numérateur et dénominateur.

Indication 19 · Énoncé p. 675 (Tchebychev caché dans un TD de fractions rationnelles)

1. Il s'agit bien entendu des polynômes de Tchebychev. Établir par exemple l'existence à l'aide de la relation de récurrence.

2. Commencer par déterminer l'ensemble des racines de T_n et montrer qu'elles sont simples.

Ensuite écrire que pour θ qui n'est pas de la forme $\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}$.

$$\frac{1}{T_n(\cos(\theta))} = \frac{1}{\cos(n\theta)}$$

et considérer l'équivalent quand θ tend vers $\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}$.

Indication 20 · Énoncé p. 675 (Tangente de l'angle multiple)

1. RAS.

2. Procéder par récurrence.

Indication 21 · Énoncé p. 675 (Des relations parmi d'autres)
Il s'agit dans chaque cas d'effectuer une décomposition en éléments simples, plus précisément effectuer la DSE de

1. $\dfrac{1}{P'}$

2. $\dfrac{X}{P}$

3. $\dfrac{P''}{P}$

Indication 22 · Énoncé p. 676 (Minoration des valeurs d'un polynôme)

1. Considérer la décomposition en éléments simples de $\frac{P}{X(X-1)\cdots(X-n)}$, puis considérer l'équivalent lorsque $n \to +\infty$ (ou alors multiplier par X).

2. Constater à l'aide de l'égalité précédente que

$$|\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\frac{1}{n!}\binom{n}{k}P(k)\ | = 1$$

et que par somme usuelle

$$\sum_{k=0}^{n}|(-1)^{n-k}\frac{1}{n!}\binom{n}{k}P(k)\ | \leq \frac{2^n}{n!}\max_{k\in[\![0,n]\!]}(|P(k)|).$$

3. Regarder un polynôme équi-oscillant entre ces bornes, i.e l'interpolation de Lagrange en les points $\left(k,(-1)^{n-k}\frac{n!}{2^n}\right)$ et vérifier le caractère unitaire.

Indication 23 · Énoncé p. 676 (Un autre exemple d'anneau à valuation)

1. Utiliser les règles de calcul des degrés.

2. Idem.

3. Montrer que si on a une fraction de degré $-n$ on a toutes les fractions de degré $-n$.

Indication 24 · Énoncé p. 676 (Idéaux des principaux)

1. Comme pour les décimaux.

2. Montrer la principalité.

Indication 25 · Énoncé p. 677 (Séries de Laurent finies)
Pour le caractère strict montré que si $b \neq a$ alors $\frac{1}{X-b} \notin \mathbb{C}\big[(X-a)^{\pm 1}\big]$.

Indication 26 · Énoncé p. 677 (Coefficients de Taylor d'une fraction rationnelle)
Montrer qu'il existe deux polynômes P et Q tels que pour tout n assez grand

$$n!\sum_{k=0}^{n}\frac{Q^{(k)}}{k!}(\alpha)\frac{F^{(n-k)}}{(n-k)}(\alpha) = 0.$$

Indication 27 · Énoncé p. 677 (Fractions rationnelles périodiques)
Par exemple montrer qu'il existe γ tel que F et γ coïncident en une infinité de points.

Indication 28 · Énoncé p. 677 (Fractions rationnelles conservant le cercle unité)
Commencer par traiter le cas des polynômes, et constater que les X^n conviennent.

Remarquer que pour $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{U}$,

$$\frac{X-\alpha}{\overline{\alpha}X-1}$$

convient et qu'un produit de fonctions qui convient, convient.

Enfin remarquer que pour α une racine non nulle $\frac{1}{\overline{\alpha}}$ est un pôle.

Indication 29 · Énoncé p. 677 (Comment faire sans Lagrange ?)
Constater qu'en s'inspirant de Lagrange, si n n'est pas un pôle de F on a

$$F = \left(\frac{F(X)-F(n)}{X-n}\right)(X-n) + F(n).$$

Constater que la «hauteur» (somme des degrés d'une forme irréductible) de $\frac{F(X)-F(n)}{X-n}$ est strictement plus petite que celle de F.

Alternativement remarquer que pour le système en les coefficients de P et Q issu de $P(n) - F(n)Q(n) = 0$ est un système rationnel admettant une solution complexe donc par un argument de pivot une solution rationnelle. Conclure avec assez de points et rigidité.

Indication 30 · Énoncé p. 678 (Morphismes et automorphismes de $\mathbb{K}(X)$: premier sens)

1. Constater que pour $P \in \mathbb{K}[X]$, $P(F)$ a un sens et est non nul.
2. Évaluation.
3. $G = \Phi(X)$.
4. Faire le calcul explicite.
5. Expliciter l'inverse.

Indication 31 · Énoncé p. 678 (Automorphismes de $\mathbb{K}(X)$: la réciproque)

1. On a A divise $(a_0 - b_0X)B^n$ et idem pour B.
2. Écrire $F = \frac{\sum a_k X^k}{\sum b_k X^k}$ et $G = \frac{A}{B}$.
3. Il ne s'agit plus qu'à faire la synthèse à l'aide de l'exercice 30 (et un automorphisme est surjectif).

Indication 32 · Énoncé p. 679 (Encore du Tchebychev ?)
Remarquer l'astuce des physiciens: si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ alors $\frac{a}{b} = \frac{a+c}{b+d}$ appliquée à $\frac{P(X)}{Q(X)}$ et $\frac{P(\frac{1}{X})}{Q(\frac{1}{X})}$.

Remarquer (en utilisant les résultats d'un mathématicien russe bien connu) que $X^n + \frac{1}{X^n}$ est un polynôme en $X + \frac{1}{X}$.

Chapitre 20

Intégration

Énoncés 686
Avant toute chose 686
Propriétés du cours 686
Les indispensables 688
Variations autour des indispensables 693
Calculs abstraits 698
Calculs explicites 706
Indications 714
Solutions 726

Énoncés

Dans tout le sujet, sauf mention du contraire, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $[a,b]$ $(a < b)$ est un segment de $\mathbb{R}$.

De plus pour $f \in \mathcal{C}^0_{pm}([a,b],\mathbb{C})$ on notera (dans ce TD),

- ▹ la norme infinie de f:
$$\|f\|_\infty = \sup_{t\in[a,b]} (|f(t)|)$$
- ▹ la valeur moyenne de f:
$$⨍_a^b f = \frac{1}{b-a}\int_a^b f$$
- ▹ pour $p \geq 1$ la norme L^p de f:
$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(t)|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$
- ▹ $f \in \mathbb{K}(X)$ pour f est une fonction fraction rationnelle i.e il existe $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ tels que $\forall t \in [a,b]$, $f(t) = \frac{P(t)}{Q(t)}$ en supposant que Q ne s'annule pas sur $[a,b]$ (il s'agit d'un abus de notation, cf TD dédié).

Avant toute chose

Faire régulièrement les exercices du cahier de calcul.

Propriétés du cours

Exercice 1 (◑★♣ Sommes de Riemann)
Soit $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{C})$.

1. Montrer que
$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{b-a}\int_a^b f.$$

2. On suppose de plus que $f \in \mathrm{Lip}([a,b],\mathbb{C})$.

Montrer que
$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f + O_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\right).$$

3. Que dire si $f \in \mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{C})$?

4. Que dire dans le cas $f \in \mathcal{C}^0_{pm}([a,b],\mathbb{R})$?

Indication p. 714

Exercice 2 (◔★♣ Une inégalité fondamentale)
Soient $f, g \in \mathcal{C}^0_{pm}([a,b],\mathbb{C})$.

Montrer que

$$\left|\int_a^b fg\right| \leq \|f\|_\infty \int_a^b |g|.$$

Indication p. 714

Exercice 3 (◔★♣ Intégrales et parité)

1. Soit $f \in \mathcal{C}^0_{pm}([-a,a],\mathbb{R})$ une fonction paire.

Montrer que

$$\int_{-a}^a f = 2\int_0^a f.$$

2. Soit $f \in \mathcal{C}^0_{pm}([-a,a],\mathbb{R})$ une fonction impaire.

Montrer que

$$\int_{-a}^a f = 0.$$

Indication p. 714

Exercice 4 (◔★♣ Égalités et inégalités de la valeur moyenne)

1. Soit $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$.

Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$⨍_a^b f = f(c).$$

2. Que dire dans le cas où $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{C})$? Que dire dans le cas $f \in \mathcal{C}^0_{pm}([a,b],\mathbb{R})$?

3. Soit $f \in \mathcal{C}^0_{pm}([a,b],\mathbb{C})$.

Montrer que

$$\left|⨍_a^b f\right| \leq \|f\|_\infty.$$

Indication p. 714

Les indispensables

Exercice 5 (◔★ Convergence uniforme et convergence de l'intégrale)
Soit $f \in \mathcal{C}^0_{pm}([a,b],\mathbb{C})$ et $(f_n) \in \left(\mathcal{C}^0_{pm}([a,b],\mathbb{C})\right)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions.

Montrer que

$$\|f_n - f\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \Rightarrow \int_a^b f_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f.$$

Que dire de la réciproque ?

Indication p. 714

Exercice 6 (◔★ Linéarisation et Cie)
Soit $\omega > 0$.

1. Soit $\varphi \in \mathbb{R}$.

Calculer

$$⨍_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \cos(\omega t)\cos(\omega t + \varphi)\,\mathrm{d}t.$$

2. Soient $n, m \in \mathbb{N}$.

Calculer

$$⨍_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \cos(n\omega t)\cos(m\omega t)\,\mathrm{d}t.$$

Indication p. 714

Exercice 7 (◔★ Prolongement de la valeur moyenne)
Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+,\mathbb{C})$.

Montrer que

$$\begin{aligned}\varphi :]0,+\infty[&\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto ⨍_0^x f\end{aligned}$$

admet un prolongement par continuité en 0.

Indication p. 714

Exercice 8 (◔★ Approximation d'un Dirac)
Soit $\chi \in \mathcal{C}^0_{pm}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ définie par $\chi = 1_{[0,1]}$.

Montrer que pour tout $f \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{C})$,

$$\int_0^1 f(t) n\chi(nt)\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(0).$$

Indication p. 714

Exercice 9 (◔★ Des orthogonaux à foison)
Soit $f \in \mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{C})$.

1. Montrer que

$$\left(\forall g \in \mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{C}), \int_a^b fg = 0\right) \Leftrightarrow (f = 0).$$

2. Montrer que

$$\left(\forall g \in \mathrm{Esc}([a,b], \mathbb{C}), \int_a^b fg = 0\right) \Leftrightarrow (f = 0).$$

3. Montrer que

$$\left(\forall (\alpha,\beta) \in [a,b]^2, \int_\alpha^\beta f = 0\right) \Leftrightarrow (f = 0).$$

Indication p. 714

Exercice 10 (◔★ Wallis)
Pour $n \in \mathbb{N}$ on note

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)^n\,\mathrm{d}t.$$

1. Déterminer une relation de récurrence satisfaite par la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Déterminer une expression explicite à l'aide de factorielles de la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Déterminer un équivalent simple de la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Indication p. 715

Exercice 11 (◔★ Inégalité de Cauchy-Schwarz)
Soient $f, g \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$. Montrer que

$$|\int_a^b fg| \leq \sqrt{\int_a^b f^2}\sqrt{\int_a^b g^2}.$$

Indication p. 715

Exercice 12 (◑★ Inégalité de Holder)

1. Soient $(p,q) \in (1,+\infty)^2$ tels que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ et $(a,b) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$. Montrer que $ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$.

2. Soit $(p,q) \in [1,+\infty]^2$ tels que

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

Soient $f, g \in \mathcal{C}^0_{pm}([a,b],\mathbb{C})$

Montrer que

$$|\int_a^b fg\ | \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Indication p. 715

Exercice 13 (◑★ Inégalité de Minkowski)
Soient $f, g \in \mathcal{C}^0_{pm}([a,b],\mathbb{C})$ et $p \in [1,+\infty]$.

Montrer que

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Indication p. 715

Exercice 14 (◑★ Vers la véritable inégalité de Jensen)
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $\varphi : I \to \mathbb{R}$ convexe.

On suppose de plus que φ est continue.

Soit $f \in \mathcal{C}^0_{pm}([a,b], I)$.

Montrer que

$$\varphi\left(\fint_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right) \leq \fint_a^b \varphi(f(t))\,\mathrm{d}t.$$

Indication p. 715

Exercice 15 (◔★ Lemme de Lebesgue cas $\mathcal{C}^1$)
Soit $\omega > 0$.

Soit $f \in \mathcal{C}^1([a,b], \mathbb{C})$.

Montrer que

$$\int_a^b f(t)\sin(n\omega t)\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Indication p. 716

Exercice 16 (◔★ Moyenne d'une fonction périodique)
Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ une fonction périodique.

Soit $T > 0$ une période de f et $a \in \mathbb{R}$. Montrer que la valeur de

$$\fint_a^{a+T} f$$

ne dépend pas
1. de $a \in \mathbb{R}$,
2. de $T > 0$ une période de f.

On appelle cette valeur **la** valeur moyenne de f.

Indication p. 716

Exercice 17 (◔★ Périodicité et primitivation)
Déterminer les fonctions continues périodiques de primitives périodiques.

Indication p. 716

Exercice 18 (◔★ Un petit changement très utile)
Soit $f \in \mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{C})$.

1. Montrer qu'il existe une et unique fonction $\tilde{f} \in \mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R}_+)$ telle que

$$\tilde{f}' = |f'|$$

et

$$\tilde{f}(a) = |f(a)|.$$

2. Montrer que

$$\forall t \in [a,b], |f(t)| \leq \tilde{f}(t).$$

Indication p. 716

Exercice 19 (◔★ Vers la formule de Duhamel)
Soit $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{C})$ et $\lambda \in \mathbb{C}$.

On pose pour tout $t \in [a,b]$,

$$y(t) = \int_a^t e^{\lambda(t-s)} f(s)\,\mathrm{d}s.$$

Montrer que y est dérivable et exprimer y' en fonction de y et f.

Indication p. 716

Exercice 20 (◔★ Vers le lemme de Gronwall version intégrale)
Soit $y \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R}_+)$ et $\lambda \in \mathbb{R}_+$.

On suppose que pour tout $t \in [a,b]$,

$$y(t) \leq y(a) + \int_a^t \lambda y(s)\,\mathrm{d}s.$$

Montrer que pour tout $t \in [a,b]$,

$$y(t) \leq y(a)e^{\lambda(t-a)}.$$

Indication p. 717

Exercice 21 (◑★ Vers le lemme d'Abel)
On admettra dans cet exercice le résultat suivant (convergence absolue): étant donnée une fonction $z \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$ **si** $\int_0^x |z(t)|\,\mathrm{d}t$ converge lorsque $x \to +\infty$ **alors** $\int_0^x z(t)\,\mathrm{d}t$ converge quand $x \to +\infty$.

Soient $g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$ de primitives bornées et $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ décroissante et tendant vers 0.

Montrer que la fonction $\int_0^x f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ converge lorsque $x \to +\infty$.

Indication p. 717

Exercice 22 (◔★ Bosse glissante)
Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on note

$$\varphi_n : [0,1] \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \begin{cases} n^2 x & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{n}\right] \\ n(2-nx) & \text{si } x \in \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que

$$\forall x \in [0,1], \lim_{n\to+\infty} \varphi_n(x) = 0.$$

2. Déterminer, si elle existe,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \varphi_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

3. Commenter.

Indication p. 717

Variations autour des indispensables

Exercice 23 (◔★ Prolongement par continuité des moments)
Soit $n \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$.

Déterminer, si elle existe,

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^{n+1}} \int_0^x t^n f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Indication p. 717

Exercice 24 (◔★ Jensen pondéré)
Soit $\omega \in \mathcal{C}^0_{pm}([a,b],\mathbb{R}_+^*)$.

Soit $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$.

Soit $\varphi : f([a,b]) \to \mathbb{R}$ convexe.

Montrer que

$$\phi\left(\frac{1}{\int_a^b \omega(t)\mathrm{d}t}\int_a^b f(t)\omega(t)\mathrm{d}t\right) \leq \frac{1}{\int_a^b \omega(t)\mathrm{d}t}\int_a^b \phi(f(t))\omega(t)\mathrm{d}t.$$

Indication p. 717

Exercice 25 (◔★ Égalité de la moyenne bis)
Soit $\omega \in \mathcal{C}^0_{pm}([a,b],\mathbb{R}_+^*)$.

Soit $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$.

Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$f(c) = \frac{1}{\int_a^b \omega(t)\,\mathrm{d}t}\int_a^b f(t)\omega(t)\,\mathrm{d}t.$$

Indication p. 717

Exercice 26 (◔★ Inégalité de Cauchy-Schwarz bis)
Soit $\omega \in \mathcal{C}^0_{pm}([a,b],[0,+\infty[)$.

Soient $f,g \in \mathcal{C}^0_{pm}([a,b],\mathbb{C})$. Montrer que

$$\left|\mathrm{Re}\left(\int_a^b f\overline{g}\omega\right)\right| \leq \sqrt{\int_a^b |f|^2\omega}\sqrt{\int_a^b |g|^2\omega}.$$

Indication p. 717

Exercice 27 (◔☆ Cas d'égalité de l'inégalité triangulaire)
Déterminer une CNS sur $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{C})$ pour que

$$\left|\int_a^b f\right| = \int_a^b |f|.$$

Indication p. 717

Exercice 28 (◑★ Lemme de Lebesgue bis)
Soit $T > 0$ et $g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ une fonction T-périodique.

On note

$$\gamma = \fint_0^T g$$

la valeur moyenne de g (cf exercice 16).

Montrer que pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^1([a,b], \mathbb{C})$,

$$\int_a^b f(t)g(nt)\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f(t)\gamma\,\mathrm{d}t.$$

Indication p. 718

Exercice 29 (◑★ Lemme de Lebesgue cas $\mathcal{C}^0_{pm}$)
Soit $\omega > 0$.

Soit $f \in \mathcal{C}^0_{pm}([a,b], \mathbb{C})$.

Montrer que

$$\int_a^b f(t)\sin(n\omega t)\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Indication p. 718

Exercice 30 (◔★ Valeur moyenne globale et périodicité)
Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ T-périodique.

Montrer que

$$\fint_0^A f(t)\,\mathrm{d}t \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \fint_0^T f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Indication p. 718

Exercice 31 (◑★ Convergence des normes p)
Soit $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{C})$.

Montrer que

$$\|f\|_p \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} \|f\|_\infty.$$

Indication p. 718

Exercice 32 (◑☆ Seconde inégalité de la moyenne)
Soient $f \in \mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R})$ monotone et $g \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$.

1. Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = f(a)\int_a^c g(t)\,\mathrm{d}t + f(b)\int_c^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$

2. On suppose de plus que f est décroissante positive.

Montrer qu'il existe $d \in]a,b[$ tel que

$$\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = f(a)\int_a^d g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Indication p. 718

Exercice 33 (◔★ Orthogonalité, polynômes et changements de signe)
Soit $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$.

On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \int_a^b f(t)P(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Montrer que f s'annule au moins $n+1$ fois.

Indication p. 718

Exercice 34 (◔☆ Orthogonal au sinus et cosinus)
Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,\pi],\mathbb{R})$.

On suppose que

$$\int_0^\pi f(t)\cos(t)\,\mathrm{d}t = 0 \quad \text{et} \quad \int_0^\pi f(t)\sin(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Montrer que f s'annule au moins deux fois sur $[0,\pi]$.

Indication p. 718

Exercice 35 (◕★ Un début d'exemple de principe variationnel)
Soit $E = \{y \in \mathcal{C}^2([0,1],\mathbb{R}) \mid y(0) = y(1) = 0\}$.

Soit $g \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$.

On définit

$$\begin{aligned} F : E &\to \mathbb{R} \\ y &\mapsto \frac{1}{2}\int_0^1 (y')^2 + \frac{1}{4}\int_0^1 y^4 - \int_0^1 yg. \end{aligned}$$

Montrer que pour tout $y_0 \in E$ on a l'équivalence

$$\left(F(y_0) = \min_{y\in E}(F(y))\right) \Leftrightarrow (-y_0'' + y_0^3 = g).$$

Indication p. 718

Exercice 36 (◔☆ Moyenne et moyennes)
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ et $c \in]a,b[$.

Montrer que

$$\min\left(\fint_a^c f, \fint_c^b f\right) \leq \fint_a^b f \leq \max\left(\fint_a^c f, \fint_c^b f\right)$$

Indication p. 718

Exercice 37 (◑☆ Encore des moyennes prolongées en 0)
Soit $f \in \mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{R}_+^*)$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ on note

$$M(x) = \left(\fint_a^b f(t)^x \, \mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{x}}.$$

Montrer que M admet un prolongement par continuité en 0.

Indication p. 719

Exercice 38 (◑★ Approximation d'un Dirac bis)
Soit $\chi \in \mathcal{C}^0_{pm}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ telle que $\forall t > 1$, $\chi(t) = 0$ et $\int_0^1 \chi = 1$.

Montrer que pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{C})$,

$$\int_0^1 f(t) n \chi(nt) \, \mathrm{d}t \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} f(0).$$

Indication p. 719

Calculs abstraits

Exercice 39 (◔★ Factorisation et signe)
Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ telle que $\int_0^1 f = 0$.

Soient $m, M \in \mathbb{R}$ tels que $m \leq f \leq M$.

Montrer

$$\int_0^1 f^2 \leq -mM.$$

Indication p. 719

Exercice 40 (◑★ Un cas classique de découpe)
Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{C})$.

1. Montrer que

$$\int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

2. Montrer que

$$\int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t = 0 + \frac{f(1)}{n+1} + o_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n+1}\right).$$

Indication p. 719

Exercice 41 (◑☆ Tourner autour d'un pôle simple)
Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ et $z \in \mathbb{C}$.

Soient $\omega \in \mathbb{C}$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $|\omega - z| \neq r$.

$$\int_0^{2\pi} \frac{P\big(\omega + re^{i\theta}\big)}{(\omega + re^{i\theta}) - z}\big(ire^{i\theta}\big)\,\mathrm{d}\theta.$$

On pourra distinguer les cas $|\omega - z\,| > r$ et $|\omega - z\,| < r$.

Indication p. 719

Exercice 42 (◔★ Encore Cesàro)
Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,+\infty[,\mathbb{C})$.

On suppose qu'il existe $\ell \in \mathbb{C}$ telle que

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ell.$$

Montrer que

$$\frac{1}{A}\int_0^A f(t)\,\mathrm{d}t \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \ell.$$

Indication p. 719

Exercice 43 (◔★ Des dérivées d'intégrales)
Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Dans chacun des cas montrer que les fonctions sont dérivables et déterminer leurs dérivées.

1. $$\int_x^{x^2} f(t)\,\mathrm{d}t$$

2. $$\int_0^{2\pi} f(t)\cos(x-t)\,\mathrm{d}t$$

3. $$\int_0^{2\pi} f(t)\sin(xt)\,\mathrm{d}t$$

Indication p. 720

Exercice 44 (◑★ La dérivée seconde était en fait un Dirac)
Soit $f \in \mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{C})$.

Pour $x \in [a,b]$ on pose

$$\varphi(x) = \int_a^b |x-t|\ f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Montrer que $\varphi \in \mathcal{C}^2([a,b], \mathbb{C})$ et déterminer sa dérivée.

Indication p. 720

Exercice 45 (◑☆ Limite et découpe)
Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$.

Montrer que

$$\int_0^1 f(t^n)\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(0).$$

Indication p. 720

Exercice 46 (◔☆ Cas d'égalité dans un cas d'égalité)
Soient $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ et $M \in \mathbb{R}$ un majorant de f.

On suppose que

$$⨍_a^b f = M.$$

Que dire de f ?

Indication p. 720

Exercice 47 (◑★ Inégalité de Tchebychev)
Soient $f, g \in \mathcal{C}^0_{pm}([a,b],\mathbb{R})$ toutes les deux croissantes.

Montrer que

$$⨍_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \; ⨍_a^b g(t)\,\mathrm{d}t \leq ⨍_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Indication p. 720

Exercice 48 (◑★ Un peu de fonction beta)
Pour $x, y \geq 1$ on note

$$\mathrm{B}(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que pour tous $x, y \geq 1$ on a la relation de symétrie

$$\mathrm{B}(x,y) = \mathrm{B}(y,x)$$

2. Montrer que pour tous $x, y \geq 1$ on a la relation de Pascal

$$\mathrm{B}(x,y) = \mathrm{B}(x,y+1) + \mathrm{B}(x+1,y)$$

3. Montrer que pour tout $x, y \geq 1$ on a la formule de la capitaine

$$y\,\mathrm{B}(x,y) = (x+y)\,\mathrm{B}(x,y+1)$$

4. Montrer que $x, y \geq 1$ sont entiers,

$$\mathrm{B}(x,y) = \frac{(x-1)!(y-1)!}{(x+y-1)!}$$

5. Montrer que pour tous $x, y \geq 1$ on a la relation de Wallis généralisée

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(\theta))^{2x-1}(\sin(\theta))^{2y-1}\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\,\mathrm{B}(x,y)$$

Indication p. 720

Exercice 49 (◔☆ Mini initialisation de Maclaurin)
Soit $f \in \mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{C})$.

Montrer que

$$\left|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t - (b-a)\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}\right)\right| \leq \frac{(b-a)^2}{4}\|f'\|_\infty.$$

Indication p. 721 · Solution p. 726

Exercice 50 (◑★ Erreur dans la méthode des trapèzes)
Soit $f \in \mathcal{C}^2([a,b],\mathbb{C})$.

Montrer que

$$\left|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t - (b-a)\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}\right)\right| \leq \frac{(b-a)^3}{12}\|f''\|_\infty.$$

Indication p. 721 · Solution p. 726

Exercice 51 (◑★ Primitivation d'une réciproque, version calcul)
Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}^1(I,J)$ bijective.

On note F une primitive de f sur I et $f^{-1} \in \mathcal{C}^0(J,I)$ la bijection réciproque de f.

Déterminer une primitive de f^{-1} sur J à l'aide de F et f^{-1}.

Indication p. 721

Exercice 52 (◑★ Primitivation d'une réciproque, version schéma)
Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}^1([a,b],[f(a),f(b)])$ bijective strictement croissante.

On note $f^{-1} \in \mathcal{C}^0([f(a),f(b)],[a,b])$ la bijection réciproque de f.

Montrer que

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(y)\,\mathrm{d}y = bf(b) - af(a)$$

et faire un schéma.

Indication p. 721

Exercice 53 (◕★ Primitivation d'une réciproque, le cas général)
Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}^0(I, J)$ bijective.

On note F une primitive de f et $f^{-1} \in \mathcal{C}^0(J, I)$ la bijection réciproque de f.

Montrer que pour tous $\alpha, \beta \in J$,

$$\int_\alpha^\beta f^{-1}(y)\,\mathrm{d}y = [f^{-1}(y)y - F(f^{-1}(y))]_\alpha^\beta.$$

Indication p. 721

Exercice 54 (◑★ Un exercice prisé de M. V.)
Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ telle que $f(0) = 0$.

1. Montrer que $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ est prolongeable par continuité en 0.

On note g ce prolongement. On cherche à montrer que $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

1. Que dire de g sur $\mathbb{R}^*$?
2. Déterminer pour $x \in \mathbb{R}^*$ une expression explicite de $g^{(n)}(x)$.
3. À l'aide d'une formule de Taylor reste-intégral réécrire l'expression explicite de $g^{(n)}(x)$ sous forme d'une intégrale.
4. Conclure.

Indication p. 721

Exercice 55 (◔☆ Fonction définie implicitement)
1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ il existe un et unique réel $\xi \in \mathbb{R}$ tel que

$$\int_x^\xi e^{t^2}\,\mathrm{d}t = 1.$$

2. On note $\varphi(x)$ cet unique réel.

   Montrer que $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Indication p. 722

Exercice 56 (◔☆ Aire plus grande qu'un triangle)
Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1],[0,+\infty[)$ telle que

$$\int_0^1 f \leq \frac{1}{2}.$$

Montrer que f admet un point fixe.

Indication p. 722

Exercice 57 (◑☆ En vrac: à la somme de Riemann)
Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{C})$.

Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$ on pose $x_k = 0 + \frac{(1-0)k}{n}$.

Montrer que

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\mathrm{d}t \right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 |f|.$$

Faire un schéma.

Indication p. 722

Exercice 58 (◑☆ Un point fixe de moyenne)
On définit l'endomorphisme

$$\begin{aligned} T : \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{C}) &\to \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{C}) \\ f &\mapsto \left(x \mapsto \frac{f\left(\frac{a+x}{2}\right) + f\left(\frac{x+b}{2}\right)}{2} \right). \end{aligned}$$

Montrer que pour tout $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{C})$ il existe $g \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{C})$ telle que

$$\forall x \in [a,b], (T^n f)(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} g(x).$$

Indication p. 722

Exercice 59 (◔★ Riemann au carré)
Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$.

Déterminer un équivalent lorsque $n \to +\infty$ de

$$\sum_{1\leq i<j\leq n} f\left(\frac{i}{n}\right) f\left(\frac{j}{n}\right).$$

Indication p. 722

Exercice 60 (◔☆ En vrac: comment découper)
Soit $f \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$.

Montrer que

$$x \mapsto \int_0^1 \min(x,t) f(t)\,\mathrm{d}t$$

est de classe $\mathcal{C}^2$ et déterminer sa dérivée seconde.

Indication p. 722

Exercice 61 (◑☆ Un découpage itératif)
Soit $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R}_+^*)$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe une et unique subdivision $(x_{0,n},\cdots,x_{n,n})$ de $[a,b]$ telle que

$$\forall k \in [\![0,n-1]\!], \int_{x_{k,n}}^{x_{k+1,n}} f = \frac{1}{n}\int_a^b f.$$

2. Déterminer, si elle existe,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k,n}).$$

Indication p. 722

Exercice 62 (◔☆ En vrac: un quasi-télescopage)
Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. On suppose qu'il existe $\ell \in \mathbb{C}$ tel que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$. Soit $h > 0$.

Montrer que

$$\int_0^A (f(x+h) - f(x))\,\mathrm{d}x \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \ell h - \int_0^h f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Indication p. 722

Exercice 63 (◔☆ En vrac: trouver le bon polynôme)
Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$.

On suppose que

$$\int_0^1 f^2 = \int_0^1 f^3 = \int_0^1 f^4.$$

Montrer que $f = 0$ ou $f = 1$.

Indication p. 723

Calculs explicites

Exercice 64 (◔★ Comment faire sans ln)
Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Déterminer les primitives de

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\to \mathbb{C} \\ t &\mapsto \frac{1}{t-z}. \end{aligned}$$

Indication p. 723

Exercice 65 (◑★ Puissance fois ln)
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

Déterminer les primitives de

$$\begin{aligned} f_\alpha :]0,+\infty[&\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^\alpha \ln(x) \end{aligned}$$

Indication p. 723

Exercice 66 (◔★ Des calculs de sommes)
Déterminer un équivalent quand $n \to +\infty$ des sommes suivantes:

1. Pour $\alpha > 0$

$$\sum_{k=1}^{n} k^{\alpha}.$$

2. $$\sum_{k=1}^{n} k e^{\frac{k}{n}}$$

3. $$\sum_{k=0}^{n-1} \cos^2\left(\frac{k\pi}{n}\right).$$

4. $$\sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{k(n-k)}.$$

5. $$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n}.$$

6. $$\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k^2+n^2}.$$

7. $$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k^2}.$$

Indication p. 723

Exercice 67 (◔☆ Une somme de Riemann)
Montrer que lorsque $n \to +\infty$

$$\sum_{k=1}^{n} k\ln(k) = \frac{1}{2}\ln(n)n^2 - \frac{1}{4}n^2 + o_{n\to+\infty}(n^2).$$

Indication p. 723

Exercice 68 (◔☆ Une limite de produit)
Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R}_+)$.

1. Montrer que pour tout $x > -\frac{1}{2}$

$$x - x^2 \leq \ln(1+x) \leq x.$$

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose

$$P_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right).$$

Montrer que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge quand $n \to +\infty$ et déterminer sa limite.

Indication p. 723

Exercice 69 (◑★ Éléments simples d'ordre 2)

1. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Déterminer les primitives de

$$x \mapsto \frac{ax+b}{(1+x^2)}.$$

2. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Déterminer les primitives de

$$x \mapsto \frac{ax+b}{(1+x^2)^2}.$$

3. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Déterminer les primitives de

$$x \mapsto \frac{ax+b}{(1+x^2)^3}.$$

4. Commenter.

Indication p. 723

Exercice 70 (◔★ Aire sous le sinus cardinal)
On définit le sinus cardinal sinc par

$$\begin{aligned}\operatorname{sinc} : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}\end{aligned}$$

1. Montrer que pour tout $A \in \mathbb{R}$,

$$\int_0^A \frac{\sin(x)}{x}\,\mathrm{d}x$$

est bien défini.

2. Soit $\delta > 0$.

Montrer que

$$A \mapsto \int_\delta^A \frac{1-\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

est croissante et majorée.

3. En déduire qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que

$$\int_0^A \operatorname{sinc}(t)\,\mathrm{d}t \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \ell.$$

Indication p. 723

Exercice 71 (◔★ Intégrales qui tournent ou comment récupérer les coefficients)
Soit $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$.

1. Calculer pour tout $k \in [\![0, n]\!]$,

$$⨍_0^{2\pi} P\big(e^{i\theta}\big)e^{-ik\theta}\,\mathrm{d}\theta.$$

2. Calculer

$$⨍_0^{2\pi} \big|P\big(e^{i\theta}\big)\big|^2\,\mathrm{d}\theta.$$

Indication p. 724

Exercice 72 (◑☆ Valeur moyenne et lipschitzianité)
Soit $f \in \mathrm{Lip}([0,+\infty[,\mathbb{C})$ une fonction lipschitzienne et $k>0$ tel que f est k-lipschitzienne.

Montrer que

$$F : x \mapsto \fint_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

prolongée par continuité en 0 est $\frac{k}{2}$ lipschitzienne.

Indication p. 724

Exercice 73 (◔★ Une somme alternée)
Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan(t))^{2n}\,\mathrm{d}t$$

et

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_{n+1} = \frac{1}{2n+1} - I_n.$$

2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n = \frac{\pi}{4} - (-1)^{n+1} I_{n+1}.$$

3. Conclure que

$$S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{4}.$$

Indication p. 724

Exercice 74 (◔★ Puissance et puissance de ln)
Pour $n, m \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$ on note

$$I_{n,m} = \int_0^1 x^n (\ln(x))^m \, \mathrm{d}x.$$

1. Justifier la bonne définition de cette intégrale.
2. Montrer que pour tout $(n, m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$,
$$I_{n,m} = -\frac{m}{n+1} I_{n,m-1}.$$
3. En déduire une expression explicite de $I_{n,m}$.

Indication p. 724

Exercice 75 (◔☆ Suite d'intégrale sans IPP: Quotient de sinus)
Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(nx)}{\sin(x)} \, \mathrm{d}x.$$

1. Justifier la bonne définition de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer I_{n+2} en fonction de I_n et de n.
3. Calculer I_0 et I_1.
4. En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$ une expression de I_n.

Indication p. 724

Exercice 76 (◔★ Suite d'intégrales sans IPP: un peu de binôme)
Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose

$$I_n = \int_0^1 \frac{1-(1-t)^n}{t} \, \mathrm{d}t.$$

1. Justifier la bonne définition de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer I_{n+1} en fonction de I_n et de n.
3. Calculer I_0.
4. En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$
5. Retrouver ce résultat à l'aide d'une décomposition en éléments simples.

Indication p. 724

Exercice 77 (◑☆ Une astuce)
Déterminer pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ une expression de

$$I(x) = \fint_0^{2\pi} \ln\big(|x - e^{i\theta}|\big)\,\mathrm{d}\theta$$

.

Indication p. 725

Exercice 78 (◔☆ En vrac: pas une fonction en escalier)
Déterminer, si elle existe,

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor}\,\mathrm{d}x.$$

Commenter et faire un schéma.

Indication p. 725

Exercice 79 (◑★ Limite en l'infini d'éléments simples)
Pour $n \in \mathbb{N}$ on définit la fonction A_n par

$$\begin{aligned} A_n : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^n}\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}$ une relation de récurrence entre $A_n(x)$ et $A_{n+1}(x)$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer, si elle existe,

$$\lim_{x \to +\infty} A_n(x).$$

Indication p. 725

Exercice 80 (◔★ En vrac: encore Riemann)
Déterminer un équivalent lorsque $n \to +\infty$ de

$$\left(\frac{(2n)!}{n!}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Indication p. 725

Exercice 81 (◔★ En vrac: étude de fonction)
Soit g la fonction définie par

$$\begin{aligned} g :]0,1[&\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto -\int_{x^2}^{x} \frac{1}{\ln(t)}\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Montrer que g admet un prolongement par continuité en 0 et en 1.

Indication p. 725

Exercice 82 (◑☆ En vrac: pas vraiment Lebesgue)
Soit $f \in \mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{C})$.

Déterminer, si elle existe,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b |f(t)|\,|\sin(nt)\,|\,\mathrm{d}t.$$

Indication p. 725

Exercice 83 (◑☆ En vrac: un extrait d'oral X)
Déterminer

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan(x))\,\mathrm{d}x.$$

Indication p. 725

Indications

Indication 1 · Énoncé p. 686 (Sommes de Riemann)

1. Montrer que la fonction en escalier approche uniformément f ou bien reprendre la preuve de l'unicité dans la construction de l'intégrale.
2. Reprendre la preuve de l'unicité et majorer $\int_{x_n}^{x_{n+1}} |f(t) - f(x_n)| \, \mathrm{d}t$ par lipschitzianité.
3. Rappel: par IAF et TBA, $\mathcal{C}^1 \subset \mathrm{Lip}$ sur un segment.
4. A priori la preuve précédente ne fonctionne plus. À posteriori comme le nombre de points problématiques est fini, tout fonctionne. Le rédiger.

Indication 2 · Énoncé p. 687 (Une inégalité fondamentale)
Majorer de manière élémentaire en remarquant que $|fg| \leq \|f\|_\infty \, |g|$.

Indication 3 · Énoncé p. 687 (Intégrales et parité)
Dans les deux cas,

$$\int_{-a}^{a} f(t) \, \mathrm{d}t = \int_{-a}^{0} f(t) \, \mathrm{d}t + \int_{0}^{a} f(t) \, \mathrm{d}t = \int_{0}^{a} (f(t) + f(-t)) \, \mathrm{d}t.$$

Indication 4 · Énoncé p. 687 (Égalités et inégalités de la valeur moyenne)

1. TEAF.
2. La propriété n'est plus vraie, regarder par exemple $t \mapsto e^{it}$ sur $[0, 2\pi]$ ou $t \mapsto 1_{[0,\frac{1}{2}]}$ sur $[0, 1]$.
3. Majorer.

Indication 5 · Énoncé p. 688 (Convergence uniforme et convergence de l'intégrale)
Déjà vu en cours, écrire

$$\left| \int_a^b f_n - \int_a^b f \right| \leq (b-a) \|f_n - f\|_\infty.$$

La réciproque est fausse, cf par exemple une bosse glissante.

Indication 6 · Énoncé p. 688 (Linéarisation et Cie)
Linéariser. Il s'agit du fameux $\cos(\varphi)$ et des coefficients de Fourier de la physique.

Indication 7 · Énoncé p. 688 (Prolongement de la valeur moyenne)
Avec $F : x \mapsto \int_0^x f$ il faut montrer que $x \mapsto \frac{F(x)-F(0)}{x-0}$ admet un prolongement par continuité en 0.

Indication 8 · Énoncé p. 689 (Approximation d'un Dirac)
Il s'agit d'une reformulation de l'exercice 37.

Indication 9 · Énoncé p. 689 (Des orthogonaux à foison)
Le sens non immédiat est à chaque fois $\Rightarrow$.

1. C'est en particulier le cas pour $g = \overline{f}$.
2. Par exemple approcher $\overline{f}$ par une suite de fonctions en escalier et passer à la limite. Ou bien faire d'abord le point suivant.
3. Remarquer que cela revient à montrer que

$$\left(\forall(\alpha,\beta)\in[a,b]^2 \int_a^b f\mathbb{1}_{[\alpha,\beta]} = 0\right) \Leftrightarrow (f=0)$$

et que toute fonction en escalier est combinaison linéaire de fonctions indicatrices de segments (modulo des points qui n'importent pas dans l'intégrale).

Ou bien si f est non nulle alors en un point où f est non nulle, localement son signe/ argument varie peu.

Alternativement dans chacun des cas pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, par contraposée, si $f \neq 0$ il existe x_0 et $\delta > 0$ tel que f est strictement positive sur $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$. Choisir ensuite une fonction positive non nulle sur $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ et nulle en dehors.

Re-alternativement constater que pour le troisième point avec F une primitive de f on a pour tous α et β, $F(\alpha) = F(\beta)$ i.e F constante et donc $f = F' = 0$.

Indication 10 · Énoncé p. 689 (Wallis)

1. Effectuer une IPP, en se rappelant que $\sin^2 = 1 - \cos^2$.

On obtient que pour tout $n \geq 2$,

$$W_n = \frac{n-1}{n} W_{n-2}.$$

2. Distinguer les cas pairs et impairs.
3. Constater que la suite $(nW_nW_{n-1})_{n\in\mathbb{N}}$ est constante et que $W_n \sim W_{n-1}$.

Indication 11 · Énoncé p. 690 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)
Faire de même que pour l'inégalité pour des sommes finies, par exemple étudier $t \mapsto \int_a^b (f + \mathrm{tg})^2$.

Indication 12 · Énoncé p. 690 (Inégalité de Holder)
Le cas $(1, +\infty)$ est traité dans l'exercice 2.

Commencer par le cas $\|f\|_p = \|g\|_q = 1$ et conclure par homogénéité.

Indication 13 · Énoncé p. 690 (Inégalité de Minkowski)
Utiliser l'inégalité de Hölder.

Indication 14 · Énoncé p. 691 (Vers la véritable inégalité de Jensen)
L'inégalité est bien définie car $\fint_a^b f \in I$.

Constater que pour $f \in \mathrm{Esc}([a,b], I)$ il s'agit de l'inégalité de convexité pour les sommes finies.

Ensuite approcher f continue par morceaux par des fonctions en escalier, par exemple par des sommes de Riemann, et passer à la limite.

On peut remarquer que l'hypothèse de continuité de φ est superflue, en effet une fonction convexe sur I est lipschitzienne sur tout segment intérieur à I, le cas des bords pouvant alors se traiter séparément.

Alternativement poser $\xi = \fint_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ alors il existe (pourquoi ?) $k \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $t \in [a,b]$,

$$\varphi(f(t)) \geq k(f(t)-\xi) + \varphi(\xi)$$

puis intégrer.

Indication 15 · Énoncé p. 691 (Lemme de Lebesgue cas $\mathcal{C}^1$)
Intégrer par parties pour faire apparaître du $\frac{1}{n}$ et majorer.

Indication 16 · Énoncé p. 691 (Moyenne d'une fonction périodique)

1. Dériver par rapport à a.

2. On rappelle que l'ensemble des périodes d'une fonction continue est de la forme $\tau\mathbb{N}^*$.

Indication 17 · Énoncé p. 691 (Périodicité et primitivation)
Avec $T > 0$ une période, montrer qu'une CNS est $\fint f = 0$ au sens de la valeur moyenne de l'exercice 16.

Indication 18 · Énoncé p. 692 (Un petit changement très utile)

1. Direct par le cours. On obtient de plus l'expression explicite

$$\forall t \in [a,b], \tilde{f}(t) = |f(a)| + \int_a^t |f'(s)|\,\mathrm{d}s.$$

2. Écrire

$$\forall t \in [a,b], f(t) = f(a) + \int_a^t f'(s)\,\mathrm{d}s$$

et conclure par inégalité triangulaire.

Indication 19 · Énoncé p. 692 (Vers la formule de Duhamel)
Constater que pour tout t,

$$y(t) = e^{\lambda t}\int_a^t e^{-\lambda s} f(s)\,\mathrm{d}s$$

et qu'il s'agit donc de la dérivée d'un produit.

Un résultat plus général mais de démonstration analogue fera partie du cours d'équations différentielles.

Indication 20 · Énoncé p. 692 (Vers le lemme de Gronwall version intégrale)
Poser $z : t \mapsto y(a) + \int_a^t \lambda y(s)\,\mathrm{d}s$ et étudier la monotonie de $t \mapsto z(t)e^{-\lambda t}$.

Un résultat plus général mais de démonstration analogue fera partie du cours d'équations différentielles.

Indication 21 · Énoncé p. 693 (Vers le lemme d'Abel)
Effectuer une IPP et utiliser le signe de f' dans l'encadrement de l'intégrale.

Indication 22 · Énoncé p. 693 (Bosse glissante)
Faire un schéma et des calculs explicites.

On commente que

$$\forall x \in [0,1], \varphi_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

et

$$\int_0^1 \phi_n(x)\mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{\nrightarrow} \int_0^1 0\mathrm{d}x$$

autrement dit la convergence point par point (dite convergence simple) **n**'implique **pas** la convergence des intégrales.

Autrement dit on ne peut **pas** passer sans précaution la limite «dans l'intégrale».

Indication 23 · Énoncé p. 693 (Prolongement par continuité des moments)
Commencer par traiter l'exercice 7.

Faire de même mais en remarquant que $f(0)x^{n+1} = (n+1)\int_0^x t^n f(0)\,\mathrm{d}t$.

Indication 24 · Énoncé p. 694 (Jensen pondéré)
Faire comme pour Jensen classique, cf 14.

Indication 25 · Énoncé p. 694 (Égalité de la moyenne bis)
Montrer que

$$\min_{[a,b]}(f)\int_a^b \omega(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_a^b f(t)\omega(t)\,\mathrm{d}t \leq \max_{[a,b]}(f)\int_a^b \omega(t)\,\mathrm{d}t$$

et conclure par TVI.

Alternativement montrer par l'absurde qu'une fonction d'intégrale nulle s'annule.

Indication 26 · Énoncé p. 694 (Inégalité de Cauchy-Schwarz bis)
Même preuve que pour l'inégalité classique de l'exercice 11

Indication 27 · Énoncé p. 694 (Cas d'égalité de l'inégalité triangulaire)
On obtient qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ constant et r une fonction positive tels que pour tout t, $f(t) = r(t)e^{i\theta}$.

Indication 28 · Énoncé p. 695 (Lemme de Lebesgue bis)
Regarder d'abord les exercices 15, ainsi que 30.

Ensuite constater que quitte à retrancher g sa valeur moyenne on peut supposer que $\gamma = 0$ et utiliser la même méthode que pour le lemme de Lebesgue.

Indication 29 · Énoncé p. 695 (Lemme de Lebesgue cas $\mathcal{C}^0_{pm}$)
Procéder en deux étapes:

- ▷ Montrer le résultat pour un espace de fonctions bien choisi (par exemple $\mathcal{C}^1$ ou Esc).
- ▷ Approcher f par des fonctions de cet espace et découper avec précaution les ε.

Indication 30 · Énoncé p. 695 (Valeur moyenne globale et périodicité)
Faire comme Cesàro mais en un peu plus simple. Avec $A = nT + a$ où $a \in [0, T]$ couper l'intégrale en n intégrales sur une période et une intégrale entre 0 et a.

Indication 31 · Énoncé p. 696 (Convergence des normes p)

- ▷ Commencer par montrer que pour tout p, $\|f\|_p \leq (b-a)^{\frac{1}{p}} \|f\|_\infty$.
- ▷ Par le théorème des bornes atteintes il existe $\xi \in [a, b]$ tel que $|f(\xi)| = \|f\|_\infty$.
- ▷ Soit $\varepsilon > 0$ et $\delta > 0$ tel que pour tout x dans $[\xi - \delta, \xi + \delta]$, $|f(x) - f(\xi)| \leq \varepsilon$.
- ▷ Montrer que

$$(2\delta)^{\frac{1}{p}} (\|f\|_\infty - \varepsilon) \leq \|f\|_p.$$

- ▷ Conclure avec précaution « à la Cesàro ».

Indication 32 · Énoncé p. 696 (Seconde inégalité de la moyenne)

1. Effectuer une IPP en dérivant f et primitivant G et utiliser l'égalité de la moyenne sur $\int_a^b f'(t)G(t)\,\mathrm{d}t$.
2. Remarquer que $t = \frac{f(b)}{f(a)} \in [0, 1]$ et repérer une combinaison convexe.

Indication 33 · Énoncé p. 696 (Orthogonalité, polynômes et changements de signe)
Si ce n'était pas le cas construire un polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ de même signe que f et donc tq fP positif non nul.

Indication 34 · Énoncé p. 697 (Orthogonal au sinus et cosinus)
Si f ne s'annule qu'une fois construire un élément de $\mathrm{Vect}(\cos, \sin) = \{\cos(\cdot + \varphi), \varphi \in \mathbb{R}\}$ bien choisi.

Indication 35 · Énoncé p. 697 (Un début d'exemple de principe variationnel)
Commencer par montrer que $\big(F(y_0) = \min_{y \in E}(F(y))\big)$ équivaut à ce que pour tout $z \in E$, la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $t \mapsto F(y_0 + tz)$ admet un minimum en 0.

Faire ensuite une étude de fonction, avec une IPP.

Conclure par « orthogonalité ».

Indication 36 · Énoncé p. 697 (Moyenne et moyennes)
Remarquer que

$$\fint_a^b f = t\fint_a^c f + (1-t)\fint_c^b f$$

pour $t \in [0,1]$ bien choisi.

Indication 37 · Énoncé p. 698 (Encore des moyennes prolongées en 0)
On obtient $\exp\left(\fint_a^b \ln(f(t))\,\mathrm{d}t\right)$.

Indication 38 · Énoncé p. 698 (Approximation d'un Dirac bis)
S'inspirer sans scrupule de l'exercice 8.

Indication 39 · Énoncé p. 698 (Factorisation et signe)
Développer $(f-m)(M-f) \geq 0$.

Indication 40 · Énoncé p. 699 (Un cas classique de découpe)

1. Majorer.

2. Cela revient à montrer que

$$\int_0^1 (n+1)t^n(f(t)-f(1))\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Pour cela fixer un $\varepsilon > 0$, considérer un $\delta > 0$ correspondant dans la définition de la continuité de f en 1 et découper l'intégrale entre $[0, 1-\delta]$ et $[1-\delta, 1]$.

Indication 41 · Énoncé p. 699 (Tourner autour d'un pôle simple)

- Par homothétie se ramener à $r = 1$ et $\omega = 0$.
- En passant par la base de Taylor en z, se ramener au cas $P = 1$.
- Si $|z| < 1$ comparer à N fixé les valeurs de

$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta}-z}\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{1-ze^{-i\theta}}\,\mathrm{d}\theta \quad \text{et} \quad \int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^{N} \left(ze^{-ik\theta}\right)^k \mathrm{d}\theta$$

puis faire $N \to +\infty$.

- Si $|z| > 1$ comparer à N fixé les valeurs de

$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta}-z}\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta}}{z}\frac{1}{1-\frac{e^{i\theta}}{z}}\mathrm{d}\theta \quad \text{et} \quad \int_0^{2\pi} \sum_{k=1}^{N+1} \left(\frac{e^{i\theta}}{z}\right)^k \mathrm{d}\theta$$

puis faire $N \to +\infty$.

Indication 42 · Énoncé p. 699 (Encore Cesàro)
Faire comme pour le Cesàro des suites:

- Se ramener à $\ell = 0$
- Utiliser la quantification de la définition de la limite.
- Couper l'intégrale en deux.
- Majorer le second terme.
- Re-quantifier pour majorer le premier.

▷ Conclure.

Indication 43 · Énoncé p. 700 (Des dérivées d'intégrales)

1. Avec F une primitive de f, dériver une composée $x \mapsto F(x^2) - F(x)$.
2. Formule de cosinus d'une somme.
3. Repasser par exemple par des taux d'accroissements et encadrer.

Indication 44 · Énoncé p. 700 (La dérivée seconde était en fait un Dirac)
Commencer par constater que si $x \notin [a, b]$ alors φ est constante.

Ensuite couper par Chasles en remarquant que les termes problématiques pour une dérivée seconde se simplifient.

Indication 45 · Énoncé p. 700 (Limite et découpe)
Au pire repasser par les définitions ε-esques en découpant l'intégrale entre $[0, 1-\delta]$ et $[1-\delta, 1]$.

Indication 46 · Énoncé p. 701 (Cas d'égalité dans un cas d'égalité)
Remarquer que $M - f$ est positive d'intégrale nulle.

Indication 47 · Énoncé p. 701 (Inégalité de Tchebychev)
Utiliser la version somme finie et passer à la limite.

Ou plus simplement adapter la preuve:

▷ constater que pour tous $(t, s) \in [a, b]^2$,

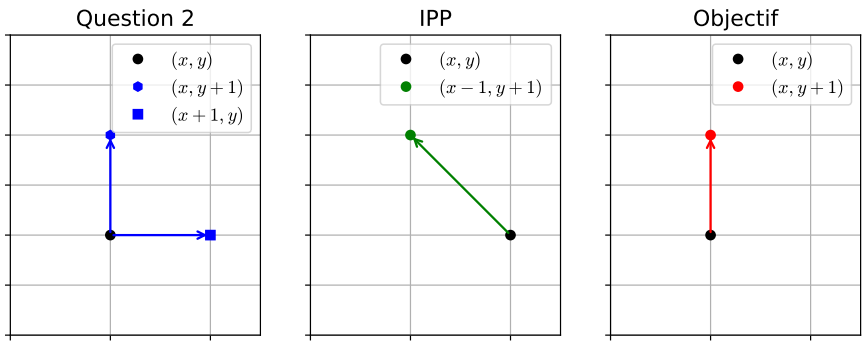
$$(f(t) - f(s))(g(t) - g(s)) \geq 0$$

▷ Intégrer par rapport à une variable puis par rapport à une autre

▷ Simplifier.

Indication 48 · Énoncé p. 701 (Un peu de fonction beta)

1. Changement de variable $s = 1 - t$.
2. Remarquer que $t + (1 - t) = 1$.
3. Commencer par une IPP et méditer le schéma suivant:



4. Fixer x et faire une récurrence sur y.
5. Par exemple constater que $t = \sin(\theta)^2$ est une bonne idée.

Indication 49 · Énoncé p. 702 (Mini initialisation de Maclaurin)
Faire une IPP, en intégrant 1 de manière symétrique par $t \mapsto t - \frac{a+b}{2}$.

Solution p. 726

Indication 50 · Énoncé p. 702 (Erreur dans la méthode des trapèzes)
Faire deux IPPs ou bien utiliser une IAF bien choisie.

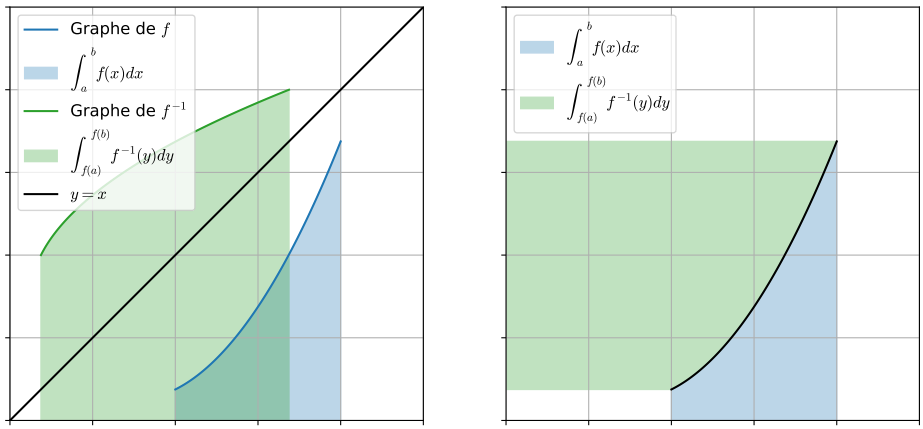
Solution p. 726

Indication 51 · Énoncé p. 702 (Primitivation d'une réciproque, version calcul)
Calculer $\int_a^b f^{-1}(y)\,\mathrm{d}y$ à l'aide du changement de variables $y = f(x)$ puis d'une IPP.

Indication 52 · Énoncé p. 702 (Primitivation d'une réciproque, version schéma)
Cf exercice 51.

Beaucoup de façon de le montrer: IPP, changement de variables, dérivée de la borne supérieure, etc.

Faire le schéma, on peut obtenir par exemple:



Indication 53 · Énoncé p. 703 (Primitivation d'une réciproque, le cas général)
Plusieurs options, dans tous les cas commencer par traiter les exercices 51 et 52.

Constater ensuite qu'ici on a seulement C^0 et pas C^1.

On peut ensuite par exemple remplacer les intégrales par des sommes et les IPP par des transformées d'Abel.

Indication 54 · Énoncé p. 703 (Un exercice prisé de M. V.)

1. Définition de la dérivabilité en 0.
2. Aucun pb.
3. Utiliser Leibniz.
4. Reconnaître une formule de Taylor, mais de x à 0 !

5. Montrer la convergence et ne pas oublier le théorème de prolongement adapté.

Indication 55 · Énoncé p. 703 (Fonction définie implicitement)
Noter F une primitive de $t \mapsto e^{t^2}$.

Remarquer qu'il suffit de trouver φ tel que

$$F(\varphi(x)) = F(x) + 1.$$

Indication 56 · Énoncé p. 704 (Aire plus grande qu'un triangle)
Que dire de $\int_0^1 (f(t) - t)\,\mathrm{d}t$?

Indication 57 · Énoncé p. 704 (En vrac: à la somme de Riemann)
Par seconde inégalité triangulaire pour tout k,

$$\left|\left|\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\mathrm{d}t\right| - |f(x_k)|\right| \leq \int_{x_k}^{x_{k+1}} |f(t) - f(x_k)|\mathrm{d}t.$$

Indication 58 · Énoncé p. 704 (Un point fixe de moyenne)
- ▷ Commencer à se ramener par un changement affine à $[a, b] = [0, 1]$.
- ▷ Dans ce cas, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in [0, 1]$,

$$(T^n f)(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} f\left(\frac{x+k}{2^n}\right)$$

- ▷ En déduire avec précaution que

$$g : x \mapsto \fint_a^b f$$

convient.

Indication 59 · Énoncé p. 705 (Riemann au carré)
Repérer le terme croisé du développement de $\left(\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)\right)^2$.

Indication 60 · Énoncé p. 705 (En vrac: comment découper)
Découper l'intégrale (Chasles) selon les valeurs du minimum.

Indication 61 · Énoncé p. 705 (Un découpage itératif)
1. Par exemple procéder itérativement et étudier à x_k fixé la fonction $t \mapsto \int_{x_k}^{\xi} f$.

2. Reconnaître la somme de Riemann de $f \circ F^{-1}$.

Indication 62 · Énoncé p. 706 (En vrac: un quasi-télescopage)
À A fixé constater que par Chasles

$$\int_0^A (f(x+h) - f(x))\,\mathrm{d}x = \int_A^{A+h} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^h f(x)\,\mathrm{d}x$$

et pour la limite du premier terme utiliser par exemple un encadrement ε-esque.

Indication 63 · Énoncé p. 706 (En vrac: trouver le bon polynôme)
Déterminer une CL de X^2, X^3 et X^4 de signe constant.

Par exemple remarquer que $(f^2(1-f)^2) \geq 0$ et $\int_0^1 (f^2(1-f)^2) = 0$.

Donc pour tout $t \in [0,1]$, $f(t) = 0$ ou 1.

Utiliser ensuite la continuité de f pour montrer que la valeur ne dépend en fait pas de t.

Indication 64 · Énoncé p. 706 (Comment faire sans ln)
Avec z sous la forme complexe $z = a + ib$ on a pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\frac{1}{t-z} = \frac{(t-a)}{(t-a)^2+b^2} + \frac{ib}{(t-a)^2+b^2}.$$

Indication 65 · Énoncé p. 706 (Puissance fois ln)
Traiter tout d'abord le cas « homogène » $\alpha = 1$.

Dans les autres cas effectuer un changement de variables $u = x^\beta$ avec β bien choisi.

Indication 66 · Énoncé p. 707 (Des calculs de sommes)
Sommes de Riemann.

Indication 67 · Énoncé p. 707 (Une somme de Riemann)
Utiliser des sommes de Riemann.

Indication 68 · Énoncé p. 708 (Une limite de produit)

1. Étude de fonction par exemple.
2. Passer au ln et reconnaître une somme de Riemann à encadrement près. On obtient

$$\lim_{n\to+\infty} P_n = e^{\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t}$$

Indication 69 · Énoncé p. 708 (Éléments simples d'ordre 2)

1. Fonction usuelle.
2. Poser le changement de variables $x = \tan(\theta)$
3. Poser le changement de variables $x = \tan(\theta)$
4. La même méthode permet de calculer (péniblement) les primitives de $x \mapsto \frac{ax+b}{(1+x^2)^n}$, et donc par changement de variables affine celles de $x \mapsto \frac{ax+b}{(P(x))^n}$ où P est un polynôme irréductible de degré 2. Par décomposition en éléments simples on peut donc calculer les primitives de fractions rationnelles sur $\mathbb{R}$.

On pourra aussi considérer l'exercice 79 pour une expression de récurrence générale.

Indication 70 · Énoncé p. 709 (Aire sous le sinus cardinal)

1. sinc est continu
2. L'intégrande est positive et majorer par $\frac{1}{t^2}$ dont l'intégrale se calcule explicitement.

3. Couper en $\delta > 0$ (quelconque) et faire une IPP pour utiliser la question précédente et le théorème de limite monotone.

Indication 71 · Énoncé p. 709 (Intégrales qui tournent ou comment récupérer les coefficients)

1. Écrire $P\big(e^{i\theta}\big)e^{-ik\theta} = \sum_{j=0}^{n} a_j e^{i(j-k)\theta}$ et utiliser la linéarité.

2. Remarquer que les termes $a_k\overline{a_j}e^{i(j-k)\theta}$ sont de moyenne nulle pour $j \neq k$ et que les autres termes sont constants.

Cf le TD sur les polynômes pour d'autres exercices généralisant celui-ci.

Indication 72 · Énoncé p. 710 (Valeur moyenne et lipschitzianité)
Le prolongement par continuité en 0 est par $f(0)$ (cf exercice 7).

Effectuer le changement de variables $t = xs$ pour obtenir que pour tout x,

$$F(x) = \int_0^1 f(xs)\,\mathrm{d}s$$

et ainsi majorer $|F(x) - F(y)|$.

Indication 73 · Énoncé p. 710 (Une somme alternée)

1. Remarquer que $\tan^{2n+2} = \tan^{2n}(1 + \tan^2) - \tan^{2n}$.

2. Effectuer une récurrence ou télescoper $(-1)^n I_n$.

3. Montrer que $I_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par exemple par encadrement.

Indication 74 · Énoncé p. 711 (Puissance et puissance de ln)

1. Vérifier que la fonction est prolongeable par continuité en 0.

2. Intégrer par parties.

3. Faire le produit de la relation précédente jusqu'à $m = 0$.

Indication 75 · Énoncé p. 711 (Suite d'intégrale sans IPP: Quotient de sinus)

1. La fonction $x \mapsto \frac{\sin(nx)}{\sin(x)}$ est prolongeable par continuité en 0 par DL_1.

2. Calculer $I_{n+2} - I_n$ en remarquant que pour tout t, $\sin((n+2)t) - \sin(nt) = 2\cos((n+1)t)\sin(t)$.

3. Calcul explicite.

4. Distinguer le cas pair et impair et télescoper.

Indication 76 · Énoncé p. 711 (Suite d'intégrales sans IPP: un peu de binôme)

1. Prolongeable par continuité en 0.

2. Calculer $I_{n+1} - I_n$ en remarquant que pour tout $t \in [0,1]$, $(1-t)^n - (1-t)^{n+1} = (1-t)^n t$.

3. RAS.

4. D'un côté télescoper. De l'autre développer par le binôme puis intégrer.

5. Considérer la fameuse décomposition en éléments simples de $\frac{1}{X(X-1)\cdots(X-(n+1))}$ et l'évaluer en 1.

Indication 77 · Énoncé p. 712 (Une astuce)
Que dire de $I(x^2)$ et de $I\left(\frac{1}{x}\right)$?

Alternativement utiliser des sommes de Riemann.

Indication 78 · Énoncé p. 712 (En vrac: pas une fonction en escalier)
Pour $n \in \mathbb{N}^*$ calculer

$$\int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{1}{\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor} \mathrm{d}x$$

comme une somme finie.

La fonction $t \mapsto \frac{1}{\left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor}$ sur $]0,1]$ et prolongée par continuité a donc une « intégrale » calculable mais n'est pas continue par morceaux.

Indication 79 · Énoncé p. 712 (Limite en l'infini d'éléments simples)
1. Par exemple effectuer une IPP bien choisie.
2. Traiter le cas de A_0.

   Procéder par récurrence.

Indication 80 · Énoncé p. 712 (En vrac: encore Riemann)
Passer au ln et Riemann. Ou bien Stirling.

Indication 81 · Énoncé p. 713 (En vrac: étude de fonction)
Pour 0 effectuer un encadrement naif.

Pour 1 effectuer un encadrement plus fin ou le changement de variables $x = e^u$. On obtient $\ln(2)$.

Indication 82 · Énoncé p. 713 (En vrac: pas vraiment Lebesgue)
La fonction $|\sin|$ est périodique, par conséquent il s'agit de l'exercice 28 camouflé.

Indication 83 · Énoncé p. 713 (En vrac: un extrait d'oral X)
Écrire $\ln(1+\tan(x)) = \ln(\cos(x)+\sin(x)) - \ln(\cos(x))$ et repérer une symétrie.

Alternativement repérer la symétrie dès le début en posant $u = \frac{\pi}{4} - x$.

Solutions

Solution pour l'exercice 49 · Énoncé p. 702 · Indication p. 721 (Mini initialisation de Maclaurin)
Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$, on obtient par IPP

$$\begin{aligned}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t &= \left[\left(t-\frac{a+b}{2}\right)f(t)\right]_a^b - \int_a^b \left(t-\frac{a+b}{2}\right)f'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= (b-a)\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}\right) - \int_a^b \left(t-\frac{a+b}{2}\right)f'(t)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Et par inégalité fondamentale, puis aire de deux triangles

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b \left(t-\frac{a+b}{2}\right)f'(t)\,\mathrm{d}t\right| &\leq \| f' \|_\infty \int_a^b \left|t-\frac{a+b}{2}\right|\mathrm{d}t \\ &= \| f' \|_\infty \, 2\times\frac{1}{2}\times\frac{b-a}{2}\times\frac{b-a}{2}.\end{aligned}$$

D'où finalement,

$$\boxed{\left|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t - (b-a)\left(\tfrac{f(a)+f(b)}{2}\right)\right| \leq \tfrac{(b-a)^2}{4}\|f'\|_\infty}.$$

Solution pour l'exercice 50 · Énoncé p. 702 · Indication p. 721 (Erreur dans la méthode des trapèzes)

▷ **Méthode: par intégrations successives**

Posons

$$\begin{aligned}\varphi : [a,b] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t - (x-a)\left(\frac{f(a)+f(x)}{2}\right).\end{aligned}$$

On a par Théorème Fondamental de l'analyse $f \in \mathcal{C}^2$ et

$$\begin{aligned}\forall x \in [a,b]\ \varphi'(x) &= f(x) - \frac{f(a)+f(x)}{2} - \frac{x-a}{2}f'(x) \\ &= \frac{f(x)-f(a)}{2} - \frac{x-a}{2}f'(x)\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}\forall x \in [a,b]\ \varphi''(x) &= \frac{f'(x)}{2} - \frac{f'(x)}{2} - \frac{x-a}{2}f''(x) \\ &= -\frac{x-a}{2}f''(x).\end{aligned}$$

On a donc en particulier

$$\forall x \in [a,b], |\varphi''(x)| \leq \frac{x-a}{2}\,\| f'' \|_\infty .$$

De plus

$$\varphi(a) = 0,$$

d'où par «inégalité fondamentale»

$$\begin{aligned}\forall x \in [a,b], |\varphi'(x)| &= |0 + \int_a^x \varphi''(t)\,\mathrm{d}t| \\ &\leq \| f'' \|_\infty \int_a^x \frac{t-a}{2}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{(x-a)^2}{4} \| f'' \|_\infty .\end{aligned}$$

Et de même, comme

$$\varphi(a) = 0$$

par la même majoration

$$\begin{aligned}|\varphi(b)| &= |0 + \int_a^b \varphi'(t)\,\mathrm{d}t| \\ &\leq \| f'' \|_\infty \int_a^b \frac{(t-a)^2}{4}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{(b-a)^3}{12} \| f'' \|_\infty .\end{aligned}$$

C'est à dire

$$\boxed{\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - (b-a)\left(\tfrac{f(a)+f(b)}{2}\right)\right| \leq \tfrac{(b-a)^3}{12}\|f''\|_\infty}.$$

Remarque: cette méthode pourrait se généraliser pour étudier des formules exactes pour des polynômes d'un certain degré.

▷ **Méthode 2: par IPPs successives**

Comme $f \in \mathcal{C}^2([a,b],\mathbb{C}) \subset \mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{C})$ par Intégrations Par Parties (une primitive de $t \mapsto 1$ est $t \mapsto t - \frac{a+b}{2}$)

$$\begin{aligned}\int_a^b 1 \times f(t)\,\mathrm{d}t &= \left[\left(t - \frac{a+b}{2}\right) f(t)\right]_a^b - \int_a^b \left(t - \frac{a+b}{2}\right) f'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= (b-a)\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}\right) - \int_a^b \left(t - \frac{a+b}{2}\right) f'(t)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

comme $f' \in \mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{C})$ par Intégration Par Parties (une primitive de $t \mapsto t - \frac{a+b}{2}$ est $t \mapsto \frac{1}{2}\left(t - \frac{a+b}{2}\right)^2 - \frac{(b-a)^2}{8} = \frac{(t-a)(t-b)}{2}$)

$$\int_a^b \left(t - \frac{a+b}{2}\right) f'(t)\,\mathrm{d}t = \underbrace{\left[\frac{(t-a)(t-b)}{2} f'(t)\right]_a^b}_{0-0} - \int_a^b \frac{(t-a)(t-b)}{2} f''(t)\,\mathrm{d}t$$

d'où finalement

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = (b-a)\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}\right) + \int_a^b \frac{(t-a)(t-b)}{2} f''(t)\mathrm{d}t.$$

Et enfin par «l'inégalité fondamentale»

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b \frac{(t-a)(t-b)}{2} f''(t)\,\mathrm{d}t\right| &\leq \| f'' \|_\infty \int_a^b \frac{(t-a)(b-t)}{2}\,\mathrm{d}t \\
&= \| f'' \|_\infty \left[-\frac{1}{6}\left(t-\frac{a+b}{2}\right)^3 + \frac{(b-a)^2}{8}\left(t-\frac{a+b}{2}\right)\right]_a^b \\
&= \| f'' \|_\infty \, 2\times\left(-\frac{1}{6\times 8}+\frac{1}{8\times 2}\right)(b-a)^3 \\
&= \frac{(b-a)^3}{12}\,\| f'' \|_\infty .
\end{aligned}$$

Et on a donc bien

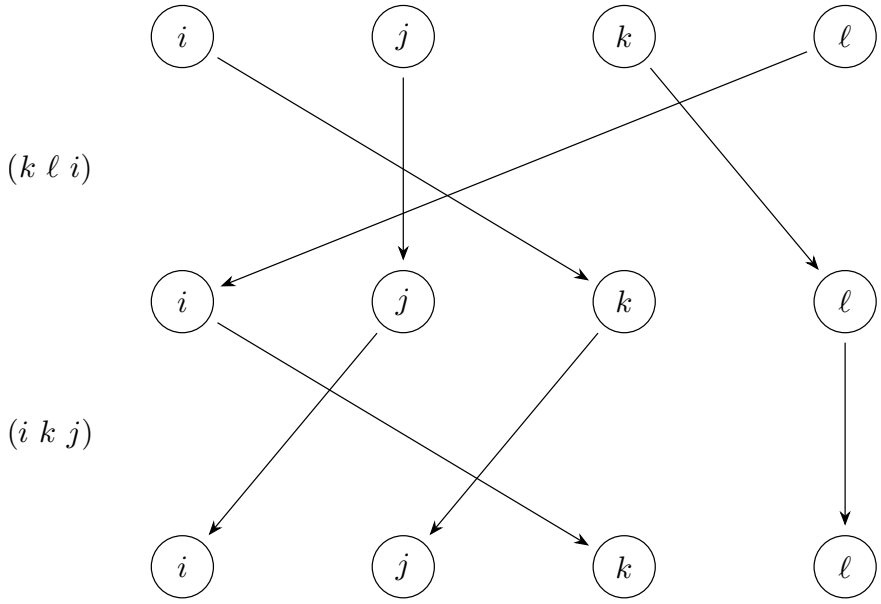
$$\boxed{\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - (b-a)\left(\tfrac{f(a)+f(b)}{2}\right)\right| \leq \tfrac{(b-a)^3}{12}\|f''\|_\infty}.$$

Remarque: cette méthode peut se généraliser, les Intégrations Par Parties successives font alors intervenir les polynômes de Bernoulli.

Chapitre 21

Permutations

Énoncés 730
Indications 738
Solutions 745



$$\sigma(a_1\ a_2\ \cdots\ a_n)\sigma^{-1} = (\sigma(a_1)\ \sigma(a_2)\ \cdots\ \sigma(a_n))$$

Énoncés

Dans tout le TD $n \in \mathbb{N}$ est un entier naturel.

Exercice 1 (◔★♣ Théorème de Cayley)
Soit G un groupe fini d'ordre n.

Montrer que G est isomorphe à un sous-groupe de S_n.

Commenter.

Indication p. 738

Exercice 2 (◔★♣ Quelques calculs sur les cycles du cours à savoir redémontrer)
Soit $(a_1\ a_2\ \cdots\ a_k)$ un cycle de longueur k.

1. Soit $\sigma \in S_n$.

   Montrer que

   $$\sigma(a_1\ a_2\ \cdots\ a_k)\sigma^{-1} = (\sigma(a_1)\ \sigma(a_2)\ \cdots\ \sigma(a_k)).$$

2. Montrer que $(a_1\ a_2\ \cdots\ a_k)$ peut s'écrire comme un produit de transpositions.
3. Calculer $\varepsilon((a_1\ a_2\ \cdots\ a_k))$.

Indication p. 738

Exercice 3 (◔★♠ Matrice de permutation)
Pour $\sigma \in S_n$ on note P_σ la matrice associée à la permutation σ définie par

$$P_\sigma = \left(\delta_{i,\sigma(j)}\right)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}.$$

1. Montrer que

   $$\begin{aligned} S_n &\to \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \\ \sigma &\mapsto P_\sigma \end{aligned}$$

   est un morphisme de groupe.
2. Soit $\sigma \in S_n$. Interpréter la multiplication matricielle à gauche (resp. à droite) par P_σ.

Indication p. 738 · Solution p. 745

Exercice 4 (◔★♠ Des générateurs de S_n: sélection)
À faire en même temps que les exercices 5 et 6.

Montrer que les transpositions $(1\ i)$ pour i allant de 2 à n engendrent S_n.

Indication p. 738 · Solution p. 745

Exercice 5 (◔★♠ Des générateurs de S_n: bulle)
À faire en même temps que les exercices 4 et 6.

Montrer que les transpositions $(i\ i+1)$ pour i allant de 1 à $n-1$ engendrent S_n.

Indication p. 739 · Solution p. 746

Exercice 6 (◔★♠ Des générateurs de S_n: un grand tour et un tout petit)
À faire en même temps que les exercices 4 et 5.

Montrer que le n-cycle $(1\ 2\ \cdots\ n)$ et la transposition $(1\ 2)$ engendrent S_n.

Indication p. 739 · Solution p. 747

Exercice 7 (◔★♠ Classe de conjugaison)
On dit que deux permutations σ_1 et σ_2 de S_n sont conjuguées ssi il existe $\rho \in S_n$ tel que $\sigma_1 = \rho\sigma_2\rho^{-1}$.

1. Montrer que la relation «être conjuguée à» est une relation d'équivalence.
2. Montrer que deux cycles sont conjugués ssi ils ont la même longueur.
3. En déduire une caractérisation de la relation de conjugaison par l'écriture en produit de cycles à supports disjoints.

Indication p. 739

Exercice 8 (◔★ Un peu de dénombrement)
Soit $p \in [\![1, n]\!]$.

Combien existe-t-il de cycles de longueur p ?

Indication p. 739

Exercice 9 (◔★ Que l'identité)
Déterminer toutes les permutations $\sigma \in S_n$ telles que

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \sigma(k) \leq k.$$

Indication p. 739

Exercice 10 (◔★ Signature de petit Gauss)
Déterminer la signature de la permutation

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ n & n-1 & n-2 & \cdots & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Indication p. 739 · Solution p. 748

Exercice 11 (◔★ Morphismes de S_n dans $\mathbb{C}^*$)
Déterminer tous les morphismes de groupes de $(S_n, \circ)$ dans $(\mathbb{C}^*, \times)$.

Indication p. 739

Exercice 12 (◔★ Cardinal de A_n)
Soit $n \geq 2$.

Montrer que

$$|A_n| = \frac{n!}{2}.$$

Indication p. 740

Exercice 13 (◑★♠ Les 3-cycles engendrent A_n)
Montrer que les 3-cycles engendrent A_n.

Indication p. 740 · Solution p. 748

Exercice 14 (◔★ Nombre moyen de points fixes)
Pour $\sigma \in S_n$ on note $F(\sigma)$ le nombre de points fixes de σ.

Déterminer

$$\frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} F(\sigma).$$

Indication p. 740 · Solution p. 750

Exercice 15 (◑★ Nombre moyen d'orbites)
Pour $\sigma \in S_n$ on note $N(\sigma)$ le nombre d'orbites sous σ.

Montrer que

$$\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n} N(\sigma) = H_n$$

où $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Indication p. 740 · Solution p. 751

Exercice 16 (◑★ Nombre de dérangements)
On appelle dérangement toute permutation de S_n sans point fixe.

Déterminer le nombre de dérangements de S_n.

Indication p. 741 · Solution p. 754

Exercice 17 (◑☆ Centre du groupe symétrique)
1. Déterminer l'ensemble des permutations de S_2 commutant avec toutes les permutations de S_2.
2. Soit $n \geq 3$. Déterminer l'ensemble des permutations de S_n commutant avec toutes les permutations de S_n.

Indication p. 741

Exercice 18 (◔☆ Sous-groupes de S_3)
Déterminer tous les sous-groupes de S_3.

Indication p. 741

Exercice 19 (◔☆ Morphisme dans un groupe commutatif)
Soit A un groupe abélien et $\varphi : S_n \to A$ un morphisme de groupes. Montrer qu'il existe $\iota : \{\pm 1\} \to A$ tel que $\varphi = \iota \circ \varepsilon$.

Indication p. 741

Exercice 20 (◑★ Ordre d'une permutation)

1. Soit $p \in [\![1, n]\!]$.

Déterminer l'ordre d'un p cycle.

2. En déduire l'ordre d'une permutation en fonction de son écriture en produit de cycles à supports disjoints.

Indication p. 741

Exercice 21 (◔★▫ Calcul explicite de DPCSD)

Écrire une fonction `python` prenant en argument une permutation de S_n (par exemple représentée par la liste des images de $1, 2, ..., n$) et renvoyant une écriture de cette permutation en produit de cycles à supports disjoints (par exemple représentée par une liste de listes d'entiers).

Indication p. 741 · Solution p. 755

Exercice 22 (◑☆ Permutations commutant avec un n-cycle)

Soit $\gamma \in S_n$ un n-cycle.

Déterminer l'ensemble des permutations commutant avec γ.

Indication p. 741

Exercice 23 (◑☆ Pleins de tours)

Pour tout entier k on note c_k le cycle

$$c_k = (1\ 2\ \cdots\ k).$$

Montrer que toute permutation $\sigma \in S_n$ peut s'écrire

$$\sigma = c_n^{m_n} c_{n-1}^{m_{n-1}} \cdots c_3^{m_3} c_2^{m_2}$$

où pour tout k, $m_k \in [\![0, k-1]\!]$.

Montrer que cette écriture est unique.

Indication p. 741

Exercice 24 (◑☆ Puissances d'un n cycle)
Soit γ un n-cycle.

Déterminer pour $k \in \mathbb{N}$ le nombre d'orbites selon γ^k.

Indication p. 742

Exercice 25 (◔☆ Une petite injection)
Expliciter un morphisme de groupe injectif de S_n dans A_{n+2}.

Indication p. 742

Exercice 26 (◑☆ Fonction de Landau)
Pour $n \in \mathbb{N}$ on note $g(n)$ le plus grand ordre d'un élément de S_n.

Calculer $g(k)$ pour tout $k \in [\![0, 7]\!]$.

Indication p. 742 · Solution p. 756

Exercice 27 (◔☆ Il faut un minimum de transpositions)
Soient $\tau_1, ..., \tau_r$ des transpositions engendrant S_n.

Montrer que $r \geq n-1$.

Indication p. 742

Exercice 28 (◑☆ Un exemple d'utilisation des résultats précédents)
Soit $f : S_n \to S_n$ un morphisme.

Montrer que $f(A_n) \subset A_n$.

Indication p. 742 · Solution p. 756

Exercice 29 (◔☆ Une réciproque partielle)
1. Donner un exemple de deux cycles c_1, c_2 de même supports et qui ne commutent pas.
2. Montrer que si c_1 et c_2 sont deux cycles qui commutent alors ils ont le même support ou leurs supports sont disjoints.

Indication p. 742

Exercice 30 (◕☆ Conjugaison dans A_n)
Pour $\sigma_1, \sigma_2 \in A_n$ on dit que σ_1 et σ_2 sont conjugués dans A_n ssi il existe $\rho \in A_n$ tel que $\sigma_1 = \rho\sigma_2\rho^{-1}$.

1. Montrer que pour $n = 3$ les 3-cycles ne sont pas tous conjugués dans A_n.

2. Montrer que pour $n = 4$ les 3-cycles ne sont pas tous conjugués dans A_n.

3. Montrer que pour $n \geq 5$ les 3-cycles sont tous conjugués dans A_n.

Indication p. 742

Exercice 31 (◕★ Un contre-exemple)

1. Montrer que $6 \mid 12$ et $|A_4| = 12$.

2. Existe-t-il un sous-groupe d'ordre 6 de A_4 ?

Indication p. 742

Exercice 32 (●★ Automorphismes de S_n)
Montrer que pour $n \neq 6$ tout automorphisme de S_n est intérieur c'est à dire que tout morphisme de groupe de S_n dans S_n bijectif est de la forme $\begin{array}{ccc} S_n & \to & S_n \\ \sigma & \mapsto & \rho\sigma\rho^{-1} \end{array}$.

Indication p. 743 · Solution p. 757

Exercice 33 (◕★ Majoration de la fonction de Landau)
On note pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g(n)$ le plus grand ordre d'un élément de S_n (cf exercice 26).

Montrer qu'il existe $\alpha \in [0, e^1[$ tel que

$$g(n) = O_{n\to+\infty}(\alpha^n).$$

Indication p. 743 · Solution p. 760

Exercice 34 (◑☆ Nombre d'involutions)
On appelle involution toute permutation $\sigma \in S_n$ telle que $\sigma^2 = \mathrm{Id}$.

Déterminer le nombre d'involutions de S_n, on exprimera le résultat sous forme d'une somme.

Indication p. 744

Exercice 35 (◑★ Un peu de groupe diédral)
Soit $n \geq 3$. On note $r = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \end{pmatrix}$ et $s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ n & n-1 & n-2 & \cdots & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

On note D_n le sous-groupe de S_n engendré par r et s, c'est à dire le plus petit sous-groupe de S_n contenant r et s.

1. Montrer que $srs = r^{-1}$.

2. Montrer que $D_n = \{r^k, sr^k, k \in [\![0, n-1]\!]\}$. En déduire que $|D_n| = 2n$.

3. Interpréter **géométriquement** D_n.

Indication p. 744

Indications

Indication 1 · Énoncé p. 730 (Théorème de Cayley)
Considérer $a \mapsto (x \mapsto ax)$.

Ainsi «le groupe des permutations est compliqué».

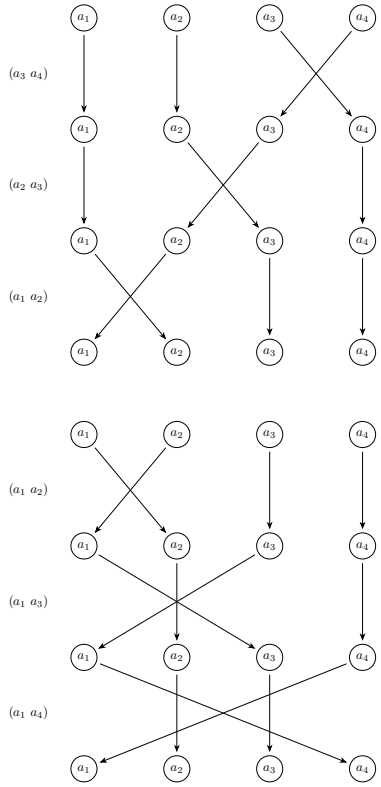
Indication 2 · Énoncé p. 730 (Quelques calculs sur les cycles du cours à savoir redémontrer)
Cf cours.

Pour l'écriture en produit de transpositions il y a de nombreuses versions possibles, par exemple

$$(a_1\ a_2\ \cdots\ a_k) = (a_1\ a_k)(a_1\ a_{k-1})\cdots(a_1\ a_2)$$

ou

$$(a_1\ a_2\ \cdots\ a_k) = (a_1\ a_2)(a_2\ a_3)\cdots(a_{k-1}\ a_k).$$



Indication 3 · Énoncé p. 730 (Matrice de permutation)
Montrer d'abord que $P_{\sigma_1 \circ \sigma_2} = P_{\sigma_1} P_{\sigma_2}$ avant de montrer la bonne définition.

Solution p. 745

Indication 4 · Énoncé p. 730 (Des générateurs de S_n: sélection)
Faire des schémas.

Montrer que l'on peut ainsi engendrer toutes les transpositions.

Solution p. 745

Indication 5 · Énoncé p. 731 (Des générateurs de S_n: bulle)
Faire des schémas.

Montrer que l'on peut engendrer toutes les transpositions $(i\ j)$ par récurrence sur $|i-j|$. Ou bien montrer par récurrence sur i que l'on peut engendrer $(1\ i)$. Ou bien montrer la terminaison du tri bulle.

Solution p. 746

Indication 6 · Énoncé p. 731 (Des générateurs de S_n: un grand tour et un tout petit)
Faire des schémas.

Montrer que l'on peut ainsi engendrer toutes les transpositions de la forme $(1\ i)$. Ou bien les $(i\ i+1)$.

Solution p. 747

Indication 7 · Énoncé p. 731 (Classe de conjugaison)
1. Vérifier la définition.
2. Utiliser $\sigma(a_1\ a_2 \cdots a_n)\sigma^{-1} = (\sigma(a_1)\ \sigma(a_2) \cdots \sigma(a_n))$.
3. La caractérisation porte sur les longueurs des cycles.

Indication 8 · Énoncé p. 731 (Un peu de dénombrement)
Remarquer qu'un p-cycle correspond à p différents p-uplets d'éléments deux à deux distincts de $[\![1,n]\!]$.

Indication 9 · Énoncé p. 731 (Que l'identité)
Procéder par récurrence (soit sur n, soit à n fixé une récurrence finie sur k, ou encore un principe de minimum).

Indication 10 · Énoncé p. 732 (Signature de petit Gauss)
Par exemple décomposer en produit de transpositions.

Solution p. 748

Indication 11 · Énoncé p. 732 (Morphismes de S_n dans $\mathbb{C}^*$)
Il n'y a que 1 et ε.

Une façon de le montrer est de constater que toutes les transpositions étant conjuguées, elles ont la même image. Cette image est soit 1 soit -1.

Indication 12 · Énoncé p. 732 (Cardinal de A_n)
Par exemple montrer que pour $\tau \notin A_n$, $\sigma \mapsto \sigma\tau$ est une bijection envoyant A_n sur son complémentaire.

Indication 13 · Énoncé p. 732 (Les 3-cycles engendrent A_n)
Tout élément de A_n est produit d'un nombre pair de transpositions.

Remarquer que pour i, j, k, l deux à deux distincts

$$(i\ j)(k\ l) = (i\ k\ j)(k\ l\ i)$$

$$(i\ j)(i\ k) = (i\ k\ j)$$

Solution p. 748

Indication 14 · Énoncé p. 732 (Nombre moyen de points fixes)
Écrire la somme comme

$$\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n}\sum_{i\in[\![1,n]\!]}\delta_{i=\sigma(i)}$$

et intervertir la somme double.

On obtient 1.

Solution p. 750

Indication 15 · Énoncé p. 733 (Nombre moyen d'orbites)
Comme dans l'exercice 14, réécrire la somme comme

$$\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n}\sum_{\substack{A\subset[\![1,n]\!]\\|A|=k}}\delta_{A \text{ est une orbite de } \sigma}$$

puis intervertir les sommes.

Il reste à calculer pour $A \in \mathcal{P}([\![1,n]\!])$ de cardinal k fixé le nombre de permutations dont A est une orbite.

Pour cela choisir le k-cycles ($(k-1)!$ possibilités) puis le reste de la permutation ($(n-k)!$ possibilités).

Variante beaucoup plus astucieuse: montrer que $P_n = \sum_{\sigma\in S_n} X^{N(\sigma)}$ est scindé et que $P_n = X(X+1)\cdots(X+(n-1))$ et effectuer une décomposition en éléments simples de $\frac{P'}{P}$. Pour cela procéder par récurrence sur n et interpréter $P_{n+1} = XP_n + nP_n$ comme une disjonction de cas sur l'antécédent (ou l'image) de $n+1$.

Solution p. 751

Indication 16 · Énoncé p. 733 (Nombre de dérangements)
En notant D_n le nombre de dérangements de S_n remarquer que

$$n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} D_k$$

et utiliser une formule d'inversion de Pascal.

Solution p. 754

Indication 17 · Énoncé p. 733 (Centre du groupe symétrique)
1. S_2
2. Si σ commute avec $(i\ j)$ alors $\{\sigma(i), \sigma(j)\} = \{i, j\}$. Prendre trois éléments.

Indication 18 · Énoncé p. 733 (Sous-groupes de S_3)
En plus de $\{\mathrm{Id}\}$ et de S_3 on obtient les sous-groupes engendrés par un élément (pourquoi est ce les seuls ?).

Indication 19 · Énoncé p. 733 (Morphisme dans un groupe commutatif)
Faire de même que pour l'exercice 11.

Indication 20 · Énoncé p. 734 (Ordre d'une permutation)
1. Montrer qu'il s'agit de p.
2. Attention l'ordre d'un produit d'éléments qui commute n'est pas forcément le produit de l'ordre. On obtient le ppcm des longueurs des cycles.

Indication 21 · Énoncé p. 734 (Calcul explicite de DPCSD)
Commencer par être clair sur la structure de donnée, par exemple représenter la permutation $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ par la liste $[2, 1, 4, 5, 3]$ et l'écriture en produit de cycles à supports disjoints $(1\ 2)(3\ 4\ 5)$ par la liste $[[1, 2], [3, 4, 5]]$.

Ensuite instancier la preuve du cours en remarquant que pour éviter de recalculer les mêmes cycles le plus simple est de créer un tableau de booléens indiquant si un élément a déjà été traité ou pas.

Solution p. 755

Indication 22 · Énoncé p. 734 (Permutations commutant avec un n-cycle)
On obtient comme seules solutions les puissances de γ.

Indication 23 · Énoncé p. 734 (Pleins de tours)
Faire un schéma.

Pour l'existence procéder par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, et pour l'hérédité montrer qu'en composant par $c_n^{-m_n}$ on peut stabiliser n.

Pour l'unicité on peut aussi procéder de même.

Indication 24 · Énoncé p. 735 (Puissances d'un n cycle)
On obtient le pgcd entre n et k.

Indication 25 · Énoncé p. 735 (Une petite injection)
Selon la parité composer par $(n+1\ n+2)$.

Indication 26 · Énoncé p. 735 (Fonction de Landau)
On obtient 1, 1, 2, 3, 4, 6, 6, 12.

Solution p. 756

Indication 27 · Énoncé p. 735 (Il faut un minimum de transpositions)
Faire un schéma: en termes de graphes, si un graphe à n sommets est connexe son nombre d'arêtes est au moins $n-1$ (par exemple par récurrence).

Indication 28 · Énoncé p. 735 (Un exemple d'utilisation des résultats précédents)
Remarquer que $\varepsilon \circ f$ est un morphisme.

Ou bien montrer que toute permutation de A_n est produit de carrés car un trois cycle est un carré.

Solution p. 756

Indication 29 · Énoncé p. 735 (Une réciproque partielle)
1. Regarder deux 4-cycles.
2. Montrer que si il y a un point commun dans les supports, alors ce sont les mêmes.

Indication 30 · Énoncé p. 736 (Conjugaison dans A_n)
1. Pour $n=3$, A_3 est commutatif de cardinal 3 et contient 2 3-cycles.
2. Pour $n=4$ construire un exemple explicite, ou bien (plus dur) constater que $|A_4|=12$ et qu'il y a 8 3-cycles et que si ils étaient tous conjugués on aurait (pourquoi ?) $8|12$.
3. Étant donnés a_1,a_2,a_3 distincts et b_1,b_2,b_3 distincts il suffit de montrer qu'il existe $\sigma \in A_n$ tel que $\sigma(a_i)=b_i$ pour $i=1,2,3$.

   Constater qu'il existe un tel $\sigma \in S_n$.

   Si il est dans A_n c'est ok.

   Sinon trouver une transposition à support disjoint de $\{a_1,a_2,a_3\}$.

Indication 31 · Énoncé p. 736 (Un contre-exemple)
1. RAS
2. Non. Supposons par l'absurde que H est un sous-groupe de A_4 de cardinal 6. On a plusieurs méthodes pour aboutir à une contradiction,

- ▹ Montrer que comme $H \neq A_4$ il existe σ un 3-cycle tel que $\sigma \notin H$. Constater que parmi $H, \sigma H, \sigma^2 H$ deux sont égaux ce qui est absurde.
- ▹ Constater que H est un sous-groupe d'ordre 6 mais que A_4 n'a pas d'élément d'ordre 6 et donc H n'est isomorphe ni à $\frac{\mathbb{Z}}{6}\mathbb{Z}$ ni à $\frac{\mathbb{Z}}{3}\mathbb{Z} \times \frac{\mathbb{Z}}{2}\mathbb{Z}$. Si on connaît sa classification des petits groupes on peut en déduire que H est isomorphe à S_3. Mais il contient alors trois éléments d'ordre 2 d'où on peut déduire que $4|6$ ce qui est absurde.

Indication 32 · Énoncé p. 736 (Automorphismes de S_n)

- ▹ Commencer par traiter les exercices classiques dans la feuille de TD, notamment concernant les générateurs de S_n 4, 5, le calcul des classes de conjugaison 7, de l'ordre 20 ainsi que le nombre d'involutions 34.
- ▹ Montrer que l'image de l'ensemble des transposition est l'ensemble des transpositions.
  - ▹ L'image d'un élément d'ordre 2 est d'ordre 2.
  - ▹ Les classes de conjugaisons sont envoyées sur des classes de conjugaison.
  - ▹ Dénombrer le nombre d'éléments de la classe de conjugaison constituée des permutations contenant k transpositions dans leurs DPCSD.
  - ▹ À un moment remarquer que le cas particulier $n = 6$ apparaît car si $n \neq 6$ alors l'équation

$$\binom{n}{2} = \frac{\prod_{i=0}^{k-1} \binom{n-2i}{2}}{k!}$$

    d'inconnue k n'a pas de solution autre que $k = 1$.
- ▹ Montrer que si un automorphisme envoie toute transposition sur une transposition alors il est intérieur. En effet, si c'est le cas
  - ▹ Constater que l'image de deux transpositions qui ne commutent pas ne commutent pas.
  - ▹ Traiter le cas particulier de (1 2) et (1 3).
  - ▹ Pour tout i l'image de (1 i) est de la forme (a_1 a_i). (par exemple par récurrence).
  - ▹ Conclure.

Solution p. 757

Indication 33 · Énoncé p. 736 (Majoration de la fonction de Landau)
Remarque culturelle: cette borne est loin d'être optimale étant donné qu'on peut montrer que $\ln(g(n)) \sim \sqrt{n \ln(n)}$, mais est mieux que la borne naïve étant donné que $\ln(1 \vee 2 \vee \cdots \vee n) \sim n$.

Remarquer que:

- ▹ $g(n)$ est le maximum des ppcm de $c_1, \cdots, c_r$ où $c_1 + \cdots + c_r = n$,
- ▹ que le ppcm est majoré par le produit,
- ▹ par exemple faire une IAG,
- ▹ puis constater que $x \mapsto \left(\frac{n}{x}\right)^x$ est maximum pour $x = \frac{n}{e}$,
- ▹ en déduire $\alpha = e^{\frac{1}{e}}$ convient.

Alternativement une fois réduit à majorer le produit on peut essayer d'être malin en utilisant par exemple que pour $m \geq 4$ on a $2(m-2) > m$ et obtenir finalement un $\alpha = 3^{\frac{1}{3}}$ (ce qui est légèrement mieux).

Solution p. 760

Indication 34 · Énoncé p. 736 (Nombre d'involutions)
En notant I_n le nombre d'involutions de S_n remarquer que

$$n! = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} I_{2k}$$

et utiliser une formule d'inversion de Pascal.

Alternativement on peut construire une telle involution: dans sa DPCSD, il n'y a que des transpositions. Il faut donc

- ▷ Choisir le nombre k de transpositions,
- ▷ choisir les $2k$ éléments du support,
- ▷ choisir les k transpositions à partir de ces $2k$ éléments (en divisant par $k!$ pour ne pas tenir compte de l'ordre).

On obtient dans tous les cas

$$I_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} \frac{(2k)!}{2^k k!}.$$

On remarque qu'il existe aussi une formule de récurrence d'ordre 2:

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+2} = I_{n+1} + (n+1) I_n$$

mais que le passage à une formule explicite n'est pas immédiat (sans séries entières).

Indication 35 · Énoncé p. 737 (Un peu de groupe diédral)

1. Calcul en constatant de plus que $s^{-1} = s$.
2. Pour $\subset$ utiliser la relation précédente avec de plus $s^2 = \mathrm{Id}$.
3. Il s'agit du **groupe diédral** qui est le groupe de symétries d'un polygone régulier à n côté:
   - ▷ r correspond à une rotation d'angle $\frac{2\pi}{n}$,
   - ▷ s correspond à une symétrie
   - ▷ les r^k correspondent aux rotations d'angle $\frac{2k\pi}{n}$,
   - ▷ les sr^k correspondent aux symétries.

Solutions

Solution pour l'exercice 3 · Énoncé p. 730 · Indication p. 738 (Matrice de permutation)

1. Soient $\sigma_1, \sigma_2 \in S_n$.

On a pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$,

$$\begin{aligned}\left(P_{\sigma_1}P_{\sigma_2}\right)_{i,j} &= \sum_{k=1}^{n} P_{\sigma_1}(i,k)P_{\sigma_2}(k,j)\\ &= \sum_{k=1}^{n} \delta_{i,\sigma_1(k)}\delta_{k,\sigma_2(j)}\\ &= \delta_{i,\sigma_1(\sigma_2(j))}\\ &= P_{\sigma_1\circ\sigma_2}(i,j).\end{aligned}$$

Ainsi

$$P_{\sigma_1\circ\sigma_2} = P_{\sigma_1}P_{\sigma_2}.$$

▷ **Bonne définition**

Soit $\sigma \in S_n$.

On a $P_\sigma P_{\sigma^{-1}} = P_{\sigma\circ\sigma^{-1}} = P_{\mathrm{Id}} = I_n$, d'où $P_\sigma \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

D'où la bonne définition.

▷ **Morphisme**

On a déjà montré que pour tous $\sigma_1, \sigma_2 \in S_n$, $P_{\sigma_1\circ\sigma_2} = P_{\sigma_1}P_{\sigma_2}$ et donc il s'agit bien d'un morphisme.

2. La multiplication par P_σ à gauche revient à effectuer la permutation σ sur les lignes.

La multiplication par P_σ à droite revient à effectuer la permutation σ sur les colonnes.

Pour démontrer cela on peut effectuer un calcul explicite ou bien constater qu'il s'agit d'une propriété du cours pour les transpositions, et que comme toute permutation est produit de transpositions et qu'il s'agit d'un morphisme, c'est aussi le cas pour toute permutation (à détailler si nécessaire).

Solution pour l'exercice 4 · Énoncé p. 730 · Indication p. 738 (Des générateurs de S_n : sélection)
Comme toute permutation est produit de transpositions, il suffit de montrer qu'on peut engendrer toutes les transpositions.

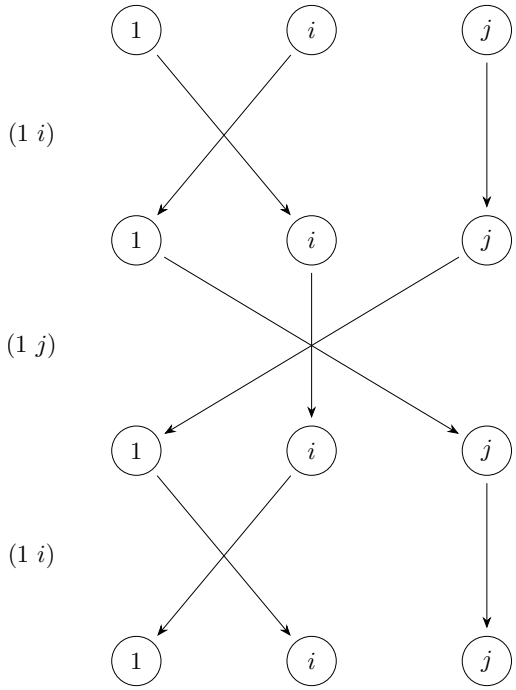
Les transpositions de la forme $(1\ i)$ sont engendrées.

Soient $i, j \in [\![2,n]\!]$ tels que $i \neq j$.

On peut alors engendrer la transposition $(i\ j)$ en «utilisant 1 comme variable de stockage temporaire», c'est à dire en remarquant que

$$(1\ i)(1\ j)(1\ i) = (i\ j).$$

Schéma



Ainsi toute transpositions est produit de transpositions de la forme $(1\ i)$, et donc $\boxed{S_n \text{ est engendré par les transpositions de la forme } (1\ i)}$.

Solution pour l'exercice 5 · Énoncé p. 731 · Indication p. 739 (Des générateurs de S_n: bulle)
On va utiliser l'exercice 4 (mais ce n'est pas la seule méthode).

Comme les transpositions de la forme $(1\ i)$ engendrent S_n, il suffit de montrer que toutes les transpositions de la forme $(1\ i)$ sont engendrées par les transpositions de la forme $(j\ j+1)$.

On procède par récurrence finie sur $i \in [\![2, n]\!]$.

- **Initialisation**

  Pour $i = 2$.

  On a $(1\ 2) = (1\ 2)$.
- **Hérédité**

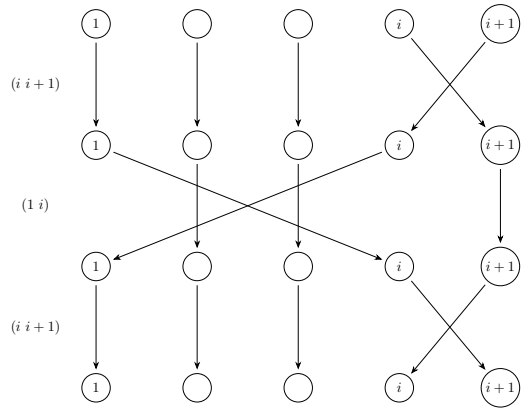
  Soit $i \in [\![2, n-1]\!]$. Supposons que $(1\ i)$ est produit de permutations de la forme $(j\ j+1)$ avec j entre 1 et $n-1$.

  Alors

  $$(1\ i+1) = (i\ i+1)(1\ i)(i\ i+1)$$

  est bien un produit de permutations de la forme $(j\ j+1)$ avec j entre 1 et $n-1$.

  Schéma



▷ **Conclusion**

Par récurrence finie, pour tout $i \in [\![2, n]\!]$, $(1\ i)$ est produit de transpositions de la forme $(j\ j+1)$.

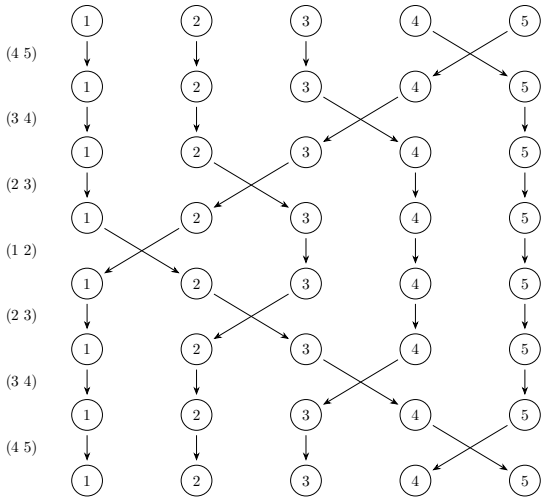
Donc $\boxed{S_n \text{ est engendré par les permutations de la forme } (j\ j+1)}$ pour j entre 1 et $n-1$.

Remarque schématique

De manière strictement équivalente à la récurrence, on peut constater le produit suivant

$$(i-1\ i)(i-2\ i-1)\cdots(2\ 3)(1\ 2)(2\ 3)\cdots(i-2\ i-1)(i-1\ i) = (1\ i)$$

ou un autre produit équivalent (par exemple $(1\ 2)(2\ 3)\cdots(i-2\ i-1)(i-1\ i)(i-2\ i-1)\cdots(2\ 3)(1\ 2)$).



Solution pour l'exercice 6 · Énoncé p. 731 · Indication p. 739 (Des générateurs de S_n: un grand tour et un tout petit)
On va utiliser l'exercice 5 (mais ce n'est pas la seule méthode).

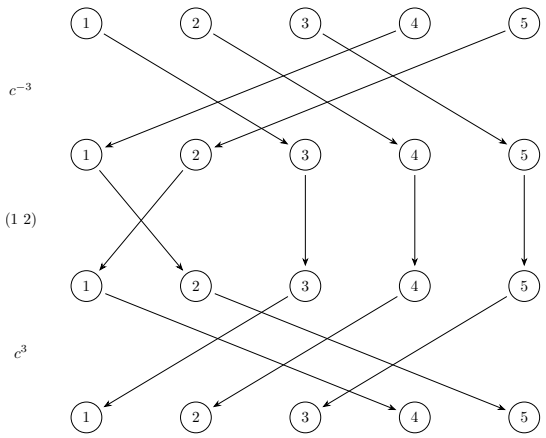
Comme les transpositions de la forme $(i\ i+1)$ engendrent S_n, il suffit de montrer que toutes les transpositions de la forme $(i\ i+1)$ sont engendrées par le n-cycle $c = (1\ 2\ \cdots\ n)$ et la transposition $(1\ 2)$.

Soit $i \in [\![1, n-1]\!]$.

On a (conjugaison d'un cycle)

$$c^{i-1}(1\ 2)c^{-(i-1)} = \big(c^{i-1}(1)\ c^{i-1}(2)\big) = (i\ i+1)$$

Schéma



et comme $c^n = \mathrm{Id}$, on a $c^{-(i-1)} = c^{n-(i-1)}$.

D'où $(i\ i+1)$ est produit de c et $(1\ 2)$.

Ainsi $\boxed{S_n \text{ est engendré par le } n\text{-cycle } (1\ 2\ \cdots\ n) \text{ et la transposition } (1\ 2)}$.

Solution pour l'exercice 10 · Énoncé p. 732 · Indication p. 739 (Signature de petit Gauss)
On observe que cette permutation est produit de $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ transpositions de la forme $(i\ (n+1-i))$.

Ainsi la signature est de $\boxed{(-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}$.

Cela peut se réécrire selon la congruence modulo 4 de n:

$$\begin{cases} 1 & \text{si } n \equiv 0 \bmod 4 \\ 1 & \text{si } n \equiv 1 \bmod 4 \\ -1 & \text{si } n \equiv 2 \bmod 4 \\ -1 & \text{si } n \equiv 3 \bmod 4. \end{cases}$$

Solution pour l'exercice 13 · Énoncé p. 732 · Indication p. 740 (Les 3-cycles engendrent A_n)
Un 3-cycle est de signature $(-1)^{3-1}$ et donc dans A_n.

Réciproquement, toute permutation de A_n est produit d'un nombre pair de transposition, et donc en regroupant deux par deux, produit de produits de deux transposition.

Il suffit donc de montrer que tout produit de deux transpositions est un produit de 3-cycles.

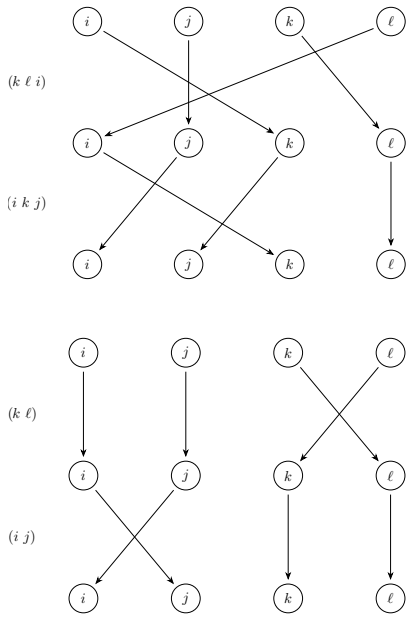
Soient $(i\ j)$ et $(k\ \ell)$ deux transpositions

- ▹ **Si $\{i, j\} \cap \{k, \ell\} = \varnothing$**, c'est à dire les deux transpositions sont à support disjoint.

  On a alors (cf schéma)

$$(i\ j)(k\ \ell) = (i\ k\ j)(k\ \ell\ i)$$

Schéma



▷ **Si $\{i,j\} \cap \{k,\ell\} \neq \varnothing$.**

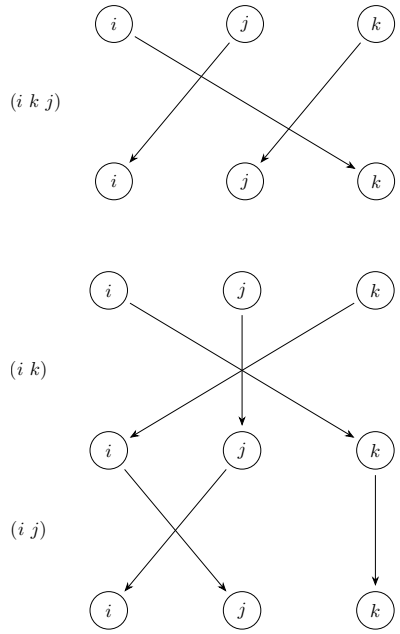
Dans le cas où $\{i,j\} = \{k,\ell\}$ on $(i\ j)(k\ \ell) = \mathrm{Id}$ qui est le produit de 0 3-cycles.

Sinon, l'intersection contient exactement un élément, et quitte à renommer on peut supposer que $i = \ell$ et $k \neq j$.

On a alors (cf schéma)

$$(i\ j)(i\ k) = (i\ k\ j)$$

Schéma



Dans tous les cas le produit $(i\ j)(k\ \ell)$ est un produit de 3-cycles.

On a donc bien $\boxed{\text{les 3-cycles engendrent } A_n}$.

Solution pour l'exercice 14 · Énoncé p. 732 · Indication p. 740 (Nombre moyen de points fixes)
On a pour tout $\sigma \in S_n$,

$$F(\sigma) = \sum_{i=1}^{n} \delta_{i=\sigma(i)}.$$

On peut donc réécrire la somme comme une somme double et intervertir (ce genre de manipulations sera très utile en dénombrement et probabilités, cf les méthodes d'espérances d'indicatrices):

$$\begin{aligned}\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n} F(\sigma) &= \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n}\sum_{i=1}^{n}\delta_{i=\sigma(i)}\\ &= \frac{1}{n!}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\sigma\in S_n}\delta_{i=\sigma(i)}.\end{aligned}$$

Or à $i \in [\![1, n]\!]$ fixé on a

$$\sum_{\sigma\in S_n}\delta_{i=\sigma(i)} = (n-1)!$$

car il y a exactement $(n-1)!$ permutations de S_n qui fixent i (on peut construire une bijection explicite avec S_{n-1}, cf les méthodes du cours).

Par conséquent

$$\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n} F(\sigma) = \frac{1}{n!}\sum_{i=1}^{n}(n-1)!$$

c'est à dire

$$\boxed{\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n} F(\sigma) = 1}.$$

Remarque: on peut ainsi calculer la moyenne des $F(\sigma)$ sans calculer explicitement le nombre de permutations ayant k points fixes.

En effet en notant pour tout entier k, D_k le nombre de dérangements de k éléments (cf exercice 16), on trouve que le nombre de permutations de S_n ayant exactement k points fixes est $\binom{n}{k}D_{n-k}$ (il faut choisir les k points fixes puis le dérangement des autres).

Par l'exercice 16 on trouve que le nombre de permutations de S_n ayant exactement k points fixes est $\binom{n}{k}(n-k)!\sum_{i=0}^{n-k}\frac{(-1)^i}{i!}$, et il s'agit ensuite d'un calcul de sommes doubles et de simplifications de factorielles.

Solution pour l'exercice 15 · Énoncé p. 733 · Indication p. 740 (Nombre moyen d'orbites)
On a pour tout $\sigma \in S_n$,

$$N(\sigma) = \sum_{A\in\mathcal{P}(\llbracket 1,n\rrbracket)} \delta_{A \text{ est une orbite de } \sigma}.$$

Par conséquent, en notant pour tout k, $\mathcal{P}_k(\llbracket 1,n\rrbracket)$ l'ensemble des parties de $\llbracket 1,n\rrbracket$ à k éléments,

$$\begin{aligned}\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n} N(\sigma) &= \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n}\sum_{A\in\mathcal{P}(\llbracket 1,n\rrbracket)} \delta_{A \text{ est une orbite de } \sigma}\\ &= \frac{1}{n!}\sum_{A\in\mathcal{P}(\llbracket 1,n\rrbracket)}\sum_{\sigma\in S_n} \delta_{A \text{ est une orbite de } \sigma}\\ &= \frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n}\sum_{A\in\mathcal{P}_k(\llbracket 1,n\rrbracket)}\sum_{\sigma\in S_n} \delta_{A \text{ est une orbite de } \sigma}\end{aligned}$$

Soit A une partie de $\llbracket 1,n\rrbracket$ à k éléments. Comptons le nombre de permutations de S_n pour lesquelles A est une orbite.

Pour construire une telle permutation il faut:

- ▷ choisir un k-cycle sur A, en fixant un élément quelconque $a \in A$, cela revient à choisir $\sigma(a)$ dans $A\setminus\{a\}$, soit $k-1$ possibilités, puis choisir $\sigma^2(a)$ dans $A\setminus\{a,\sigma(a)\}$, soit $k-2$ possibilités, etc. jusqu'à choisir $\sigma^{k-1}(a)$ avec 1 possibilités, soit au total $(k-1)!$ possibilités.
- ▷ choisir une permutation de $\llbracket 1,n\rrbracket\setminus A$, soit $(n-k)!$ possibilités.

Et donc au total

$$(k-1)!(n-k)!$$

possibilités.

Par conséquent, comme $\mathcal{P}_k(\llbracket 1,n\rrbracket)$ est de cardinal $\binom{n}{k}$, on a donc

$$\frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n}\sum_{A\in\mathcal{P}_k([\![1,n]\!])}\sum_{\sigma\in S_n}\delta_{A \text{ est une orbite de } \sigma} = \frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n}\sum_{A\in\mathcal{P}_k([\![1,n]\!])}(k-1)!(n-k)!$$
$$= \frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(k-1)!(n-k)!$$
$$= \sum_{k=1}^{n}\frac{n!(n-k)!(k-1)!}{n!(n-k)!k!}$$

et donc on a bien

$$\boxed{\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n}N(\sigma)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}.$$

Variante (adaptée d'une idée de Mayeul H.)

Notons pour tout entier n,

$$P_n=\sum_{\sigma\in S_n}X^{N(\sigma)}.$$

Soit $n\in\mathbb{N}$.

Notons que

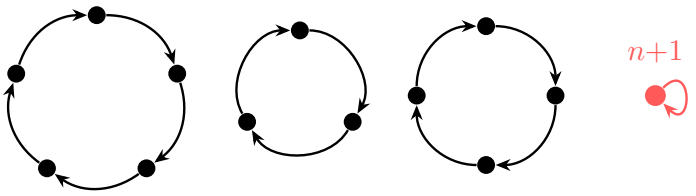
$$S_{n+1}=\{\sigma\in S_{n+1}\mid\sigma(n+1)=n+1\}\sqcup\bigsqcup_{k=1}^{n}\{\sigma\in S_{n+1}\mid\sigma(k)=n+1\}.$$

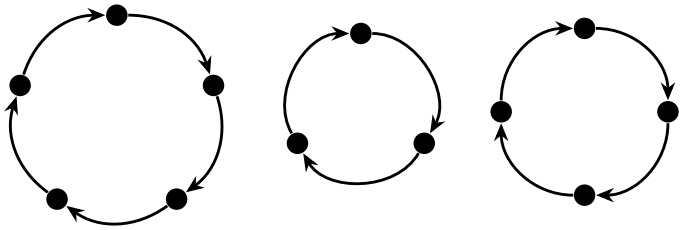
Or

- ▷ Pour tout $\sigma\in S_{n+1}$ tel que $\sigma(n+1)=(n+1)$, on peut associer une et unique permutation induite de S_n, et le nombre d'orbites est alors augmenté de 1 (celle de $n+1$). Ainsi

$$\sum_{\substack{\sigma\in S_{n+1}\\ \sigma(n+1)=(n+1)}}X^{N(\sigma)}=\sum_{\sigma\in S_n}X^{N(\sigma)+1}$$
$$=XP_n.$$

Schéma de σ et la permutation induite





▹ Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Pour tout $\sigma \in S_{n+1}$ tel que $\sigma(k) = n+1$, on peut associer une et unique permutation de S_n en «sautant $n+1$» dans le cycle le contenant c'est à dire en considérant $\tilde{\sigma}$ définie par

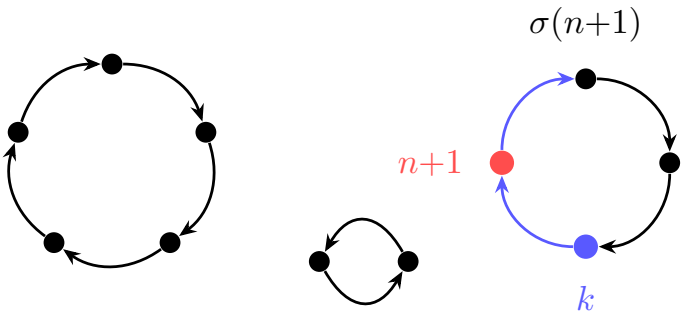
$$\forall i \in [\![1, n]\!], \tilde{\sigma}(i) = \begin{cases} \sigma(i) & \text{si } i \neq k \\ \sigma(n+1) & \text{si } i = k \end{cases}.$$

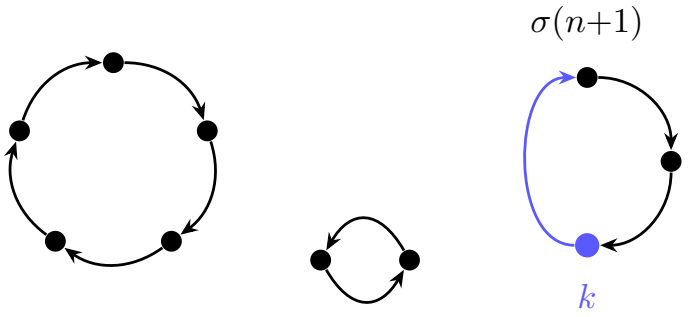
Alors on a $N(\sigma) = N(\tilde{\sigma})$ (car les cycles restent inchangés sauf celui contenant k qui reste un seul cycle, mais de longueur diminuée de 1) et $\sigma \mapsto \tilde{\sigma}$ est bijective, car $\tilde{\sigma}$ est l'induit de $\sigma \circ (k\ n+1)$

Ainsi

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{\sigma \in S_{n+1} \\ \sigma(k)=n+1}} X^{N(\sigma)} &= \sum_{\sigma \in S_n} X^{N(\sigma)} \\ &= P_n. \end{aligned}$$

Schéma de σ et l'induit de $\sigma \circ (k\ n+1)$





Ainsi on en déduit que

$$P_{n+1} = XP_n + \sum_{k=1}^{n} P_n = XP_n + nP_n.$$

Étant donné que $P_0 = 1$ (et $P_1 = X$), on en déduit par récurrence immédiate, que

$$\forall n \in \mathbb{N}, P_n = X(X+1)\cdots(X+(n-1)).$$

En particulier pour tout entier n, on a

$$P_n(1) = n!$$
$$P_n'(1) = \sum_{\sigma \in S_n} N(\sigma)$$

et il ne reste donc plus qu'à calculer $\frac{P_n'(1)}{P_n(1)}$.

Or on a la DÉS (en tant que polynôme scindé)

$$\frac{P_n'}{P_n} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{X+k}$$

d'où finalement en évaluant en 1 (qui n'est pas un pôle)

$$\boxed{\frac{\sum_{\sigma \in S_n} N(\sigma)}{n!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}.$$

Solution pour l'exercice 16 · Énoncé p. 733 · Indication p. 741 (Nombre de dérangements)
Notons pour tout $n \in \mathbb{N}$, D_n le nombre de dérangements de S_n.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, le nombre de permutations avec exactement k points fixes est de $\binom{n}{k} D_{n-k}$, en effet construire une telle permutation revient à:

- ▷ Choisir les k points fixes, soit $\binom{n}{k}$ possibilités,
- ▷ choisir un dérangement sur les $n-k$ éléments restants, soit D_{n-k} possibilités.

Comme S_n est l'union disjointe sur k des permutations avec k points fixes, on en déduit que

$$n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_{n-k}$$

ce qui peut se réécrire par changement d'indice

$$n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} D_k$$

ou encore par symétrie des coefficients binomiaux,

$$n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_k.$$

Rappel: Voir par exemple les exercices 8 ou 30 ou 14 pour les formules d'inversion de Pascal.

Le plus simple pour les retrouver résultat est de remarquer que l'inverse de la matrice dans la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$ de l'endomorphisme $P \mapsto P(X+1)$ est la matrice dans la base canonique de l'endomorphisme $P \mapsto P(X-1)$.

Par **formule d'inversion de Pascal** on en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}, D_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k!$$

ce qui peut se réécrire pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} D_n &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \frac{n!}{k!(n-k)!} k! \\ &= n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!} \\ &= n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \end{aligned}$$

d'où

$$\forall n \in \mathbb{N}, \boxed{D_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}}.$$

Remarque: en particulier la proportion de dérangement est de $\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$ et on verra que lorsque $n \to +\infty$ ce nombre tend (rapidement) vers e^{-1}.

Solution pour l'exercice 21 · Énoncé p. 734 · Indication p. 741 (Calcul explicite de DPCSD)
Pour simplifier on considère une permutation de S_n comme une permutation de $[\![0, n-1]\!]$ (il suffit de faire un décalage de 1 pour passer de l'un à l'autre).

Une permutation est alors représentée par la liste de ses images.

On utilise un tableau de booléens pour déterminer les éléments déjà traités.

On obtient alors comme programme possible:

```
1 def dpcsd(sigma):
2     """Retourne la DPCSD de sigma (sans les points fixes)."""
```

```python
    n = len(sigma)
    # deja_traite[i] indique si i appartient déjà à un cycle trouvé précédemment
    deja_traite = [False for _ in range(n)]
    dpcsd_sigma = []
    for i in range(n):
        if not deja_traite[i]:
            # On suit l'orbite de i : i -> sigma(i) -> sigma²(i) -> ... jusqu'à retomber sur i
            cycle = []
            element_courant = i
            # La boucle s'arrête quand on retombe sur i, car i a été marqué comme traité
            while not deja_traite[element_courant]:
                cycle.append(element_courant)
                deja_traite[element_courant] = True
                element_courant = sigma[element_courant]
            # On ignore les points fixes
            if len(cycle) > 1:
                dpcsd_sigma.append(cycle)
    return dpcsd_sigma

```

Solution pour l'exercice 26 · Énoncé p. 735 · Indication p. 742 (Fonction de Landau)
Par la décomposition en produit de cycles à supports disjoints et l'exercice 20, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$g(n) = \max_{\substack{c_1,\dots,c_r \in \mathbb{N}^* \\ c_1+\dots+c_r=n}} \left(\bigvee_{i=1}^{r} c_i \right)$$

où $\bigvee$ désigne le ppcm.

On peut alors écrire un script python (cf TP d'informatique) pour effectuer le calcul ou bien pour les petits cas faire le calcul à la main.

- Pour $n = 0$ et $n = 1$ il s'agit d'un ensemble à 1 élément donc $\boxed{g(0) = g(1) = 1}$.
- Pour $n = 2$ on a le maximum entre 1 et 2 est 2 donc $\boxed{g(2) = 2}$.
- Pour $n = 3$ on a le maximum entre $1 \vee 1 \vee 1$, $2 \vee 1$ et 3 est 3 donc $\boxed{g(3) = 3}$.
- Pour $n = 4$ on a le maximum entre $1 \vee 1 \vee 1 \vee 1$, $2 \vee 1 \vee 1$, $2 \vee 2$, $3 \vee 1$ et 4 est 4 donc $\boxed{g(4) = 4}$.
- Pour $n = 5$ on a le maximum entre $1 \vee 1 \vee 1 \vee 1 \vee 1$, $2 \vee 1 \vee 1 \vee 1$, $2 \vee 2 \vee 1$, $3 \vee 1 \vee 1$, $3 \vee 2$ et 5 est 6 donc $\boxed{g(5) = 6}$.
- Pour $n = 6$ on a le maximum entre $1 \vee 1 \vee 1 \vee 1 \vee 1 \vee 1$, $2 \vee 1 \vee 1 \vee 1 \vee 1$, $2 \vee 2 \vee 1 \vee 1$, $2 \vee 2 \vee 2$, $3 \vee 1 \vee 1 \vee 1$, $3 \vee 2 \vee 1$, $3 \vee 3$, $4 \vee 1 \vee 1$, $4 \vee 2$, $5 \vee 1$ et 6 est 6 donc $\boxed{g(6) = 6}$.
- Pour $n = 7$ on a un calcul similaire montre que $\boxed{g(7) = 12}$ (cela correspond à $7 = 3 + 4$ et $3 \vee 4 = 12$).

De manière générale on a la liste des premières valeurs suivantes (voir aussi OEIS A000793):

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$g(n)$	1	1	2	3	4	6	6	12	15	20	30	30	60

Solution pour l'exercice 28 · Énoncé p. 735 · Indication p. 742 (Un exemple d'utilisation des résultats précédents)

- **Version 1**

Comme composée de morphismes, $\varepsilon \circ f : S_n \to \{-1,+1\}$ est un morphisme.

Mais on sait qu'il existe exactement deux morphismes de S_n vers $\{-1,+1\}$, $1_{S_n\to\{-1,+1\}}$ et ε.

Mais dans tous les cas $\varepsilon(A_n) = 1_{S_n\to\{-1,+1\}}(A_n) = 1$.

D'où $\varepsilon \circ f(A_n) = 1$, c'est à dire

$$\boxed{f(A_n) \subset A_n}.$$

▷ **Version 2**

Par l'exercice 13, les 3-cycles engendrent A_n.

Soit c un 3-cycle. Alors $c^3 = \mathrm{Id}$ d'où $c = \left(c^2\right)^2$.

D'où

$$(\varepsilon \circ f)(c) = \varepsilon(f(c)) = \varepsilon\Big(f\Big(\left(c^2\right)^2\Big)\Big) = \varepsilon(f(c^2))^2 = 1.$$

Comme $1_{A_n\to\{-1,+1\}}$ et $\varepsilon \circ f$ coïncident sur une famille génératrice et sont des morphismes, ils sont donc égaux.

Donc

$$\boxed{f(A_n) \subset A_n}.$$

Remarque: on a utilisé que toute permutation de A_n est un produit de 3-cycles est que tout 3-cycle est un carré.

On pourrait être tenté de penser que toute permutation de A_n est un carré, mais attention ici on a utilisé que dans $\{-1,1\}$, $(ab)^2 = a^2b^2$, ce qui n'est pas le cas dans A_n. Par exemple $(1\ 2)(3\ 4\ 5\ 6)$ n'est pas un carré dans S_6 (on pourrait montrer que les carrés sont les permutations dont la DPCSD contient un nombre pair de cycles de *chaque* longueur paire).

Solution pour l'exercice 32 · Énoncé p. 736 · Indication p. 743 (Automorphismes de S_n)

Soit $\Phi \in \mathrm{Aut}(S_n)$.

▷ **L'ordre est préservé par Φ**

Soit $\sigma \in S_n$ d'ordre k. Alors $(\Phi(\sigma))^k = \Phi\left(\sigma^k\right) = \Phi(\mathrm{Id}) = \mathrm{Id}$.

Donc l'ordre de $\Phi(\sigma)$ divise k.

Comme Φ est un automorphisme on a de même l'ordre de $\sigma = \Phi^{-1}(\Phi(\sigma))$ divise l'ordre de $\Phi(\sigma)$.

D'où l'ordre de $\Phi(\sigma)$ est le même que celui de σ.

▷ **Les classes de conjugaisons sont préservées par Φ**

Soient $\sigma_1, \sigma_2 \in S_n$ conjuguées et $\rho \in S_n$ tel que $\sigma_2 = \rho\sigma_1\rho^{-1}$.

Alors $\Phi(\sigma_2) = \Phi\left(\rho\sigma_1\rho^{-1}\right) = \Phi(\rho)\Phi(\sigma_1)\Phi(\rho)^{-1}$, d'où $\Phi(\sigma_2)$ et $\Phi(\sigma_1)$ sont conjuguées.

L'image d'une classe de conjugaison est donc incluse dans une classe de conjugaison.

Comme Φ est bijective et que Φ^{-1} est aussi un morphisme on en déduit que l'image d'une classe de conjugaison est une classe de conjugaison.

▷ **Les classes de conjugaisons d'éléments d'ordre 2**

On cherche désormais à étudier les classes de conjugaisons d'éléments d'ordre 2.

On a (cf exercice 20) que les éléments d'ordre 2 de S_n sont exactement ceux dont la décomposition en produit de cycles à supports disjoints est constituée uniquement de 2-cycles.

De plus (cf exercice 7) deux permutations sont conjuguées si et seulement si elles ont le même nombre de cycles de même longueur dans leurs décomposition en produit de cycles à supports disjoints.

Il y a donc $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ classes de conjugaisons d'éléments d'ordre 2: pour tout $k \in \{1, ..., \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$ il s'agit de la classe de conjugaison formée des permutations dont la décomposition en produit de cycles à supports disjoints contient exactement k cycles de longueur 2 (et aucun autre cycle).

Notons C_k cette classe de conjugaison pour tout $k \in \{1, ..., \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$.

▷ **Un peu de dénombrement du cardinal des C_k**

Soit $k \in \{1, ..., \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$.

On cherche à déterminer $|C_k|$ (il s'agit de l'exercice 34).

Pour construire une permutation de C_k on procède de la manière suivante:

- ▷ On choisit deux éléments parmi n (sans ordre) pour former un 2-cycle.
- ▷ On choisit 2 éléments parmi les $n-2$ restant (sans ordre) pour former un autre 2 -cycle à support disjoint.
- ▷ On choisit 2 éléments parmi les $n-4$ restant (sans ordre) pour former un autre 2 -cycle à support disjoint.
- ▷ On continue ainsi, à chaque étape i, on choisit 2 éléments parmi les $n-2i$ restant (sans ordre) pour former un autre 2-cycle à support disjoint.
- ▷ À la fin on a k cycles de longueur 2 et $n-2k$ éléments restant.
- ▷ Comme ici les k 2-cycles sont ordonnés, il faut ensuite diviser par $k!$ pour obtenir le nombre de permutations de C_k.

Ainsi

$$|C_k| = \frac{\prod_{i=0}^{k-1} \binom{n-2i}{2}}{k!}$$

▷ **Image d'une transposition par cardinalité**

L'ensemble des transpositions n'est rien d'autre que C_1.

Par les points précédents il est envoyé par Φ sur une classe de conjugaison dont les éléments sont d'ordre 2 c'est à dire sur C_k pour un certain k.

Fixons k tel que $\Phi(C_1) = C_k$. Supposons par l'absurde que $k \neq 1$.

Comme en particulier Φ est bijective on obtient donc $|C_1| = |C_k|$, c'est à dire

$$\binom{n}{2} = \frac{\prod_{i=0}^{k-1}\binom{n-2i}{2}}{k!}$$

ce qui après simplification se réécrit, comme pour tout $N \in \mathbb{N}$, $\binom{N}{2} = \frac{N(N-1)}{2}$,

$$1 = \frac{\prod_{j=2}^{2k-1}(n-j)}{2^{k-1}k!}$$

On souhaite ensuite regrouper les k derniers termes du produit avec $k!$ pour faire apparaître un entier, mais pour cela il faut qu'il y en ait au moins k ce qui est possible car $k \geq 2$ et qu'il y a $2k-2$ termes.

On obtient alors

$$2^{k-1} = \prod_{j=2}^{k-1}(n-j)\binom{n-k}{k}.$$

- Si $k=2$ on obtient $\binom{n-2}{2} = 2$ qui n'a pas de solution dans $\mathbb{N}$ (car les racines de $X(X-1)-4$ ne sont pas entières).
- Si $k \geq 4$ alors le produit $\prod_{j=2}^{k-1}(n-j)$ contient au moins deux termes consécutifs et donc ne peut pas être une puissance de 2 (strictement plus grande que 2)
- Si $k=3$ on obtient $(n-2)\binom{n-3}{3} = 4$. Les entiers $n \geq 7$ ne sont pas solutions (car $7-2>4$) et l'étude des cas $n = 2,3,4,5,6$ montre que $n=6$ est la seule solution.

Dans tous les cas on obtient que $k \neq 1$ est absurde (si $n \neq 6$).

Par conséquent $\Phi(C_1) = C_1$ c'est à dire Φ envoie les transpositions sur les transpositions.

▷ **Image de (1 i)**

Comme l'image de deux éléments qui commutent par un morphisme commutent et que Φ^{-1} est un morphisme, on en déduit que l'image de deux éléments qui ne commutent pas par Φ ne commutent pas.

En particulier comme (1 2) et (1 3) ne commutent pas, leurs images par Φ ne commutent pas.

Or ces deux images sont des transpositions (distinctes). Elles ont donc des supports non disjoints.

On peut alors fixer $a_1, a_2, a_3 \in [\![1,n]\!]$ tels que $\Phi((1\ 2)) = (a_1\ a_2)$ et $\Phi((1\ 3)) = (a_1\ a_3)$.

Comme $(2\ 3) = (1\ 3)(1\ 2)(1\ 3)$ on en déduit que $\Phi((2\ 3)) = (a_1\ a_3)(a_1\ a_2)(a_1\ a_3) = (a_2\ a_3)$.

Soit $i \in [\![4,n]\!]$.

Comme $(1\ i)$ ne commute pas avec $(1\ 2)$ et commute avec $(2\ 3)$ on en déduit que $\Phi((1\ i))$ est un transposition donc le support intersecte celui de $(a_1\ a_2)$ tout en étant disjoint avec celui de $(a_2\ a_3)$.

Par conséquent il existe $a_i \in [\![1,n]\!]$ tel que $\Phi((1\ i)) = (a_1\ a_i)$.

De plus par injectivité de Φ, si $i \neq j$ comme $(1\ i) \neq (1\ j)$ alors $a_i \neq a_j$.

▷ **Conclusion**

Posons ρ la permutation telle que pour tout i, $\rho(i) = a_i$ (possible car les a_i forment une famille de n éléments distincts de $[\![1, n]\!]$).

Alors pour tout i, $\rho(1\ i)\rho^{-1} = (a_1\ a_i)$.

Comme (cf exercice 4) les transpositions de la forme $(1\ i)$ engendrent S_n on en déduit que Φ et $\sigma \mapsto \rho\sigma\rho^{-1}$ coïncident sur une partie génératrice et donc sur tout S_n.

Donc $\boxed{\Phi \text{ est intérieur.}}$

▷ **Remarque**

Il se trouve que si $n = 6$ il existe des automorphismes non intérieurs de S_6 mais leur construction est plus difficile que le résultat que l'on vient de montrer.

Solution pour l'exercice 33 · Énoncé p. 736 · Indication p. 743 (Majoration de la fonction de Landau)

▷ **Majoration par le produit maximal des partitions**

Comme l'ordre d'une permutation est égal au ppcm de la longueur de ses cycles dans sa DPCSD (cf exercice 20) ce qui revient au ppcm de la taille des orbites (en rajoutant les orbites de taille 1 qui ne changent rien au ppcm) on en déduit l'expression suivante pour g:

$$\forall n \in \mathbb{N}, g(n) = \max_{\substack{c_1,\dots,c_r \in \mathbb{N}^* \\ c_1+\dots+c_r = n}} \left(\bigvee_{i=1}^{r} c_i \right).$$

Or pour tous $c_1, \cdots, c_r \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\bigvee_{i=1}^{r} c_i \leq \prod_{i=1}^{r} c_i.$$

Ainsi on en déduit la majoration

$$\forall n \in \mathbb{N}, g(n) \leq \max_{\substack{c_1,\dots,c_r \in \mathbb{N}^* \\ c_1+\dots+c_r = n}} \left(\prod_{i=1}^{r} c_i \right).$$

Il reste alors à majorer ce produit.

On propose deux versions: une version plus « analyse » en utilisant l'Inégalité Arithmético-Géométrique et une étude de fonction, et une « combinatoire » utilisant un argument d'optimalité astucieux.

▷ **Version 1: IAG et étude de fonction**

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $c_1, \cdots, c_r \in \mathbb{N}^*$ tels que $c_1 + \cdots + c_r = n$.

Par Inégalité Arithmético-Géométrique, on a

$$\left(\prod_{i=1}^{r} c_i \right)^{\frac{1}{r}} \leq \left(\frac{\sum_{i=1}^{r} c_i}{r} \right)$$

et donc, par croissance de $t \mapsto t^r$ sur $[0, +\infty[$ et comme $c_1 + \cdots + c_r = n$ on a

$$\prod_{i=1}^{r} c_i \leq \left(\frac{n}{r}\right)^r.$$

De plus, on a pour tout $x > 0$,

$$\left(\frac{n}{x}\right)^x = \exp\left(x \ln\left(\frac{n}{x}\right)\right) = \exp(x\ln(n) - x\ln(x)).$$

Notons

$$\begin{aligned} f :]0, +\infty[&\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x\ln(n) - x\ln(x). \end{aligned}$$

On a f dérivable et

$$\begin{aligned} \forall x > 0, f'(x) &= \ln(n) - \ln(x) - x\frac{1}{x} \\ &= \ln(ne^{-1}) - \ln(x) \end{aligned}$$

d'où on déduit le tableau de variations, comme $f(e^{-1}n) = e^{-1}n\ln(n) - e^{-1}n(\ln(n) + \ln(e^{-1})) = e^{-1}n$,

x	0		$e^{-1}n$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$	$e^{-1}n$	$\searrow$	

et en particulier on a, par croissance de exp,

$$\forall x > 0, \left(\frac{n}{x}\right)^x \leq \exp(e^{-1}n) = \left(e^{e^{-1}}\right)^n.$$

Par conséquent on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \boxed{g(n) \leq \left(e^{e^{-1}}\right)^n}.$$

Et on constate bien que $e^{e^{-1}} < e^1$.

▷ **Version 2: un peu de combinatoire**

Soit $n \geq 2$.

Comme il s'agit d'un maximum sur un ensemble fini, il existe $c_1, ..., c_r \in \mathbb{N}^*$ tels que $c_1 + \cdots + c_r = n$ et $\prod_{i=1}^r c_i = \max_{\substack{\gamma_1,\cdots,\gamma_r \in \mathbb{N}^* \\ \gamma_1+\cdots+\gamma_r=n}} \left(\prod_{i=1}^r \gamma_i\right)$.

▷ **On peut se ramener à $c_i \neq 1$ pour tout i**

On constate que

$$\forall c \in \mathbb{N}^*, \begin{cases} c+1 & = c+1 \\ (c+1) & \geq c \times 1. \end{cases}$$

autrement dit si il existe i tel que $c_i = 1$, alors en supprimant ce c_i et en ajoutant 1 à un autre c_j on augmente le produit.

Par conséquent, par optimalité, on peut se ramener à $c_i \neq 1$ pour tout i.

▷ **On peut se ramener à $c_i \in \{2, 3\}$ pour tout i**

On constate que

$$\forall c \geq 4, \begin{cases} 2 + (c-2) = c \\ 2 \times (c-2) \geq c. \end{cases}$$

autrement dit si il existe i tel que $c_i \geq 4$, alors en remplaçant c_i par $c_i - 2$ et 2 on augmente le produit.

Par conséquent, par optimalité, on peut se ramener à $c_i < 4$ pour tout i.

▷ **On continue les regroupements**

On constate que

$$\begin{cases} 3+3 = 2+2+2 \\ 3 \times 3 > 2 \times 2 \times 2. \end{cases}$$

autrement dit si il existe au moins 3 cycles de longueur 2, alors en remplaçant ces trois 2 par deux 3 on augmente le produit.

Par conséquent, par optimalité, il existe au plus 2 cycles de longueur 2.

Par conséquent il existe une configuration optimale ne contenant que des 3-cycles et éventuellement 0, 1 ou 2 cycles de longueur 2.

On conclut donc selon la congruence de n modulo 3, car en notant t le nombre de 3-cycles et d le nombre de 2-cycles, on a $3t + 2d \equiv n \pmod 3$.

- ▷ Si $n \equiv 0 \pmod 3$ alors la seule possibilité est d'avoir $\frac{n}{3}$ cycles de longueur 3 et on obtient alors un produit maximal de $2^0 \times 3^{\frac{n}{3}}$.
- ▷ Si $n \equiv 1 \pmod 3$ alors la seule possibilité est d'avoir $\frac{n-4}{3}$ cycles de longueur 3 et 2 cycles de longueur 2 et on obtient alors un produit maximal de $2^2 \times 3^{\frac{n-4}{3}}$.
- ▷ Si $n \equiv 2 \pmod 3$ alors la seule possibilité est d'avoir $\frac{n-2}{3}$ cycles de longueur 3 et 1 cycle de longueur 2 et on obtient alors un produit maximal de $2^1 \times 3^{\frac{n-2}{3}}$.

D'où finalement

$$\max_{\substack{c_1,\cdots,c_r \in \mathbb{N}^* \\ c_1+\cdots+c_r=n}} \left(\prod_{i=1}^{r} c_i \right) = \begin{cases} 3^{\frac{n}{3}} & \text{si } n \equiv 0 \pmod 3 \\ 4 \times 3^{\frac{n-4}{3}} & \text{si } n \equiv 1 \pmod 3 \\ 2 \times 3^{\frac{n-2}{3}} & \text{si } n \equiv 2 \pmod 3. \end{cases}$$

Donc en particulier

$$\max_{\substack{c_1,\cdots,c_r\in\mathbb{N}^*\\ c_1+\cdots+c_r=n}}\left(\prod_{i=1}^{r}c_i\right)=O_{n\to+\infty}\left(3^{\frac{n}{3}}\right).$$

Par conséquent on en déduit

$$\boxed{g(n)=O_{n\to+\infty}\left(3^{\frac{1}{3}}\right)^n}.$$

▷ **Remarques**

- ▷ Les deux versions sont proches mais comme $3^{\frac{1}{3}}<e^{e^{-1}}$ (cf étude de $x\mapsto\frac{\ln(x)}{x}$) la seconde version permet d'obtenir une légèrement meilleure majoration que la première.
- ▷ Ici on a utilisé dans les deux cas la majoration du ppcm par le produit. En pratique cette majoration est assez grossière. On pourrait étudier les décompositions en facteurs premiers pour obtenir

  $$\ln(g(n))\ \sim\sqrt{n\ln(n)}$$

  ce qui est beaucoup plus précis que le

  $$\ln(g(n))=O_{n\to+\infty}(n)$$

  que l'on a obtenu.
- ▷ L'énoncé demandait d'obtenir $\alpha<e^1$. En effet cela oblige à prendre en compte la contrainte $c_1+\cdots+c_r=n$, car on pourrait montrer que $\ln\left(\bigvee_{i=1}^{n}i\right)\sim n$.

Chapitre 22

Développements Limités

Énoncés 765
Le plus important 765
Développements limités 765
Relations de comparaisons 771
Retour sur les développements asymptotiques de suites et fonctions 774
Vers les développements en série entières 780
Un peu de physique 782
Indications 784
Solutions 792

Énoncés

Dans tout le TD, sauf mention contraire, I est un intervalle de $\mathbb{R}$, a un point de I et n un entier naturel.

Le plus important

Pratiquer le cahier de calcul de DL !

Développements limités

Exercice 1 (◑★♣ Un contre-exemple)
Montrer que

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} \sin\left(e^{\frac{1}{x^2}}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

admet un $\mathrm{DL}_n(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Que dire de la régularité de f ?

Indication p. 784

Exercice 2 (◔★ Tangentes)
Déterminer les $\mathrm{DL}_8(0)$ de tan et th.

Indication p. 784

Exercice 3 (◔★ Pour le calcul numérique)
Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et $(a_{-1}, a_0, a_1) \in \mathbb{R}^3$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

Déterminer un $\mathrm{DL}_2(0)$ de

$$h \mapsto a_{-1} f(x-h) + a_0 f(x) + a_1 f(x+h).$$

En déduire des méthodes pour calculer numériquement $f'(x)$ et $f''(x)$.

Indication p. 784

Exercice 4 (◔★ Et le cas complexe ?)
Soit $\lambda \in \mathbb{C}$.

Montrer que

$$\left(1+\frac{\lambda}{n}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{\lambda}.$$

Indication p. 784 · Solution p. 792

Exercice 5 (◔★♠ Un DL qui devrait être usuel)
Montrer que

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{4^k}\binom{2k}{k} x^k + o_{x\to 0}(x^n)$$

Indication p. 784

Exercice 6 (◔★ Des calculs explicites)
Déterminer des DLs en 0 au premier ordre non nul des fonctions suivantes (éventuellement prolongées par continuité en 0).

1. $x \mapsto \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e^1}{x}$
2. $x \mapsto x^{\sin(x)} - \sin(x)^x$
3. $x \mapsto \mathrm{sh}(\sin(x)) - \sin(\mathrm{sh}(x))$
4. $x \mapsto \sqrt{1+\frac{x}{3}} - \left(1+\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$
5. $x \mapsto \ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) - \frac{x}{\sin(x)} + \frac{\ln(1+x)}{\mathrm{sh}(x)} + \ln(\mathrm{ch}(x))$

Indication p. 784

Exercice 7 (◑★ Convergence vers moyenne géométrique: l'ordre suivant)
Soient $a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}_+^*$ des réels strictement positifs.

Pour $p \neq 0$, on définit

$$N(p) = \left(\frac{\sum_{k=1}^{n} a_k^p}{n}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Montrer que N prolongée par continuité en 0 est dérivable en 0 et calculer $N(0)$ et $N'(0)$.

Indication p. 784

Exercice 8 (◔★ Calcul de DL de réciproque: ordre 3)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bijective.

On suppose que f admet un $\mathrm{DL}_3(0)$ de la forme

$$f(x) = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + o_{x\to 0}(x^3)$$

où $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ et $a_1 \neq 0$.

On admet que la bijection réciproque de f, f^{-1} admet un $\mathrm{DL}_3(0)$.

Déterminer en fonction de a_1, a_2, a_3 les coefficients de ce développement limité.

Indication p. 784

Exercice 9 (◔★ Développement asymptotique de l'arctangente)
Déterminer un développement asymptotique en $o_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^{48}}\right)$ de arctan en $+\infty$.

Indication p. 784

Exercice 10 (◔★ Perte d'ordre)
Effectuer les développements limités suivants et commenter.

1. $\mathrm{DL}_7(0)$ de $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$
2. $\mathrm{DL}_3(0)$ de $x \mapsto (1+x)^{\frac{1}{x}}$

Indication p. 784

Exercice 11 (◔☆ Attention à la parité)

1. Existe-t-il une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ admettant pour tout $n \in \mathbb{N}$ un $\mathrm{DL}_n(0)$ pair et n'étant pas paire ?
2. Existe-t-il une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ admettant pour un certain $m \in \mathbb{N}$ un $\mathrm{DL}_{2m}(0)$ mais pas de $\mathrm{DL}_{2m+1}(0)$?

Indication p. 785

Exercice 12 (◕★ Existence de DL de réciproque)
Soient I et J deux intervalles contenant 0 et $f : I \to J$ bijective et continue.

On suppose que f admet un $\mathrm{DL}_n(0)$ de la forme

$$f(x) = a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + o_{x\to 0}(x^n)$$

où $a_1 \neq 0$.

Montrer que sa bijection réciproque f^{-1} admet un $\mathrm{DL}_n(0)$.

Indication p. 785

Exercice 13 (◑★ Des DLs par récurrence)
Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose

$$f_n = \underbrace{\sin \circ \sin \circ \cdots \circ \sin}_{n \text{ fois}}.$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n admet un $\mathrm{DL}_5(0)$ et le déterminer.

En déduire une expression pour tout $n \in \mathbb{N}$ de $f_n^{(5)}(0)$.

Indication p. 785

Exercice 14 (◔★ Un petit calcul)
Soient $f, g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ impaires telles que $f'(0) = g'(0) = 1$.

Déterminer, si elle existe, la limite quand $x \to 0$ de

$$\frac{f(g(x)) - g(f(x))}{x^6}.$$

Indication p. 785 · Solution p. 793

Exercice 15 (◔★ Un peu réfléchir avant de calculer: argth)
Déterminer le $\mathrm{DL}_8(0)$ de

$$x \mapsto \ln\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right).$$

Indication p. 785 · Solution p. 794

Exercice 16 (◔★ Un peu réfléchir avant de calculer: DÉS)
Déterminer le $\mathrm{DL}_8(0)$ de

$$x \mapsto \frac{1}{1+x+x^2}.$$

Indication p. 785

Exercice 17 (◔☆ Un peu réfléchir avant de calculer: calcul tronqué)
Déterminer le $\mathrm{DL}_{48}(0)$ de

$$x \mapsto \ln\left(\sum_{k=0}^{47} \frac{x^k}{k!}\right).$$

Indication p. 785

Exercice 18 (◔☆ Pourquoi faire simple quand on peut faire compliqué)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

À l'aide de la DÉS de $\frac{1}{1-X^n}$ et de DLs, redémontrer que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \frac{1}{n}\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega^k = \begin{cases} 0 & \text{si } \ k \not\equiv 0 \bmod n \\ 1 & \text{si } \ k \equiv 0 \bmod n. \end{cases}$$

Indication p. 785

Exercice 19 (◔☆ Calcul de DL pour calcul de dérivée)
Déterminer

$$\Big(\underbrace{\tan \times \tan \times \cdots \times \tan}_{48 \text{ fois}}\Big)^{\overbrace{\prime\cdots\prime}^{48 \text{ fois}}}(0).$$

Indication p. 785

Exercice 20 (◑☆ Peut aussi se faire par récurrence)
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\forall p \in [\![0,n]\!], \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k}\binom{n}{k}k^p = \begin{cases} 0 & \text{si } \ p \in [\![0,n-1]\!] \\ n! & \text{si } \ p = n. \end{cases}$$

On pourra étudier le $\mathrm{DL}_n(0)$ de $x \mapsto (e^x-1)^n$.

Indication p. 785

Exercice 21 (◔★ Le début de l'étude de la série harmonique)
Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

et

$$u_n = H_n - \ln(n).$$

1. Effectuer un DA en $+\infty$ de $\left(u_{n+1} - u_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
2. En déduire que $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

Indication p. 786

Exercice 22 (◔★♠ DL des fonctions trigonométriques réciproques)
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\arcsin(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(2k)!}{4^k (k!)^2 (2k+1)} x^{2k+1} + o_{x\to 0}(x^{2n+1}).$$

Que dire du $\mathrm{DL}_n(0)$ de arccos ?

Indication p. 786

Exercice 23 (◔☆ Un cas très particulier d'approximant de Padé)
Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ tels que

$$\cos(x) - \frac{1+ax^2}{1+bx^2} = O_{x\to 0}(x^6).$$

Indication p. 786

Relations de comparaisons

Exercice 24 (◔★♣ Obtention d'équivalent par encadrement)
Soient $f, g_1, g_2 : I \to \mathbb{R}$.

Montrer que **si**, au voisinage de a,

$$g_1(x) \leq f(x) \leq g_2(x)$$

et

$$g_1(x) \sim_{x\to a} g_2(x)$$

alors

$$f(x) \sim_{x\to a} g_1(x).$$

Indication p. 786

Exercice 25 (◔★♣ Équivalents et composition)
Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ ne s'annulant pas au voisinage de a.

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Montrer que

$$\Big(f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)\Big) \Leftrightarrow \Big((f(x))^\alpha \underset{x\to a}{\sim} (g(x))^\alpha\Big).$$

2. Donner un exemple de fonctions f et g telles que

$$\Big(f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)\Big) \text{ et } \Big(\exp(f(x)) \underset{x\to a}{\not\sim} \exp(g(x))\Big)$$

et de fonctions f et g strictement positives telles que

$$\Big(f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)\Big) \text{ et } \Big(\ln(f(x)) \underset{x\to a}{\not\sim} \ln(g(x))\Big)$$

3. Montrer que

$$(f(x) = g(x) + o_{x\to a}(1)) \Leftrightarrow \Big(\exp(f(x)) \underset{x\to a}{\sim} \exp(g(x))\Big)$$

et que

$$\Big(f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)\Big) \Leftrightarrow (\ln(f(x)) = \ln(g(x)) + o_{x\to a}(1)).$$

4. Commenter.

Indication p. 786

Exercice 26 (◔☆ Conjecturer puis démontrer: signes et DLs)

1. Déterminer le $\mathrm{DL}_5(0)$ de $x \mapsto e^x \sin(x)$. Que peut-on conjecturer sur le signe des coefficients ?
2. Démontrer la conjecture précédente.
3. Déterminer le $\mathrm{DL}_4(\frac{\pi}{4})$ de tan. Que peut-on conjecturer sur le signe des coefficients ?
4. Démontrer la conjecture précédente.

Indication p. 786

Exercice 27 (◔★ De la place entre les deux)
Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$.

On suppose $f(x) = o_{x\to a}(g(x))$.

Montrer qu'il existe $h : I \to \mathbb{R}$ tel que

$$f(x) = o_{x\to a}(h(x)), h(x) = o_{x\to a}(g(x)).$$

Indication p. 786

Exercice 28 (◑☆ Majoration d'une famille de fonctions)

1. Soient $(f_k)_{k\in[\![1,n]\!]}$ une famille de fonctions de I dans $\mathbb{K}$. Montrer qu'il existe $g : I \to \mathbb{K}$ telle que
$$\forall k \in [\![1, n]\!], f_k(x) = o_{x\to a}(g(x)).$$
2. Soient $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une famille de fonctions de I dans $\mathbb{K}$. Montrer qu'il existe $g : I \to \mathbb{K}$ telle que
$$\forall k \in \mathbb{N}, f_k(x) = o_{x\to a}(g(x)).$$

Indication p. 786

Exercice 29 (◔☆ Toujours de la place: cas particuliers)

1. Déterminer une fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ telle que

$$f(x) = o_{x\to 0}(1)$$

et

$$\forall \alpha > 0, x^\alpha = o_{x\to 0^+}(f(x)).$$

2. Déterminer une fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que

$$\forall \alpha > 0, x^\alpha = o_{x\to +\infty}(g(x))$$

et

$$\forall \lambda > 0, g(x) = o_{x\to +\infty}\left(e^{\lambda x}\right).$$

Indication p. 787

Exercice 30 (◑★ Autonomie: une étude de signe)
Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+$.

Montrer que pour x assez grand,

$$x\cos(x)^2 + \sin^2(x) - \alpha \sin(x)\cos(x) \geq 0.$$

Indication p. 787 · Solution p. 794

Exercice 31 (◑☆ Un contre-exemple parmi d'autres)
Soit $u : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$. On définit:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_+ &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto (x\cos(x)^2 + \sin(x)^2)e^{u(x)} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}_+ &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sqrt{x}e^{u(x)}. \end{aligned}$$

Montrer que

1. les fonctions ne sont pas comparables pour la relation O en $+\infty$ c'est à dire

$$\neg(f(x) = O_{x\to+\infty}(g(x))) \text{ et } \neg(g(x) = O_{x\to+\infty}(f(x)))$$

2. il existe un choix de fonction u tel que les deux fonctions sont strictement croissantes et tendent vers $+\infty$.

Indication p. 787 · Solution p. 798

Retour sur les développements asymptotiques de suites et fonctions

Exercice 32 (◔★ Pour vérifier que la méthode est acquise)

1. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$ l'équation

$$x^5 + nx - 1 = 0$$

admet une unique solution que l'on note x_n.

2. Déterminer un développement asymptotique à trois termes non nuls de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $+\infty$.

Indication p. 787

Exercice 33 (◑★ Le grand classique de $\tan(x) = x$)

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'équation

$$\tan(x) = x$$

admet une unique solution dans l'intervalle $]n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}[$.

On note x_n cette solution.

2. Déterminer un développement asymptotique en $o_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Indication p. 787

Exercice 34 (◑★ La somme est essentiellement le plus grand terme)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs telle qu'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$u_{n-1} = o_{n\to+\infty}\left(\frac{u_n}{n^\alpha}\right).$$

Montrer que

$$\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right) \sim_{n\to+\infty} u_n.$$

Indication p. 787

Exercice 35 (◑★ Développement asymptotique de la fonction de Lambert)
Montrer que

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_+ &\to \mathbb{R}_+ \\ x &\mapsto xe^x \end{aligned}$$

est bijective.

On note W sa bijection réciproque.

Déterminer un développement asymptotique en $o_{x\to+\infty}(1)$ de W en $+\infty$.

Indication p. 787

Exercice 36 (◔★ Équivalents de sommes)
Donner un équivalent simple des sommes suivantes lorsque $n \to +\infty$

1. Pour $q \in \mathbb{C}$ (en distinguant les cas),

$$\sum_{k=0}^{n} q^k.$$

2.

$$\sum_{k=0}^{n} k!$$

3. Pour $\alpha > -1$

$$\sum_{k=1}^{n} k^\alpha.$$

Indication p. 788

Exercice 37 (◔★ Sinus itérés)
Soit $u_0 \in [0,1]$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$\begin{aligned} u_0 &= u_0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} &= \sin(u_n). \end{aligned}$$

1. Montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
2. Déterminer un équivalent simple de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ quand $n \to +\infty$.

Indication p. 788

Exercice 38 (◔★ Équation implicite non polynômiale)

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'équation
$$e^x + x = n$$
admet une unique solution. On note x_n cette solution.
2. Déterminer un développement asymptotique à deux termes non nuls de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Indication p. 788

Exercice 39 (◑★ Un cas particulier de méthode de Newton: l'algorithme babylonien)
Soit $a > 0$.

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par
$$u_0 = a$$
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right)$$

1. Montrer que la suite est bien définie et que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sqrt{a}$.
2. Montrer qu'il existe $\alpha \in]0,1[$ tel que
$$(u_n - \sqrt{a}) = O_{n\to+\infty}(\alpha^{2^n}).$$

Indication p. 788

Exercice 40 (◑★ Développements asymptotiques de suites récurrentes: des cas non bornés)
Soit $u_0 > 0$.

Déterminer un développement de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par
$$u_0 = u_0$$
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$$

pour les fonctions f suivantes:

1. $f : x \mapsto x + \frac{1}{x}$
2. $f : x \mapsto x + e^{-x}$
3. $f : x \mapsto x + \frac{1}{\ln(1+x)}$

Indication p. 788 · Solution p. 799

Exercice 41 (◑★ Limites et polynômes)
Dans chacun des cas montrer que l'équation admet pour tout $\alpha > 0$ assez petit une unique solution positive et déterminer un développement asymptotique simple à deux termes non nuls de cette solution.

1. $$x^3 + \alpha x^2 - 1 = 0,$$

2. $$\alpha x^7 + \alpha^2 x^6 - \alpha x^4 - 1 = 0,$$

3. $$x^3 - (3-\alpha)x^2 + 3x - (1-\alpha) = 0.$$

Indication p. 788

Exercice 42 (◔★ Un exemple de récurrence non autonome)
Déterminer un développement asymptotique en $o_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)$ de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = 0$$
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n + n^2}.$$

Indication p. 788

Exercice 43 (◑★ Encore des équations implicites)

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ l'équation

$$x^n + x - 1 = 0$$

admet une unique solution positive et donner un développement asymptotique à deux termes de cette solution quand $n \to +\infty$.

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ l'équation

$$\sum_{k=1}^{n} kx^k - 1 = 0$$

admet une unique solution positive et donner un développement asymptotique à deux termes de cette solution quand $n \to +\infty$.

3. Montrer que pour tout $n \geq 3$ l'équation

$$e^x = nx$$

admet deux solutions et donner un développement asymptotique à deux termes de ces solutions quand $n \to +\infty$.

Indication p. 789 · Solution p. 807

Exercice 44 (◑★ Équivalent d'un maximum)
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on note

$$f_n : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto x(\cos(x))^n$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction f_n admet un maximum et que ce maximum est atteint en un unique point que l'on note x_n.
2. Déterminer un équivalent de x_n lorsque $n \to +\infty$.
3. Déterminer un équivalent de $f_n(x_n)$ lorsque $n \to +\infty$.
4. Déterminer un développement asymptotique à deux termes non nuls de x_n lorsque $n \to +\infty$.

Indication p. 789 · Solution p. 810

Exercice 45 (◑★ Un cas classique d'équivalent de suites récurrentes)
On considère I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant 0, $f : I \to I$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in I^{\mathbb{N}}$ vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n).$$

On suppose que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et qu'il existe $k > 1$ et $a_k > 0$ tels que

$$f(x) = x - a_k x^k + o_{x\to 0}\left(x^k\right).$$

Montrer que

$$u_n = \gamma\ n^{-\frac{1}{k-1}} + o_{n\to+\infty}\left(n^{-\frac{1}{k-1}}\right)$$

où

$$\gamma = ((k-1)a_k)^{-\frac{1}{k-1}}.$$

Indication p. 789 · Solution p. 813

Exercice 46 (◕★ Suites récurrentes: le cas vraiment général)
Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 \in]0,1]$$
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n).$$

On suppose de plus que:
(i) $f \in \mathcal{C}^1([0,1],[0,1])$
(ii) $f(x) = x + o_{x\to 0}(x)$
(iii) $\forall x \in]0,1], 0 < f(x) < x$

On note $F \in \mathcal{C}^2(]0,1],\mathbb{R})$ une primitive de $x \mapsto \frac{1}{f(x)-x}$.

Montrer que

$$F(u_n) \sim n.$$

Indication p. 789

Exercice 47 (◕☆ Le terme d'après si vous avez le courage)
On reprend les notations de l'exercice 45.

On suppose de plus qu'il existe $a_k > 0$, $a_{2k-1} \in \mathbb{R}$ tels que

$$f(x) = x - \left(a_k x^k + a_{2k-1}x^{2k-1} + o_{x\to 0}\left(x^{2k-1}\right)\right).$$

Montrer qu'il existe γ_1 et γ_2 deux réels tels que

$$u_n = \gamma_1 n^{-\frac{1}{k-1}} - \gamma_2 n^{-\frac{k}{k-1}} \ln(n) + o_{n\to+\infty}\left(n^{-\frac{k}{k-1}}\ln(n)\right)$$

Indication p. 789 · Solution p. 814

Exercice 48 (◑☆ Une dernière suite récurrente pour la route)
On pose

$$f : x \mapsto \begin{cases} x\left(1 - x^2 e^{-\frac{1}{x^2}}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

et on considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = 1$$
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n).$$

Déterminer un équivalent de u_n lorsque $n \to +\infty$.

Indication p. 789

Vers les développements en série entières

Exercice 49 (◑☆ Nullité des dérivées et nullité de la fonction)

1. Donner un exemple de fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $f \neq 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(0) = 0$.

On considère désormais une fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(0) = 0$.

On suppose de plus qu'il existe $R > 0$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \frac{|f^{(n)}(x)|}{n!} \leq \frac{1}{R^n}.$$

1. Montrer que pour tout $x \in]-R, R[$, $f(x) = 0$.

2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 0$.

Indication p. 790

Exercice 50 (◔★ Fonction génératrice usuelle)

À l'aide de l'exercice 5 montrer que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2k}{k} \binom{2(n-k)}{n-k} = 4^n.$$

Indication p. 790

Exercice 51 (◑★ Nombres de Catalan par les DLs)
On considère la fonction

$$f :]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[\to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \begin{cases} \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que pour tout $x \in]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[$,

$$f(x) = 1 + xf(x)^2.$$

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f admet un $\mathrm{DL}_n(0)$.

3. Soit $(c_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que

$$c_0 = 1$$
$$\forall n \in \mathbb{N}, c_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} c_k c_{n-k}.$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$c_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

Indication p. 790

Exercice 52 (◑★ Utilisation en algèbre des séries entières)
Soit $(\mathcal{A}, +, \times, .)$ une $\mathbb{C}$-algèbre et $u \in \mathcal{A}$ un élément nilpotent.

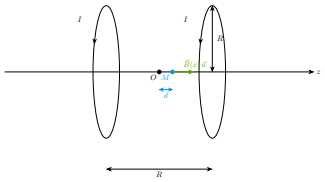
1. Montrer que $1 + u$ est inversible c'est à dire qu'il existe $v \in \mathcal{A}$ tel que $(1 + u)v = v(1 + u) = 1$.

2. Montrer que $1 + u$ est un carré c'est à dire qu'il existe $v \in \mathcal{A}$ tel que $1 + u = v^2$.

Indication p. 790 · Solution p. 815

Un peu de physique

Exercice 53 (◑★□ Bobines de Helmholtz)



On considère deux bobines circulaires parallèles de rayons R situées à une distance R et parcourues par un courant I dans le même sens.

On considère un point M sur l'axe des bobines et à une distance d du centre du système.

On pose $x = \frac{d}{R}$.

On admet (cf physique) que le champ magnétique total au point M est

$$\vec{B} = B(x)\vec{u}$$

où $\vec{u}$ est un vecteur unitaire et

$$B(x) = \frac{\mu_0 I}{2R}\left(\left(1+\left(\frac{1}{2}+x\right)^2\right)^{-\frac{3}{2}} + \left(1+\left(\frac{1}{2}-x\right)^2\right)^{-\frac{3}{2}}\right).$$

1. Déterminer un $\mathrm{DL}_4(0)$ de B.

Indication p. 790

Exercice 54 (◑★□ Formule de Borda)
On considère un pendule de masse m et de longueur ℓ dans un champ de pesanteur uniforme g.

On pose $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$.

Le pendule a pour angle initial θ_0 et une vitesse angulaire initiale nulle.

On admet (cf physique) que le mouvement est périodique de période

$$T(\theta_0) = \frac{2\pi}{\omega_0} \times \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1-\left(\sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right)\right)^2\sin(\theta)^2}}$$

1. Montrer que

$$T(\theta_0) = \frac{2\pi}{\omega_0}\left(1+\frac{\theta_0^2}{16}+o_{\theta_0\to 0}(\theta_0^2)\right).$$

Indication p. 790

Exercice 55 (◑★▫ Développement dipolaire)
On considère une répartition finie de charges $(A_i, q_i)_{i\in I}$ dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$.

Pour tout $i \in I$, on pose $\overrightarrow{OA_i} = \vec{a_i}$.

Étant donné un vecteur unitaire $\vec{u}$ et $r > 0$ on admet que le potentiel au point M tel que $\overrightarrow{OM} = r\vec{u}$ (si M distincts des A_i)

$$V(\vec{u}, r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i\in I} \frac{1}{r\sqrt{1 - 2\frac{\overrightarrow{a_i}\cdot\vec{u}}{r} + \frac{\|\overrightarrow{a_i}\|^2}{r^2}}}.$$

1. Montrer qu'il existe $Q \in \mathbb{R}$ et $\vec{p} \in \mathbb{R}^3$ tels que

$$V(\vec{u}, r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{\vec{p}\cdot\vec{u}}{4\pi\varepsilon_0 r^2} + o_{r\to+\infty}\left(\frac{1}{r^2}\right).$$

Indication p. 790

Indications

Indication 1 · Énoncé p. 765 (Un contre-exemple)
Le DL est juste par croissance comparée $0 + o_{x\to 0}(x^n)$.

Constater que f est dérivable mais que f' n'est même pas continue.

Indication 2 · Énoncé p. 765 (Tangentes)
Cf cours. Il y a de nombreuses méthodes:

- Utiliser T-Y…
- Utiliser $\frac{\sin}{\cos}$…
- Utiliser la réciproque de arctan.
- Utiliser $\tan' = 1 + \tan^2$ et bootstrapper.
- Utiliser $\tan' = \frac{1}{\cos^2} = \frac{1}{\frac{1}{2}(1+\cos(2\cdot))}$ et primitiver
- Utiliser $\tan(x) = \frac{1}{i}\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{e^{ix}+e^{-ix}} = \frac{1}{i}\frac{1-e^{-2ix}}{1+e^{-2ix}} = \frac{1}{i}\left(1 - \frac{2}{1+e^{-2ix}}\right)$.

Indication 3 · Énoncé p. 765 (Pour le calcul numérique)
Déjà fait.

Indication 4 · Énoncé p. 766 (Et le cas complexe ?)
Par exemple travailler sur le module et un argument.

Solution p. 792

Indication 5 · Énoncé p. 766 (Un DL qui devrait être usuel)
Remarquer que $\frac{1}{\sqrt{u}} = u^{-\frac{1}{2}}$…

Indication 6 · Énoncé p. 766 (Des calculs explicites)
Calculs.

Indication 7 · Énoncé p. 766 (Convergence vers moyenne géométrique: l'ordre suivant)
Faire un DL (en partant à l'ordre 2 à l'intérieur).

Indication 8 · Énoncé p. 767 (Calcul de DL de réciproque: ordre 3)
Écrire $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}$ et composer les DLs.

Indication 9 · Énoncé p. 767 (Développement asymptotique de l'arctangente)
Pour $x > 0$,

$$\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Indication 10 · Énoncé p. 767 (Perte d'ordre)
On remarque que la division par x nécessite de partir avec un ordre plus élevé que le résultat souhaité.

Indication 11 · Énoncé p. 767 (Attention à la parité)
1. $x \mapsto e^{-\frac{1}{x^2}}$
2. $x \mapsto x^3 \cos(x^{-2})$

Indication 12 · Énoncé p. 768 (Existence de DL de réciproque)
Traiter d'abord l'ordre 0 et 1 en utilisant le cours.

Pour la suite raisonner par exemple par analyse-synthèse sur les coefficients à l'aide de $f^{-1} \circ f$ ou bien par bootstrap à l'aide de $f \circ f^{-1}$.

Indication 13 · Énoncé p. 768 (Des DLs par récurrence)
Par récurrence sur n, comme pour tout n, $f_{n+1} = f_n \circ \sin$ on obtient que f_n admet un $\mathrm{DL}_5(0)$ et surtout une expression du DL de f_{n+1} en fonction de celui de f_n.

Indication 14 · Énoncé p. 768 (Un petit calcul)
Faire un DL6.

Solution p. 793

Indication 15 · Énoncé p. 768 (Un peu réfléchir avant de calculer: argth)
Simplifier $\ln\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right) = \frac{1}{2}(\ln(1+x) - \ln(1-x))$.

Ou bien remarquer qu'il s'agit de primitiver $x \mapsto \frac{1}{1-x^2}$.

Solution p. 794

Indication 16 · Énoncé p. 769 (Un peu réfléchir avant de calculer: DÉS)
DÉS.

Indication 17 · Énoncé p. 769 (Un peu réfléchir avant de calculer: calcul tronqué)
Remarquer que $\sum_{k=0}^{47} \frac{x^k}{k!} = e^x - \frac{x^{48}}{48!} + o_{x\to 0}(x^{48})$.

Indication 18 · Énoncé p. 769 (Pourquoi faire simple quand on peut faire compliqué)
Effectuer la DÉS, et des DLs des deux expressions. Identifier.

Indication 19 · Énoncé p. 769 (Calcul de DL pour calcul de dérivée)
Faire un $\mathrm{DL}_{48}(0)$ de tan.

Indication 20 · Énoncé p. 769 (Peut aussi se faire par récurrence)
Remarquer que d'un côté

$$(e^x - 1)^n = x^n + o_{x\to 0}(x^n)$$

et de l'autre

$$(e^x-1)^n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}\sum_{p=0}^{n}\frac{k^p x^p}{p!}+o_{x\to 0}(x^n).$$

Indication 21 · Énoncé p. 770 (Le début de l'étude de la série harmonique)
Remarquer que si $v_n=O_{n\to+\infty}(n^{-2})$ alors $\sum_{k=1}^{n}v_k$ converge.

Indication 22 · Énoncé p. 770 (DL des fonctions trigonométriques réciproques)
Faire le $\mathrm{DL}_{2n-1}(0)$ de $x\mapsto\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ puis primitiver.

Et $\arccos=\frac{\pi}{2}-\arcsin$.

Indication 23 · Énoncé p. 770 (Un cas très particulier d'approximant de Padé)
Faire un DL et regarder les conditions sur a et b pour annuler les termes d'ordre 2 et 4. On obtient $(a,b)=\left(-\frac{5}{12},\frac{1}{12}\right)$.

Indication 24 · Énoncé p. 771 (Obtention d'équivalent par encadrement)
Gendarmes.

Indication 25 · Énoncé p. 771 (Équivalents et composition)
Revenir à la définition.

Indication 26 · Énoncé p. 772 (Conjecturer puis démontrer: signes et DLs)

1. On obtient

$$e^x\sin(x)=0+x+x^2+\frac{1}{3}x^3+0x^4-\frac{1}{30}x^5-\frac{1}{90}x^6-\frac{1}{630}x^7+0x^8+\frac{1}{22680}x^9+o_{x\to 0}(x^9).$$

On conjecture que les coefficients sont de signes $0,+,+,+,0,-,-,-,0,+,+,+,+,0,-,-,-,\ldots$.

2. Remarquer que $e^x\sin(x)=\mathrm{Im}\left(e^{(1+i)x}\right)$ et que $(1+i)^n=\sqrt{2}^n e^{i\frac{n\pi}{4}}$.

3. On obtient

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}+h\right)=1+2h+2h^2+\frac{8}{3}h^3+\frac{10}{3}h^4+\frac{64}{15}h^5+o_{h\to 0}(h^5).$$

On conjecture que tous les coefficients sont positifs.

4. Par récurrence. Pour l'hypothèse de récurrence prendre par exemple:

- ▷ Il existe P_n à coefficients positifs tel que $\tan^{(n)}=P_n(\tan)$ (et dans l'hérédité $P_{n+1}=(1+X^2)P_n'$)
- ▷ Il existe $a_0,\ldots,a_n$ positifs tels que $\tan(\frac{\pi}{4}+h)=\sum_{k=0}^{n}a_k h^k$ (et dans l'hérédité $\tan'=1+\tan^2$ et intégrer).

Indication 27 · Énoncé p. 772 (De la place entre les deux)
Par exemple une moyenne géométrique.

Indication 28 · Énoncé p. 772 (Majoration d'une famille de fonctions)

1. Déterminer F tel que pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, $f_k\leq F$.

2. De même par un argument diagonal.

Indication 29 · Énoncé p. 773 (Toujours de la place: cas particuliers)
1. $\frac{1}{\ln}$
2. $\exp \circ \sqrt{\cdot}$

Indication 30 · Énoncé p. 773 (Autonomie: une étude de signe)
Plusieurs options:
- ▷ Astucieusement en remarquant un trinôme.
- ▷ De manière plus robuste en étudiant pour $\cos(x)$ proche de 0 ou $\cos(x)$ loin de 0.

Solution p. 794

Indication 31 · Énoncé p. 773 (Un contre-exemple parmi d'autres)
1. Faire le quotient.
2. Dériver et se convaincre qu'une CS de stricte monotonie est $(xu'(x)+1)u'(x) \geq 4(x-1)^2$. Une fois la stricte monotonie obtenue, on récupère facilement la condition de limite quitte à très légèrement modifier u.

Solution p. 798

Indication 32 · Énoncé p. 774 (Pour vérifier que la méthode est acquise)
1. Th. Bij. Mon.
2. Par exemple montrer que x_n est borné puis bootstrapper en écrivant $x_n = \frac{1}{n}(1-x_n^5)$.

Indication 33 · Énoncé p. 774 (Le grand classique de $\tan(x) = x$)
1. Bijection continue monotone.
2. $x_n \sim n\pi$, écrire l'équation avec une arctan et « bootstrapper ».

Indication 34 · Énoncé p. 774 (La somme est essentiellement le plus grand terme)
Commencer par traiter l'exercice 36

Remarquer qu'à p entier fixé on peut découper pour tout $n \in \mathbb{N}$ la somme $\sum_{k=0}^{n} u_k$ en

$$u_n\left(1+\sum_{k=n-p}^{n-1}\frac{u_k}{u_n}+\sum_{k=0}^{n-p-1}\frac{u_k}{u_n}\right)$$

et faire une preuve à la Cesàro pour p bien choisi $p\alpha > 1$.

Indication 35 · Énoncé p. 775 (Développement asymptotique de la fonction de Lambert)
Plusieurs façons de procéder, par exemple écrire $W(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ puis bootstrapper $W(x) + \ln(W(x)) = \ln(x)$.

Indication 36 · Énoncé p. 775 (Équivalents de sommes)
1. Somme géométrique donc explicite.
2. Isoler les deux derniers termes.
3. Encadrer à l'aide d'intégrales.

Indication 37 · Énoncé p. 775 (Sinus itérés)
1. Montrer que $[0,1]$ est stable par sin, puis que la suite est décroissante, etc.
2. Considérer la suite auxiliaire

$$v_n = \frac{3}{u_{n+1}^2} - \frac{3}{u_n^2}$$

déterminer sa limite éventuelle et conclure par Cesàro.

On obtient finalement

$$u_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}.$$

Indication 38 · Énoncé p. 776 (Équation implicite non polynômiale)
1. Bijection monotone.
2. Sans surprise bootstrapper. Pour commencer constater que $x_n \to +\infty$.

Indication 39 · Énoncé p. 776 (Un cas particulier de méthode de Newton: l'algorithme babylonien)
1. Méthode du cours.
2. Considérer par exemple la suite auxiliaire

$$v_n = \frac{u_n - \sqrt{a}}{u_n + \sqrt{a}}.$$

L'exercice a déjà été traité dans le TD sur les limites de suites.

Indication 40 · Énoncé p. 776 (Développements asymptotiques de suites récurrentes: des cas non bornés)
Cf la méthode vue en cours et DM.

Solution p. 799

Indication 41 · Énoncé p. 777 (Limites et polynômes)
Cf la méthode vue en cours et DM.

Indication 42 · Énoncé p. 777 (Un exemple de récurrence non autonome)
Bootstrapper en commençant par montrer que $u_n \sim n$.

Indication 43 · Énoncé p. 777 (Encore des équations implicites)
Toujours la même méthodologie: étude de fonction pour existence et unicité puis trouver des bornes, puis bootstrapper pour trouver un développement asymptotique.

Solution p. 807

Indication 44 · Énoncé p. 778 (Équivalent d'un maximum)
TBA + calcul de dérivée + bootstrap sur l'équation $\cos(x) - nx\sin(x) = 0$.

Solution p. 810

Indication 45 · Énoncé p. 778 (Un cas classique d'équivalent de suites récurrentes)
Trouver une suite auxiliaire bien choisie pour faire un Cesàro.

Solution p. 813

Indication 46 · Énoncé p. 779 (Suites récurrentes: le cas vraiment général)
Quelques étapes:

- ▹ Vérifier classiquement la bonne définition et la convergence vers 0.
- ▹ Montrer par exemple par des accroissements finis judicieux que

$$F(u_{n+1}) - F(u_n) \to 1.$$

- ▹ Cesàro.

Indication 47 · Énoncé p. 779 (Le terme d'après si vous avez le courage)
Bootstrapper l'ordre suivant.

On pourra utiliser la version de Cesàro pondéré suivante (sera un cas particulier du théorème de sommation des relations de comparaison cas **divergent** de spé):

«Si $t_n \sim \frac{1}{n}$ alors $\sum_{k=1}^{n} t_k \sim \ln(n)$.»

Sauf erreur de calcul de ma part on obtient

$$\gamma_1 = (a_k(k-1))^{\frac{1}{1-k}}$$
$$\gamma_2 = (a_k(k-1))^{\frac{1}{1-k}}\left(\frac{a_{2k-1}}{((k-1)a_k)^2} + \frac{k}{2(k-1)^2}\right).$$

Solution p. 814

Indication 48 · Énoncé p. 779 (Une dernière suite récurrente pour la route)
Toujours l'idée de poser une suite auxiliaire et Cesàro.

Ici une suite auxiliaire possible est $\frac{1}{2}e^{\frac{1}{u_n^2}}$, on obtient

$$u_n \sim \frac{1}{\sqrt{\ln(2n)}}.$$

Indication 49 · Énoncé p. 780 (Nullité des dérivées et nullité de la fonction)

1. Par exemple un des fameux contre-exemples à la $x \mapsto e^{-\frac{1}{x^2}}$.
2. Écrire Taylor-reste-intégral ou juste l'inégalité de Taylor pour tout $n \in \mathbb{N}$ et faire $n \to +\infty$.
3. Translater.

Indication 50 · Énoncé p. 780 (Fonction génératrice usuelle)
Écrire $\frac{1}{\sqrt{1-x}} \times \frac{1}{\sqrt{1-x}} = \frac{1}{1-x}$.

Indication 51 · Énoncé p. 781 (Nombres de Catalan par les DLs)

1. Calcul.
2. Deux possibilités:
   - ▷ Utiliser la relation fonctionnelle et une récurrence.
   - ▷ Montrer que f est $\mathcal{C}^\infty$ et les DLs usuels.
3. Constater qu'un des deux termes (la relation de récurrence ou la formule avec les coefficients binomiaux) correspond à une explicitation de la méthode que vous avez choisie pour la question précédente.

   L'autre terme correspond à l'autre méthode.

Indication 52 · Énoncé p. 781 (Utilisation en algèbre des séries entières)
Chercher même $v \in \mathbb{C}[u]$ c'est à dire comme un polynôme en u.

Pour «deviner» le polynôme faire un DL.

Pour vérifier faire des DLs de polynômes puis l'unicité.

Solution p. 815

Indication 53 · Énoncé p. 782 (Bobines de Helmholtz)
Prendre son courage et faire le calcul !

Indication 54 · Énoncé p. 782 (Formule de Borda)
Cela revient à faire le $\mathrm{DL}_2(0)$ de la fonction de Jacobi

$$K : [0,1[\to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1-x^2\sin(\theta)^2}}$$

pour cela plutôt qu'utiliser les théorèmes usuels expliciter des majorations.

Indication 55 · Énoncé p. 783 (Développement dipolaire)
Encore un DL, on obtient pour Q la charge totale

$$Q = \sum_{i \in I} q_i$$

et pour $\vec{p}$ le moment dipolaire

$$\vec{p} = \sum_{i \in I} q_i \vec{a_i}$$

Solutions

Solution pour l'exercice 4 · Énoncé p. 766 · Indication p. 784 (Et le cas complexe ?)
Posons pour $n \in \mathbb{N}$

$$z_n = \left(1 + \frac{\lambda}{n}\right)^n.$$

ainsi que $\lambda_x = \mathrm{Re}(\lambda)$ et $\lambda_y = \mathrm{Im}(\lambda)$.

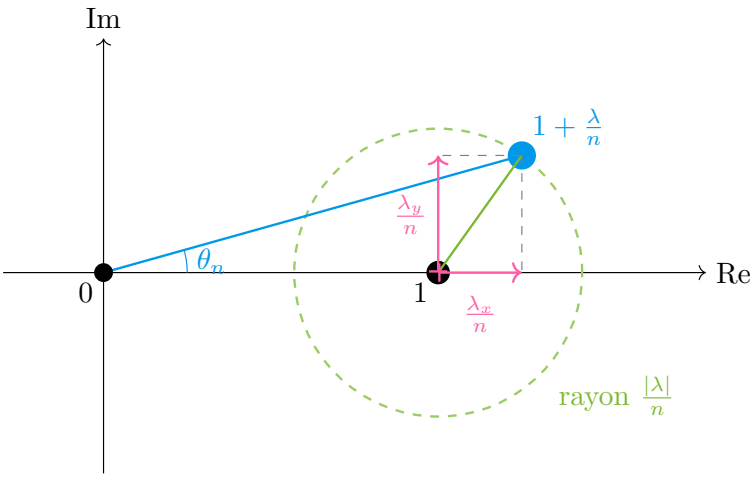
Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
|z_n| = \sqrt{|z_n|^2} &= \left(\left(1 + \frac{\lambda_x}{n}\right)^2 + \left(\frac{\lambda_y}{n}\right)^2\right)^{\frac{n}{2}} \\
&= \exp\left(\frac{n}{2}\ln\left(\left(1 + \frac{\lambda_x}{n}\right)^2 + \left(\frac{\lambda_y}{n}\right)^2\right)\right) \\
&= \exp\left(\frac{n}{2}\ln\left(1 + \frac{2\lambda_x}{n} + \frac{\lambda_x^2 + \lambda_y^2}{n^2}\right)\right) \\
&= \exp\left(\frac{n}{2}\left(\frac{2\lambda_x}{n} + o_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) \\
&= \exp(\lambda_x + o_{n\to+\infty}(1)) \\
&= e^{\lambda_x}(1 + o_{n\to+\infty}(1)) \\
&= e^{\lambda_x} + o_{n\to+\infty}(1)
\end{aligned}$$

et donc on a bien

$$\lim_{n\to+\infty} |z_n| = e^{\mathrm{Re}(\lambda)} = |e^{\lambda}\ |.$$

De même, comme $\frac{\lambda}{n} \to 0$ quand $n \to +\infty$, pour n assez grand $\mathrm{Re}\left(1 + \frac{\lambda}{n}\right) > 0$



et donc

$$\arg\left(1+\frac{\lambda}{n}\right) = \arctan\left(\frac{\frac{\lambda_y}{n}}{1+\frac{\lambda_x}{n}}\right) = \arctan\left(\frac{\lambda_y}{n}+o_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{\lambda_y}{n}+o_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\right).$$

D'où on peut écrire, pour n assez grand,

$$z_n = |z_n|e^{i\theta_n}$$

avec

$$\theta_n = n\arg\left(1+\frac{\lambda}{n}\right) = \lambda_y + o_{n\to+\infty}(1).$$

Donc $\theta_n \to \mathrm{Im}(\lambda)$ quand $n \to +\infty$.

On a donc pour n assez grand $z_n = \rho_n e^{i\theta_n}$ avec $\rho_n \to e^{\mathrm{Re}(\lambda)}$ et $\theta_n \to \mathrm{Im}(\lambda)$, d'où (continuité de exp)

$$\boxed{z_n \to e^{\mathrm{Re}(\lambda)}e^{i\,\mathrm{Im}(\lambda)} = e^{\lambda}}.$$

Remarque: dans le calcul de l'argument de $x+iy$ on a d'abord localisé le point pour utiliser $\arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ mais on pourrait aussi juste vérifier qu'il ne s'agit pas d'un réel négatif et utiliser la formule de l'angle moitié $2\arctan\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}+x}\right)$.

Solution pour l'exercice 14 · Énoncé p. 768 · Indication p. 785 (Un petit calcul)
Comme f et g sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ elle admettent par Taylor-Young un $\mathrm{DL}_6(0)$.

De l'imparité les termes d'ordres pairs sont nuls et de $f'(0) = g'(0) = 1$ on déduit que les termes d'ordre 1 est 1.

Par conséquent il existe $a_3, a_5 \in \mathbb{R}$ et $b_3, b_5 \in \mathbb{R}$ tels que

$$f(x) = x + a_3x^3 + a_5x^5 + o_{x\to0}(x^6)$$
$$g(x) = x + b_3x^3 + b_5x^5 + o_{x\to0}(x^6).$$

Calculons par composée le $\mathrm{DL}_6(0)$ de $f\circ g$, celui de $g\circ f$ s'en déduisant par symétrie.

On a au voisinage de 0,

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= (x+b_3x^3+b_5x^5) + a_3(x+b_3x^3+b_5x^5)^3 + a_5(x+b_3x^3+b_5x^5)^5 + o_{x\to0}(x^6) \\ &= x + (b_3+a_3)x^3 + (b_5+3a_3b_3+a_5)x^5 + o_{x\to0}(x^6). \end{aligned}$$

Par symétrie on a de même

$$g(f(x)) = x + (a_3+b_3)x^3 + (a_5+3a_3b_3+b_5)x^5 + o_{x\to0}(x^6).$$

Et donc

$$f(g(x)) - g(f(x)) = o_{x\to0}(x^6)$$

c'est à dire

$$\boxed{\lim_{x\to0}\frac{f(g(x))-g(f(x))}{x^6} = 0.}$$

Remarques:

- ▹ Cet exercice est souvent posé avec des fonctions explicites par exemple sin, tan, sh, th, arctan, etc.
- ▹ L'annulation issue de la symétrie s'arrête dès l'ordre suivant.

  En effet le terme d'ordre 7 dans le $\mathrm{DL}_7(0)$ de $f \circ g$ est

  $$b_7 + a_3(3b_3^2 + 3b_5) + 5a_5 b_3 + a_7$$

  ce qui est différent de

  $$a_7 + b_3(3a_3^2 + 3a_5) + 5b_5 a_3 + b_7.$$

Solution pour l'exercice 15 · Énoncé p. 768 · Indication p. 785 (Un peu réfléchir avant de calculer: argth)
On a pour x au voisinage de 0, pour tout $n \in \mathbb{N}$ par simplification et DL de la partie impaire de $x \mapsto \ln(1+x)$

$$\begin{aligned}\ln\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right) &= \frac{1}{2}(\ln(1+x) - \ln(1-x)) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \delta_{k \text{ impair}}\ (-1)^{k-1}\frac{x^k}{k} + o_{x\to 0}(x^n)\end{aligned}$$

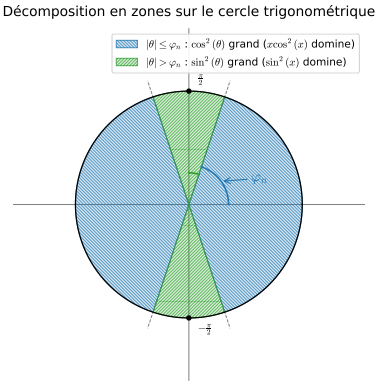
et en particulier on a

$$\boxed{\left(\ln\left(\sqrt{\tfrac{1+x}{1-x}}\right)\right) = x + \tfrac{x^3}{3} + \tfrac{x^5}{5} + \tfrac{x^7}{7} + o_{x\to 0}(x^8).}$$

Solution pour l'exercice 30 · Énoncé p. 773 · Indication p. 787 (Autonomie: une étude de signe)
Posons pour $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = x\cos^2(x) + \sin^2(x) - \alpha\sin(x)\cos(x).$$

- ▹ **Méthode 1**:



L'idée est de formaliser l'intuition suivante: «Quand $\cos(x)$ est loin de 0 alors $x\cos^2(x)$ est le plus grand terme, et quand $\cos(x)$ proche de 0 alors $\sin^2(x)$ est le plus grand terme».

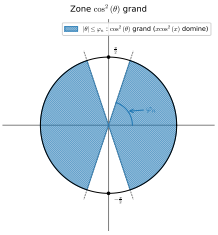
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

On a

$$f(n\pi+\theta) = (n\pi+\theta)\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) - \alpha\sin(\theta)\cos(\theta).$$

Alors selon la valeur de θ c'est le terme en $\cos^2(\theta)$ qui est prédominant ou celui en $\sin^2(\theta)$.

▷ **Pour θ «loin» de $\pm\frac{\pi}{2}$**



En particulier, comme $\theta \neq \pm\frac{\pi}{2}$.

$$\begin{aligned} f(n\pi+\theta) &\geq \left(n\pi - \frac{\pi}{2}\right)\cos^2(\theta) - \alpha\sin(\theta)\cos(\theta) \\ &= \cos^2(\theta)\left(n\pi - \frac{\pi}{2} - \alpha\tan(\theta)\right). \end{aligned}$$

Posons

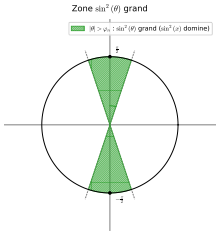
$$\varphi_n = \arctan\left(\frac{n\pi - \frac{\pi}{2}}{\alpha}\right).$$

Alors par croissance de la fonction tan sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, pour tout $\theta \in [-\varphi_n, \varphi_n]$ on a $f(n\pi+\theta) \geq 0$.

Ainsi

$$\forall n \geq 1, \forall \theta \in [-\varphi_n, \varphi_n], f(n\pi+\theta) \geq 0.$$

▷ **Pour θ «proche» de $\pm\frac{\pi}{2}$**



Supposons désormais que $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, -\varphi_n[\cup]\varphi_n, \frac{\pi}{2}]$.

Alors, si $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$ on a $f(n\pi+\theta) = 1$ et sinon

$$\begin{aligned} f(n\pi+\theta) &\geq \sin^2(\theta) - \alpha\sin(\theta)\cos(\theta) \\ &= \sin^2(\theta)\left(1 - \frac{\alpha}{\tan(\theta)}\right). \end{aligned}$$

et

$$|\tan(\theta)| \geq \tan(\varphi_n) = \frac{n\pi - \frac{\pi}{2}}{\alpha}$$

d'où

$$f(n\pi+\theta) \geq \sin^2(\theta)\left(1 - \frac{\alpha^2}{n\pi - \frac{\pi}{2}}\right).$$

Et en particulier pour n assez grand <u>indépendamment de</u> θ $f(n\pi+\theta) \geq 0$.

Plus précisément posons, par exemple, $N_\alpha = 2\lceil\frac{\alpha^2}{\pi}\rceil$ alors,

$$\forall n \geq N_\alpha, \forall\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, -\phi_n[\cup]\phi_n, \frac{\pi}{2}\right], f(n\pi+\theta) \geq 0.$$

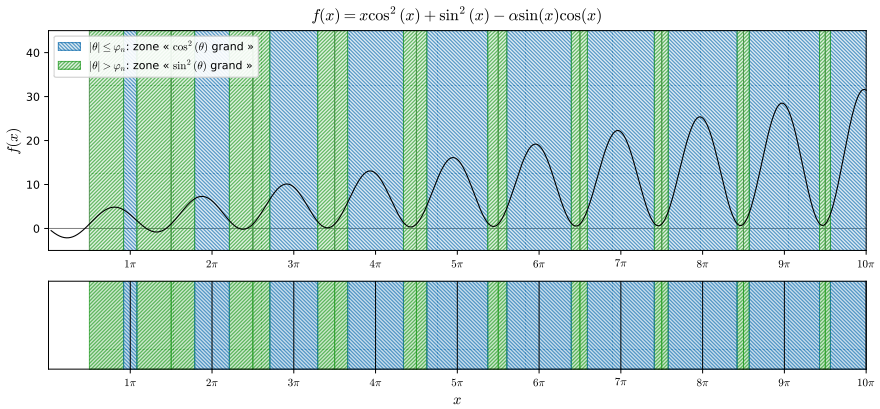
On en déduit donc que

$$\forall n \geq N_\alpha, \forall\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], f(n\pi+\theta) \geq 0$$

et donc

$$\forall x \geq N_\alpha\pi - \frac{\pi}{2}, f(x) \geq 0.$$

D'où on a bien $\boxed{f \text{ positive au voisinage de } +\infty}$



▷ **Méthode 2**:

L'idée est d'utiliser la structure quadratique en $\cos(x)$ et $\sin(x)$. Il y a ensuite plein de variantes qui sont équivalentes.

▷ **Méthode 2.A**: par trinôme.

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $a > 0$ et $t \in \mathbb{R}$. On rappelle que si $b^2 - 4ac \leq 0$ alors $@^2 + bt + c \geq 0$.

On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, **si** $\cos(x) = 0$ alors $f(x) = \sin^2(x) \geq 0$, et **sinon**

$$f(x) = \cos(x)^2(x - \alpha\tan(x) + \tan(x)^2)$$

Or pour x assez grand on a

$$(-\alpha)^2 - 4x \leq 0$$

et donc $f(x) \geq 0$.

▷ **Méthode 2.B**: par forme canonique.

On a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(x) &= x\cos^2(x) + \sin(x)^2 - \alpha\sin(x)\cos(x) \\ &= \left(\sqrt{x}\cos(x) - \frac{\alpha}{2\sqrt{x}}\sin(x)\right)^2 + \left(1 - \frac{\alpha^2}{4x}\right)\sin^2(x), \end{aligned}$$

qui est donc positif pour x assez grand.

▷ **Méthode 2.C**: par inégalité $|ab| \leq \eta a^2 + \frac{1}{4\eta}b^2$.

On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, pour tout $\eta > 0$,

$$|\cos(x)\sin(x)| \leq \eta\sin(x)^2 + \frac{1}{4\eta}\cos(x)^2$$

et donc

$$\begin{aligned} f(x) &\geq x\cos(x)^2 + \sin(x)^2 - \alpha\left(\eta\sin(x)^2 + \frac{1}{4\eta}\cos(x)^2\right) \\ &= \left(x - \frac{\alpha}{4\eta}\right)\cos(x)^2 + (1 - \alpha\eta)\sin(x)^2. \end{aligned}$$

et donc pour $\eta \leq \frac{1}{\alpha}$ et x assez grand, $f(x) \geq 0$.

Remarques: ces deux méthodes utilisent des idées très différentes mais toutes les deux importantes:

- La première illustre l'idée de différentes «zones» de prédominance des différents termes, selon la valeur de x, ce n'est pas le même terme qui est plus grand dans la somme. Une idée est alors d'expliciter ces zones et de faire un Développement Asymptotique dans chacune d'elle.
- La seconde est plus spécifique à la forme particulière de la fonction f (une forme quadratique), mais permet de rappeler l'importance de la mise sous forme canonique pour de telles formes quadratiques.

Solution pour l'exercice 31 · Énoncé p. 773 · Indication p. 787 (Un contre-exemple parmi d'autres)

1. Montrons tout d'abord que pour tout $x > 0$, $f(x) > 0$.

On a pour tout $x > 0$, $g(x) > 0$.

Et, comme $x\cos(x)^2 + \sin(x)^2 > 0$ car somme de deux termes positifs non tous les deux nuls, $f(x) > 0$.

Il suffit désormais de vérifier que $\frac{f}{g}$ n'est pas majorée au voisinage de $+\infty$ et que $\frac{g}{f}$ n'est pas majorée au voisinage de $+\infty$.

Or pour tout $x > 0$,

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \sqrt{x}\cos(x)^2 + \frac{1}{\sqrt{x}}\sin(x)^2.$$

- On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left(\frac{f}{g}\right)(2n\pi) = \sqrt{2n\pi} \times 1 + 0$$

donc en particulier,

$$\left(\frac{f}{g}\right)(2n\pi) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

et en particulier (comme $2n\pi \to +\infty$ quand $n \to +\infty$)

$$\boxed{\neg(f(x) = O_{x\to+\infty} g(x))}$$

- On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\left(\frac{f}{g}\right)\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 0 + \frac{1}{\sqrt{2n\pi + \frac{\pi}{2}}} \times 1$$

donc en particulier,

$$\left(\frac{f}{g}\right)\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

i.e

$$\frac{g}{f}\Big(2n\pi+\frac{\pi}{2}\Big)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty$$

et en particulier (comme $2n\pi+\frac{\pi}{2}\to+\infty$ quand $n\to+\infty$)

$$\boxed{\neg(g(x)=O_{x\to+\infty}f(x))}$$

2. Avec u une fonction strictement croissante on a (comme produit de deux fonctions strictement croissantes positives, g est strictement croissante. Avec u une fonction positive, de la minoration $g\geq\sqrt{\cdot}$ on en déduit que g admet $+\infty$ comme limite en $+\infty$.

Il reste à trouver une condition suffisante sur u pour obtenir les informations sur f.

Dans le cas où u est dérivable on obtient que f est dérivable et que

$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R}_+, f'(x)&=(u'(x)(x\cos(x)^2+\sin(x)^2)+\cos(x)^2-2x\cos(x)\sin(x)+2\sin(x)\cos(x))e^{u(x)}\\&=((xu'(x)+1)\cos(x)^2+u'(x)\sin(x)^2+2(1-x)\sin(x)\cos(x))e^{u(x)}.\end{aligned}$$

Pour assurer la stricte monotonie une CS est alors d'avoir $((xu'(x)+1)\cos(x)^2+u'(x)\sin(x)^2+2(1-x)\sin(x)\cos(x))>0$ pour tout x.

Remarque: cf l'exercice 30 pour diverses méthodes pour attaquer ce problème.

Par exemple si $\cos(x)^2=0$ alors $f'(x)=\sin^2(x)u'(x)e^{u(x)}=1\times u'(x)e^{u(x)}$ et sinon

$$f'(x)=(u'(x)\tan(x)^2+2(1-x)\tan(x)+(xu'(x)+1))\cos(x)^2e^{u(x)}.$$

On sait qu'un trinôme de coefficient dominant positif et de discriminant strictement négatif est de signe strictement positif.

Une condition suffisante est donc

$$4(x-1)^2-4u'(x)(xu'(x)+1)<0.$$

On constate (calcul à faire) que par exemple $u(x)=(x+1)^2$ convient.

Une fois trouvé un tel u tel que $x\mapsto e^{u(x)}(x\cos(x)^2+\sin(x)^2)$ est croissante (et positive), alors pour par exemple, tout $x\geq 1$,

$$\begin{aligned}&e^{u(x)+x}(x\cos(x)^2+\sin(x)^2)=e^x\big(e^{u(x)}(x\cos(x)^2+\sin(x)^2)\big)\\&\geq e^xe^{u(1)}(1\times\cos(1)^2+\sin(1)^2)\end{aligned}$$

et donc par minoration on a bien, quitte à remplacer u par $u+\mathrm{Id}$, que f tend vers $+\infty$ en $+\infty$. Ainsi $\boxed{\text{un tel } u \text{ existe}}$ bien.

Solution pour l'exercice 40 · Énoncé p. 776 · Indication p. 788 (Développements asymptotiques de suites récurrentes: des cas non bornés)

1. ▷ **Bonne définition (intervalle stable)**

L'intervalle $]0,+\infty[$ est stable par f et $u_0\in]0,+\infty[$ d'où la bonne définition de la suite.

Limite

On a pour tout $x>0$, $f(x)>x$ d'où la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Par le Théorème de Limite Monotone et le Passage à la Limite des Inégalités Larges elle converge donc vers un certain $\ell \in [u_0, +\infty[\cup \{+\infty\}$.

Si par l'absurde $\ell \neq +\infty$, alors par continuité de f et passage à la limite de la relation de récurrence on a

$$\ell = f(\ell)$$

ce qui est absurde.

Par conséquent

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty}.$$

▷ **Premier terme du DA**

On constate que comme $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, d'où $\frac{1}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et par conséquent $u_{n+1} - u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

L'égalité pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{u_{n+1} - u_n}{\frac{1}{u_n}} = 1$$

encourage donc à poser la suite auxiliaire (comme une primitive de $x \mapsto \frac{1}{\frac{1}{x}}$ est $x \mapsto \frac{x^2}{2}$), pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = \frac{u_n^2}{2}$$

c'est à dire (les termes étant positifs)

$$u_n = \sqrt{2v_n}.$$

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{1}{u_n}\right)^2 \\ &= \frac{1}{2}u_n^2\left(1 + \frac{1}{u_n^2}\right)^2 \end{aligned}$$

et donc (exprimer une relation de récurrence sur $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seule sera utile pour l'étape suivante), pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{v_{n+1} = v_n\left(1 + \frac{1}{2v_n}\right)^2}.$$

Comme

$$v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

on a par un DL à l'ordre 1,

$$v_n\left(1 + \frac{1}{2v_n}\right)^2 = v_n\left(1 + 2\frac{1}{2v_n} + o_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{v_n}\right)\right)$$

d'où

$$v_{n+1} = v_n + 1 + o_{n\to+\infty}(1).$$

Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{v_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(v_{k+1} - v_k)$$

on en déduit par Cesàro,

$$\frac{v_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

c'est à dire

$$\boxed{v_n = n + o_{n\to+\infty}(n)}$$

ou encore (comme $\sqrt{1+o(1)} = 1 + o(1)$)

$$\boxed{u_n = \sqrt{2n} + o_{n\to+\infty}(\sqrt{n})}$$

▷ **Terme suivant**

Le point important dans le terme précédent était la relation de récurrence,

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = v_n\left(1 + \frac{1}{2v_n}\right)^2$$

développée à l'ordre 1.

En développant à l'ordre 2 on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = v_n + 1 + \frac{1}{4v_n}$$

et donc en posant la nouvelle suite auxiliaire pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = v_n - n$, c'est à dire

$$v_n = n + w_n$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$, en réinjectant l'information

$$v_n = n + o_{n\to+\infty}(n)$$

on obtient

$$w_{n+1} + (n+1) = (w_n + n) + 1 + \frac{1}{4n} + o_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)$$

c'est à dire

$$\frac{w_{n+1} - w_n}{\frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{4}.$$

Or $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc par Cesàro pondéré, comme pour tout n,

$$\frac{\sum_{k=1}^{n-1}(w_{k+1}-w_k)}{\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}} = \frac{\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}\frac{w_{k+1}-w_k}{\frac{1}{k}}}{\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}}$$

on en déduit que

$$\frac{\sum_{k=1}^{n-1}(w_{k+1}-w_k)}{\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{4}$$

et donc (somme télescopique et équivalent de la série harmonique)

$$\boxed{w_n = \tfrac{1}{4}\ln(n) + o_{n\to+\infty}(\ln(n))}.$$

D'où

$$v_n = n + \frac{1}{4}\ln(n) + o_{n\to+\infty}(\ln(n))$$

et donc

$$u_n = \sqrt{2}\sqrt{n}\sqrt{1+\frac{\ln(n)}{4n}+o_{n\to+\infty}\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)}$$

d'où par $\mathrm{DL}_1(0)$ de $t\mapsto\sqrt{1+t}$, comme $\frac{\ln(n)}{4n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$,

$$\boxed{u_n = \sqrt{2n} + \tfrac{\sqrt{2}}{2\times4}\tfrac{\ln(n)}{\sqrt{n}} + o_{n\to+\infty}\left(\tfrac{\ln(n)}{\sqrt{n}}\right)}$$

2. ▷ **Bonne définition (intervalle stable)**

L'intervalle $[0,+\infty[$ est stable par f et $u_0 \in [0,+\infty[$ d'où la bonne définition de la suite.

Limite

On a pour tout $x>0$, $f(x)>x$ d'où la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Par le Théorème de Limite Monotone et le Passage à la Limite des Inégalités Larges elle converge donc vers un certain $\ell \in [u_0,+\infty[\cup\{+\infty\}$.

Si par l'absurde $\ell \neq +\infty$, alors par continuité de f et passage à la limite de la relation de récurrence on a

$$\ell = f(\ell)$$

ce qui est absurde.

Par conséquent

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty}.$$

▷ **Premier terme du DA**

On constate que comme $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, d'où $e^{-u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et par conséquent $u_{n+1}-u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

L'égalité pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$\frac{u_{n+1}-u_n}{e^{-u_n}}=1$$

encourage donc à poser la suite auxiliaire (comme une primitive de $x\mapsto\frac{1}{e^{-x}}$ est $x\mapsto e^x$), pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$v_n=e^{u_n}$$

c'est à dire (par stricte positivité)

$$u_n=\ln(v_n).$$

Alors pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}v_{n+1}&=e^{u_n+e^{-u_n}}\\&=e^{u_n}e^{e^{-u_n}}\end{aligned}$$

et donc (exprimer une relation de récurrence sur $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seule sera utile pour l'étape suivante), pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$\boxed{v_{n+1}=v_ne^{\frac{1}{v_n}}}.$$

Comme

$$v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

on a par un DL à l'ordre 1,

$$v_ne^{\frac{1}{v_n}}=v_n\left(1+\frac{1}{v_n}+o_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{v_n}\right)\right)$$

d'où

$$v_{n+1}=v_n+1+o_{n\to+\infty}(1).$$

Comme pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$\frac{v_n}{n}=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(v_{k+1}-v_k)$$

on en déduit par Cesàro,

$$\frac{v_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

c'est à dire

$$\boxed{v_n=n+o_{n\to+\infty}(n)}$$

ou encore (comme $\ln(1+o(1))=o(1)$)

$$\boxed{u_n = \ln(n) + o_{n\to+\infty}(1)}.$$

▷ **Terme suivant**

Le point important dans le terme précédent était la relation de récurrence,

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = v_n e^{\frac{1}{v_n}}$$

développée à l'ordre 1.

En développant à l'ordre 2, $e^h = 1 + h + \frac{h^2}{2} + o_{h\to0}(h^2)$ on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = v_n + 1 + \frac{1}{2v_n}$$

et donc en posant la nouvelle suite auxiliaire pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = v_n - n$, c'est à dire

$$v_n = n + w_n$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$, en réinjectant l'information

$$v_n = n + o_{n\to+\infty}(n)$$

on obtient

$$w_{n+1} + (n+1) = (w_n + n) + 1 + \frac{1}{2n} + o_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)$$

c'est à dire

$$\frac{w_{n+1} - w_n}{\frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}.$$

Or $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc par Cesàro pondéré, comme pour tout n,

$$\frac{\sum_{k=1}^{n-1}(w_{k+1} - w_k)}{\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}} = \frac{\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}\frac{w_{k+1} - w_k}{\frac{1}{k}}}{\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}}$$

on en déduit que

$$\frac{\sum_{k=1}^{n-1}(w_{k+1} - w_k)}{\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$$

et donc (somme télescopique et équivalent de la série harmonique)

$$\boxed{w_n = \tfrac{1}{2}\ln(n) + o_{n\to+\infty}(\ln(n))}.$$

D'où

$$v_n = n + \frac{1}{2}\ln(n) + o_{n\to+\infty}(\ln(n))$$

et donc

$$\begin{aligned} u_n &= \ln\left(n + \frac{1}{2}\ln(n) + o_{n\to+\infty}(\ln(n))\right) \\ &= \ln(n) + \ln\left(1 + \frac{1}{2}\frac{\ln(n)}{n} + o_{n\to+\infty}\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)\right) \end{aligned}$$

d'où par $\mathrm{DL}_1(0)$ de $t \mapsto \ln(1+t)$, comme $\frac{\ln(n)}{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$,

$$\boxed{u_n = \ln(n) + \tfrac{1}{2}\tfrac{\ln(n)}{n} + o_{n\to+\infty}\left(\tfrac{\ln(n)}{n}\right)}$$

▹ **Et l'ordre suivant ? (HP)**

On peut continuer à réinjecter l'information pour obtenir un développement à l'ordre suivant.

Mais on peut aussi dès maintenant prévoir que l'ordre suivant va être légèrement différent.

En effet un passage crucial pour l'ordre 1 ou l'ordre 2 était l'utilisation de Cesàro ou Cesàro pondéré (en fait une méthode pour contourner l'utilisation d'un théorème plus général que vous verrez en spé: le théorème de «sommation des relations de comparaisons, cas **divergent**»). Or dans ce théorème l'hypothèse que la somme des poids, que ce soit $\sum_{k=1}^{n-1} 1$ ou $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$, tende vers $+\infty$ est cruciale.

Or on s'attend à ce que l'ordre suivant fasse apparaître des poids en $\frac{1}{n^2}$ et la somme des poids en $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2}$ converge. On utilisera alors le théorème de convergence monotone pour conclure (encore une fois pour contourner l'utilisation d'un théorème plus général que vous verrez en spé: le théorème de «sommation des relations de comparaisons, cas **convergent**»).

Reprenons la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = v_n e^{\frac{1}{v_n}}$$

En développant à l'ordre 3 on obtient donc

$$v_{n+1} = v_n + 1 + \frac{1}{2v_n} + \frac{1}{6v_n^2} + o_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{v_n^2}\right)$$

et en posant pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\xi_n = w_n - \frac{1}{2}\ln(n)$ c'est à dire

$$v_n = n + \frac{1}{2}\ln(n) + \xi_n$$

on obtient (les o sont des $o_{n\to+\infty}$)

$$(n+1) + \frac{1}{2}\ln(n+1) + \xi_{n+1} = n + \frac{1}{2}\ln(n) + \xi_n + 1 + \frac{1}{2}\frac{1}{n + \frac{1}{2}\ln(n) + o(\ln(n))} + \frac{1}{6}\frac{1}{\left(n + \frac{1}{2}\ln(n) + o(\ln(n))\right)^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Donc

$$\xi_{n+1}-\xi_n=\frac{1}{2}(\ln(n+1)-\ln(n))+\frac{1}{2}\frac{1}{n+\frac{1}{2}\ln(n)+o(\ln(n))}+\frac{1}{6}\frac{1}{\left(n+\frac{1}{2}\ln(n)+o(\ln(n))\right)^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Il ne reste plus qu'à effectuer un développement limité à l'ordre 2.

On a

- $\ln(n+1)-\ln(n)=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$
- $\frac{1}{n+\frac{1}{2}\ln(n)+o(\ln(n))}=\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{2}\frac{\ln(n)}{n}+o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)\right)=\frac{1}{n}-\frac{1}{2}\frac{\ln(n)}{n^2}+o_{n\to+\infty}\left(\frac{\ln(n)}{n^2}\right)$
- $\frac{1}{\left(n+\frac{1}{2}\ln(n)+o(\ln(n))\right)^2}=\frac{1}{n^2}\left(1-2\times\frac{1}{2}\frac{\ln(n)}{n}+o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)\right)=\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

En sommant comme $\frac{1}{n^2}=o\left(\frac{\ln(n)}{n^2}\right)$, on en déduit que

$$\xi_{n+1}-\xi_n=-\frac{1}{4}\frac{\ln(n)}{n^2}+o_{n\to+\infty}\left(\frac{\ln(n)}{n^2}\right)$$

Ici le théorème de sommation des relations de comparaison, cas convergent permettrait de conclure (et en fait d'obtenir aussi l'équivalence des restes d'où un ordre de plus), mais en contournant ce résultat fort pratique en utilisant uniquement des résultats de sup.

- Par l'équivalent précédent, $\xi_{n+1}-\xi_n\leq 0$ APCR et donc la suite $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
- Toujours par l'équivalent précédent et par croissance comparée il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que pour tout $n\geq N$, $-\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\leq\xi_{n+1}-\xi_n$ d'où par croissance $n\geq N$, $\xi_N-\sum_{k=N}^{n-1}\frac{1}{k^{\frac{3}{2}}}\leq\xi_n$. Or par comparaison série-intégrale (à rédiger), pour N assez grand, $\sum_{k=N}^{n-1}\frac{1}{k^{\frac{3}{2}}}\leq\int_{N-1}^{n-1}\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x=2\left(\frac{1}{N^{\frac{1}{2}}}-\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}\right)\leq\frac{2}{N^{\frac{1}{2}}}$. D'où la suite est minorée.
- Par conséquent la suite $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Par conséquent il existe une constante $\kappa(u_0)\in\mathbb{R}$ (il n'y a, a priori pas d'expression explicite de $\kappa(u_0)$ parfois appelée constante d'Euler de ce problème particulier, penser par exemple à la constante γ obtenue pour la suite $u_{n+1}=u_n+\frac{1}{n}$) telle que

$$\xi_n\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\kappa(u_0).$$

Donc

$$v_n=n+\frac{1}{2}\ln(n)+\kappa(u_0)+o_{n\to+\infty}(1)$$

et donc

$$u_n=\ln(n)+\ln\left(1+\frac{1}{2}\frac{\ln(n)}{n}+\frac{\kappa(u_0)}{n}+o_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

ce qui donne finalement, après un DL_2 et comme $\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)^2=o_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)$,

$$\boxed{u_n = \ln(n) + \tfrac{1}{2}\tfrac{\ln(n)}{n} + \tfrac{\kappa(u_0)}{n} + o_{n\to+\infty}\left(\tfrac{1}{n}\right)}.$$

On peut ensuite écrire un script python pour vérifier le développement asymptotique et obtenir pour une certaine valeur de u_0 une valeur approchée de $\kappa(u_0)$, etc.

Solution pour l'exercice 43 · Énoncé p. 777 · Indication p. 789 (Encore des équations implicites)

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^n + x - 1$.

▷ **Existence, unicité et bornes**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

La fonction f_n est dérivable (car polynomiale) et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f_n'(x) = nx^{n-1} + 1 > 0$.

Comme de plus $f_n(0) = -1 < 0$, $f_n(1) = 1 > 0$ par le théorème de bijection continue strictement monotone (on remarque que f_n continue et $\mathbb{R}_+$ un intervalle), il existe un unique $x_n \in \mathbb{R}_+$ tel que $f_n(x_n) = 0$ et de plus $\boxed{x_n \in [0,1]}$.

▷ **Convergence et limite**

▷ *Première méthode: monotonie*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par définition $f_n(x_{n+1}) = x_{n+1}^{n+1} + x_{n+1} - 1 = 0$.

D'où $f_n(x_{n+1}) = x_{n+1}^n + x_{n+1} - 1 = x_{n+1}^n - x_{n+1}^{n+1} = x_{n+1}^n(1 - x_{n+1}) \geq 0$ la dernière inégalité étant issue de $x_{n+1} \in [0,1]$.

Par tableau de variation (déjà établi à la question précédente), on en déduit que $x_n \leq x_{n+1}$.

La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante.

De plus elle est majorée par 1.

Par théorème de convergence monotone elle converge donc. Notons ℓ sa limite. Par Passage à La Limite des Inégalités Larges $\ell \in [0,1]$.

Supposons que $\ell \neq 1$.

Alors $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell < 1$ d'où $x_n^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (car $n\ln(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$, il s'agit d'une forme déterminée).

En passant à la limite l'équation $x_n^n + x_n - 1 = 0$ on en déduit donc $0 + \ell - 1 = 0$, ce qui est absurde.

Donc $\ell = 1$ c'est à dire

$$\boxed{x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1}.$$

▷ *Seconde méthode: compacité*

La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et à valeurs dans $[0,1]$.

Soient φ extractrice et $\ell \in [0,1]$ tq $x_{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

Supposons que $\ell \neq 1$.

Alors $x_{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell < 1$ d'où $x_{\varphi(n)}^{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (car $\varphi(n)\ln\left(x_{\varphi(n)}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$, il s'agit d'une forme déterminée).

En passant à la limite l'équation $x_{\varphi(n)}^{\varphi(n)} + x_{\varphi(n)} - 1 = 0$ on obtient $0 + \ell - 1 = 0$ ce qui est absurde. Par conséquent $\ell = 1$.

On a donc montré que pour tout extractrice φ, **si** $\left(x_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge **alors** la limite est 1, qui ne dépend pas de l'extractrice.

Par unicité de valeur d'adhérence

$$\boxed{x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1}.$$

▷ *Autre méthode pour la limite*

Dans les deux méthodes précédentes, une étape est de montrer que (une fois la convergence obtenue ou bien sous réserve de convergence à extraction près) la limite est 1. Plutôt que de procéder par l'absurde on peut aussi réécrire l'équation sous une forme plus manipulable, réécriture nécessaire pour le développement asymptotique.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, comme $x_n \in]0,1[$ on a

$$x_n^n + x_n - 1 = 0$$

qui se réécrit

$$n\ln(x_n) = \ln(1 - x_n)$$

ou encore

$$\frac{\ln(x_n)}{\ln(1-x_n)} = \frac{1}{n}.$$

En notant ℓ la limite (éventuellement à extraction près), comme $f_n\left(\frac{1}{2}\right) < 0$ pour $n \geq 2$, on a $x_n \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ pour $n \geq 2$ et donc par passage à la limite $\ell \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

En particulier $\ell > 0$ et le passage à la limite de l'équation précédente donne

$$\frac{\ln(\ell)}{\ln(1-\ell)} = 0.$$

D'où la valeur de ℓ (sans raisonnement par l'absurde).

▷ **Terme suivant du développement asymptotique**

Notons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $y_n = 1 - x_n$ c'est à dire

$$x_n = 1 - y_n.$$

Les calculs précédents montrent que

$$y_n = o_{n\to+\infty}(1).$$

Tout l'enjeu est de trouver la bonne expression dans laquelle réinjecter pour obtenir l'ordre suivant.

En réinjectant dans l'expression ayant permis d'obtenir la limite on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{\ln(1-y_n)}{\ln(y_n)} = \frac{1}{n}$$

donc, comme $y_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, d'après le $\mathrm{DL}_1(0)$ de ln,

$$\frac{-y_n}{\ln(y_n)} \sim \frac{1}{n}.$$

Afin de retrouver un développement dans le « bon sens », posons ensuite $z_n = \frac{1}{y_n}$ (possible car $x_n < 1$ d'où $y_n > 0$) c'est à dire

$$y_n = \frac{1}{z_n}.$$

L'équivalent précédent se réécrit

$$z_n \ln(z_n) \sim n$$

(cela doit rassurer, il s'agit essentiellement d'une fonction de Lambert, exercice que l'on sait traiter !) c'est à dire

$$z_n \ln(z_n) = n\big(1 + o_{n\to+\infty}(1)\big)$$

en passant au logarithme (comme $z_n > 1$)

$$\ln(z_n) + \ln(\ln(z_n)) = \ln(n) + \ln\big(1 + o_{n\to+\infty}(1)\big)$$

et comme $z_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, $\ln(\ln(z_n)) = o_{n\to+\infty}(\ln(z_n))$ d'où (comme $\frac{1}{1+o(1)} = 1 + o(1)$)

$$\ln(z_n) = \ln(n) + o_{n\to+\infty}(\ln(n))$$

en réinjectant,

$$\ln(z_n) = \ln(n) - \ln\big(\ln(n) + o_{n\to+\infty}(\ln(n))\big) + o_{n\to+\infty}(1)$$

d'où

$$\ln(z_n) = \ln(n) - \ln(\ln(n)) + o_{n\to+\infty}(1).$$

Une fois le $o(1)$ obtenu on peut enfin passer à l'exponentielle pour obtenir un équivalent:

$$z_n = e^{\ln(n) - \ln(\ln(n)) + o_{n\to+\infty}(1)} = \frac{n}{\ln(n)}\big(1 + o_{n\to+\infty}(1)\big)$$

et par conséquent

$$\boxed{x_n = 1 - \tfrac{\ln(n)}{n} + o_{n\to+\infty}\Big(\tfrac{\ln(n)}{n}\Big)}.$$

Solution pour l'exercice 44 · Énoncé p. 778 · Indication p. 789 (Équivalent d'un maximum)

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Si $n = 0$ alors $f_n : x \mapsto x$ et le maximum est atteint en $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

Supposons désormais que $n \geq 1$.

On a f_n est dérivable (opérations sur les fonctions usuelles) et

$$\begin{aligned}\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], f_n'(x) &= (\cos(x))^n - nx(\cos(x))^{n-1}\sin(x)\\ &= (\cos(x))^{n-1}(\cos(x) - nx\sin(x)).\end{aligned}$$

D'où pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $f_n'(x)$ est du même signe que $\cos(x) - nx\sin(x)$. Notons

$$\begin{aligned}g_n : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] &\to \mathbb{R}\\ x &\mapsto \cos(x) - nx\sin(x).\end{aligned}$$

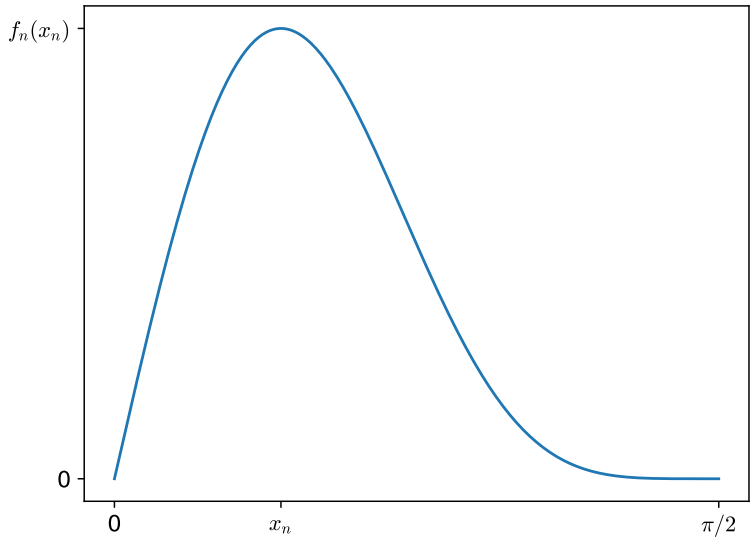
On a $g_n(0) = 1$, $g_n(\frac{\pi}{2}) = -\frac{n\pi}{2} < 0$ et comme, sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, cos strictement décroissante, sin décroissante positive et $x \mapsto x$ croissante positive par opérations g_n est strictement décroissante (on pourrait aussi simplement calculer g_n').

On en déduit le tableau de variations:

x	0		x_n		$\frac{\pi}{2}$
g_n	1	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\frac{n\pi}{2}$
$g_n(x)$	$+$		0	$-$	
$f_{n'}(x)$	$+$		0	$-$	
f_n	0	$\nearrow$	$f_n(x_n)$	$\searrow$	0

D'où par lecture du tableau de variations $\boxed{\text{existence et unicité d'un tel } x_n}$.

Remarque: on a ainsi la forme schématique de la fonction:



2. On a vu que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, x_n est l'unique solution de l'équation

$$g_n(x) = 0$$

où

$$\begin{aligned} g_n : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \cos(x) - nx\sin(x). \end{aligned}$$

Comme pour toutes les suites implicites il y a alors plusieurs façons de procéder.

▹ **Par monotonie**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On a

$$\begin{aligned} g_n(x_{n+1}) &= g_n(x_{n+1}) - g_{n+1}(x_{n+1}) \\ &= (g_n - g_{n+1})(x_{n+1}) \\ &= x_{n+1}\sin(x_{n+1}) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

et donc par stricte décroissance de g_n, c'est à dire lecture du tableau de variations

x	0	x_{n+1}	x_n	$\frac{\pi}{2}$
g_n	1 ↘	$g_n(x_{n+1}) \geq 0$ ↘	0 ↘	$-\frac{n\pi}{2}$

on en déduit

$$x_{n+1} \leq x_n.$$

La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc décroissante et minorée par 0.

Par théorème de limite monotone elle est donc convergente.

Notons ℓ sa limite.

Si $\ell \neq 0$, alors par passage à la limite de

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \cos(x_n) - nx_n \sin(x_n) = 0$$

on obtient

$$-\infty = 0$$

ce qui est absurde.

Donc $\ell = 0$, c'est à dire

$$\boxed{x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0}.$$

▷ **Par compacité**

La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

Soit φ une extractrice et $\ell_\varphi \in \mathbb{R}$ tels que $x_{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_\varphi$.

Si par l'absurde $\ell_\varphi \neq 0$, alors par passage à la limite de l'égalité

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \cos\left(x_{\varphi(n)}\right) - \varphi(n)x_{\varphi(n)} \sin\left(x_{\varphi(n)}\right) = 0$$

on en déduit

$$-\infty = 0$$

ce qui est absurde.

Donc $\ell_\varphi = 0$.

Donc par unicité de la valeur d'adhérence

$$\boxed{x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0}.$$

▷ **Par encadrement**

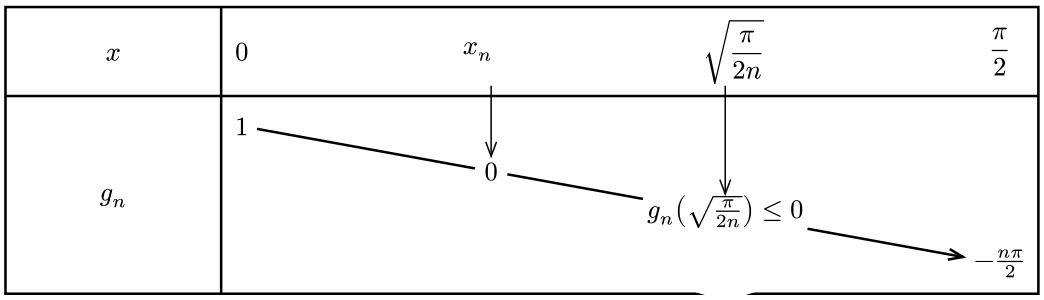
On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, comme $\cos(x) \leq 1$ et $\sin(x) \geq \frac{2}{\pi}x$ (concavité de sin sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$),

$$g_n(x) \leq 1 - nx\frac{2}{\pi}x$$

et en particulier

$$g_n\left(\sqrt{\frac{\pi}{2n}}\right) \leq 0.$$

Par stricte décroissance de g_n, c'est à dire lecture du tableau de variations



on en déduit que

$$0 \leq x_n \leq \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

Par encadrement,

$$\boxed{x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0}.$$

Solution pour l'exercice 45 · Énoncé p. 778 · Indication p. 789 (Un cas classique d'équivalent de suites récurrentes)
Posons pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{v_n = u_{n+1}^{1-k} - u_n^{1-k}}.$$

L'objectif est de montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge puis d'utiliser Cesàro.

Constatons tout d'abord que pour x au voisinage de 0, (comme $k-1>0$)

$$\begin{aligned}(f(x))^{1-k} - x^{1-k} &= \big(x - a_k x^k + o_{x\to0}(x^k)\big)^{1-k} - x^{1-k}\\ &= x^{1-k}\Big(\big(1 - a_k x^{k-1} + o_{x\to0}(x^{k-1})\big)^{1-k} - 1\Big)\\ &= x^{1-k}\big(\big(1-(1-k)a_k x^{k-1} + o_{x\to0}(x^{k-1})\big) - 1\big)\\ &= -(1-k)a_k + o_{x\to0}(1).\end{aligned}$$

donc, comme $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, pour n au voisinage de $+\infty$,

$$v_n = (u_{n+1})^{1-k} - u_n^{1-k} = (f(u_n))^{1-k} - u_n^{1-k} = (k-1)a_k + o_{n\to+\infty}(1).$$

et donc par Cesàro,

$$\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\big(u_{j+1}^{1-k} - u_j^{1-k}\big) = (k-1)a_k + o_{n\to+\infty}(1)$$

et donc par télescopage, et comme u_0^{1-k} est une constante, (donc un $o_{n\to+\infty}(n)$),

$$u_n^{1-k} = (k-1)a_k\ n + o_{n\to+\infty}(n)$$

et donc

$$\boxed{u_n = \gamma n^{\frac{1}{1-k}}(1 + o_{n\to+\infty}(1))}$$

où

$$\boxed{\gamma = ((k-1)a_k)^{\frac{1}{1-k}}}.$$

Solution pour l'exercice 47 · Énoncé p. 779 · Indication p. 789 (Le terme d'après si vous avez le courage)
Attention: erreurs de calculs fortement probables.

On commence par traiter l'exercice 45.

On a donc $u_n \to 0$ et même

$$u_n \sim_{n\to+\infty} ((k-1)a_k)^{-\frac{1}{k-1}}\ n^{-\frac{1}{k-1}}.$$

L'idée est de pousser le développement un ordre plus loin et de réinjecter cet équivalent (méthode de *bootstrap*). Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, de même que précédemment

$$v_n = u_{n+1}^{1-k} - u_n^{1-k}.$$

et en poussant le développement à l'ordre supérieur, quand $x \to 0$,

$$\begin{aligned}
&(f(x))^{1-k} - x^{1-k} = x^{1-k}\left(\left(\frac{f(x)}{x}\right)^{1-k} - 1\right)\\
&= x^{1-k}\Big(\big(1 - (a_k x^{k-1} + a_{2k-2}x^{2k-1} + o(x^{2k-2}))\big)^{1-k} - 1\Big)\\
&= x^{1-k}\left(1 - (1-k)(a_k x^{k-1} + a_{2k-1}x^{2k-2} + o(x^{2k-2})) + \frac{(1-k)(1-k-1)}{2}(a_k x^{k-1} + a_{2k-1}x^{2k-2} + o(x^{2k-2}))^2 + o(x^{2k-2}) - 1\right)\\
&= x^{1-k}\left(a_k(k-1)x^{k-1} + \left((k-1)a_{2k-1} + \frac{(k-1)k}{2}a_k^2\right)x^{2k-2} + o(x^{2k-2})\right)\\
&= a_k(k-1) + \left((k-1)a_{2k-1} + \frac{k(k-1)}{2}a_k^2\right)x^{k-1}(1+o(1))
\end{aligned}$$

et donc en posant

$$\begin{aligned}
C_1 &= a_k(k-1)\\
C_2 &= \left((k-1)a_{2k-1} + \frac{k(k-1)}{2}a_k^2\right)
\end{aligned}$$

comme $u_n \to 0$ on a

$$v_n = C_1 + C_2 u_n^{k-1}(1 + o_{n\to+\infty}(1)).$$

Posons désormais pour $n \in \mathbb{N}$,

$$w_n = v_n - C_1.$$

Alors

$$w_n \sim_{n\to+\infty} C_2 u_n^{k-1}$$

d'où comme on a déjà vu que

$$u_n \sim_{n\to+\infty} C_1^{\frac{1}{1-k}} n^{\frac{1}{1-k}}$$

on en conclut que

$$w_n \sim_{n\to+\infty} \frac{C_2}{C_1}\frac{1}{n}.$$

D'où par sommation des équivalents, cas divergent, on conclut que

$$\sum_{i=0}^{n-1}(w_i) \sim_{n\to+\infty} \frac{C_2}{C_1}\ln(n).$$

Or

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n-1} w_i &= \sum_{i=0}^{n-1}\left(u_{i+1}^{1-k} - u_i^{1-k} - C_1\right)\\ &= u_n^{1-k} - u_0^{1-k} - C_1 n\end{aligned}$$

et donc (comme $u_0^{1-k} = o_{n\to+\infty}(\ln(n))$) on conclut que

$$\boxed{u_n^{1-k} = C_1 n + \frac{C_2}{C_1}\ln(n) + o_{n\to+\infty(n)}(\ln(n))}$$

et donc

$$\begin{aligned}u_n &= C_1^{\frac{1}{1-k}} n^{\frac{1}{1-k}}\left(1 + \frac{C_2}{(C_1)^2}\frac{\ln(n)}{n} + o_{n\to+\infty}\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)\right)^{\frac{1}{1-k}}\\ &= C_1^{\frac{1}{1-k}} n^{\frac{1}{1-k}}\left(1 + \frac{1}{1-k}\frac{C_2}{(C_1)^2}\frac{\ln(n)}{n} + o_{n\to+\infty}\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)\right)\end{aligned}$$

et donc finalement comme (calcul à vérifier)

$$\frac{1}{1-k}\frac{C_2}{C_1^2}C_1^{\frac{1}{1-k}} = -\left(\frac{a_{2k-1}}{((k-1)a_k)^2} + \frac{k}{2(k-1)^2}\right)(a_k(k-1))^{\frac{1}{1-k}}$$

on obtient bien

$$\boxed{u_n = (a_k(k-1))^{\frac{1}{1-k}} n^{-\frac{1}{k-1}} - (a_k(k-1))^{\frac{1}{1-k}}\left(\frac{a_{2k-1}}{((k-1)a_k)^2} + \frac{k}{2(k-1)^2}\right)n^{-\frac{k}{k-1}}\ln(n) + o_{n\to+\infty}\left(n^{-\frac{k}{1-k}}\ln(n)\right)}.$$

Solution pour l'exercice 52 · Énoncé p. 781 · Indication p. 790 (Utilisation en algèbre des séries entières)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^n = 0$.

1. Posons $v = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k u^k$.

Alors (formule de Bernoulli)

$$\begin{aligned}(1+u)v &= (1-(-u))\left(\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k u^k\right)\\ &= 1-(-u)^n\\ &= 1\\ v(1+u) &= \left(\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k u^k\right)(1+u)\\ &= 1-(-u)^n\\ &= 1\end{aligned}$$

Remarque: comme $1+u$ et v sont tous deux des polynômes en u ils commutent et donc il aurait suffit de vérifier un seul des deux produits.

Donc $\boxed{1+u \text{ est inversible}}$.

2. On s'inspire du classique.

Il existe (DL usuel) un polynôme $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que

$$\sqrt{1+x} = P_n(x) + o_{x\to 0}(x^n).$$

Remarque: on a même une expression explicite,

$$P_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-k+1\right)}{k!}X^k$$

qui peut même se simplifier (produit des impairs) mais elle ne sera pas utile dans la suite.

On a en particulier (DL d'un produit)

$$P_n(x)^2 + o_{x\to 0}(x^n) = (1+x) + o_{x\to 0}(x^n)$$

et donc par unicité du $\mathrm{DL}_n(0)$ de $x \mapsto 1+x$, on en déduit que pour tout $k \in \{0,...,n\}$, le coefficient de X^k dans $P_n(X)^2$ est égal à 1 si $k=0$ ou 1 et à 0 sinon.

C'est à dire il existe $Q_n \in \mathbb{R}[X]$ (quotient de division euclidienne) tel que

$$P_n(X)^2 = 1 + X + X^n Q_n(X).$$

En évaluant cette relation en u on obtient

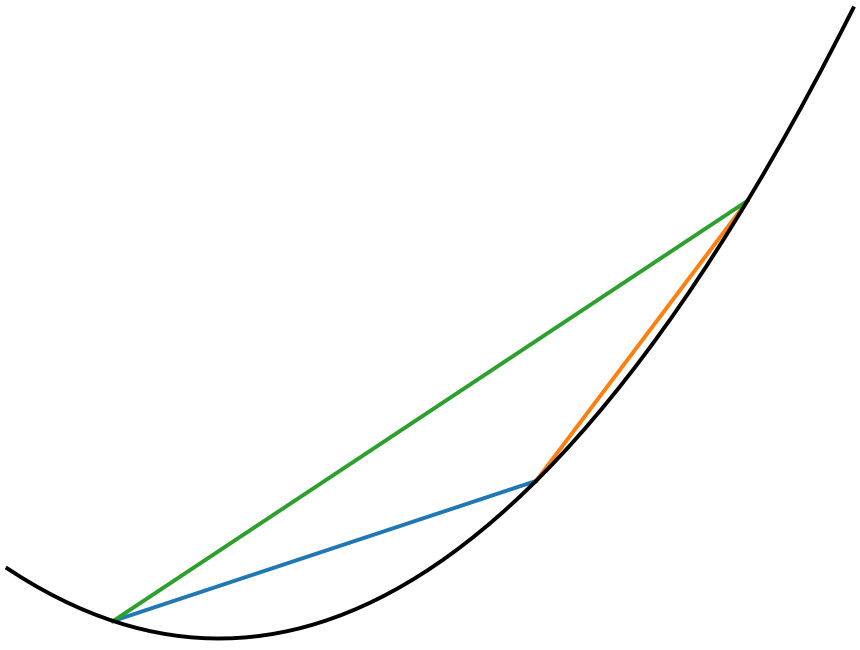
$$P_n(u)^2 = 1 + u + u^n Q_n(u) = 1+u$$

et donc $v = P_n(u)$ convient d'où $\boxed{1+u \text{ est un carré}}$.

Chapitre 23

Convexité

Énoncés 818
La base 818
Convexité et optimisation 822
Convexité et inégalités 824
Convexité et étude de fonctions 832
Convexité et convexité 838
Thème: log-convexité 842
Thème culturel: transformée de Legendre-Fenchel 846
Indications 850



Énoncés

Dans toute la feuille du TD, sauf mention contraire:

- I est un intervalle de $\mathbb{R}$,
- $\mathring{I}$ est l'intérieur de l'intervalle I,
- $[a, b]$ est un segment non réduit à un point,
- n est un entier naturel non nul.

Pour chaque exercice

- **faire un schéma !**
- en cas de difficultés se restreindre au cas dérivable, ou dérivable deux fois.

La base

Exercice 1 (◔★♣ À savoir refaire: inégalité des trois pentes)
Énoncer et démontrer l'inégalité des trois pentes.

Faire un schéma.

Indication p. 850

Exercice 2 (◔★♣ Inégalités de tangence)
Démontrer brièvement les inégalités suivantes et les représenter graphiquement

1. $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq 1 + x$,
2. $\forall x > -1, \ln(1 + x) \leq x$,
3. $\forall x > 0, \ln(x) \leq -1 + x$,
4. $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}], \frac{2}{\pi}x \leq \sin(x) \leq x$,
5. $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}[, \tan(x) \geq x$,
6. $\forall x \geq 0, \arctan(x) \leq x$,
7. pour $\alpha \geq 1$, $\forall x > -1, (1 + x)^\alpha \geq 1 + \alpha x$.

Indication p. 850

Exercice 3 (◔★ Se ramener à tout segment)
Soit $f : I \to \mathbb{R}$.

Montrer que f est convexe sur I **ssi** pour tout segment $[a, b] \subset I$, $f_{|[a,b]}$ est convexe sur $[a, b]$.

Indication p. 850

Exercice 4 (◔★ L'inégalité des deux pentes suffit)
Soit $f : I \to \mathbb{R}$.

Montrer que f est convexe **ssi**

$$\forall (a,b,c) \in I^3 \text{ t.q } a < b < c, \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(c)-f(a)}{c-a}.$$

Indication p. 850

Exercice 5 (◔★♣ Fonctions convexes et concaves)
1. Montrer que toute fonction affine sur un intervalle est convexe et concave.
2. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ convexe et concave. Montrer que f est une fonction affine.

Indication p. 850

Exercice 6 (◔★ Convexité et additions affines)
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Montrer que f est convexe ssi $x \mapsto f(x) + (\alpha x + \beta)$ est convexe.

Indication p. 850

Exercice 7 (◔★ Convexité et composées affines)
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de $\hat{f} : x \mapsto f(\alpha x + \beta)$.
2. Montrer que f est convexe **ssi** $\hat{f}$ est convexe.

Indication p. 851

Exercice 8 (◔★♠ Opérations et fonctions convexes)

1. Soient $f_1, f_2 : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions convexes et λ_1, λ_2 deux réels **positifs**. Montrer que $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ est convexe.
2. Soient $f : I \to J$ convexe et $\varphi : J \to \mathbb{R}$ convexe et **croissante**. Montrer que $\varphi \circ f$ est convexe.
3. Soient $f_1, f_2 : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions convexes **positives** et **de même monotonie**. Montrer que $f_1 \times f_2$ est convexe.
4. Donner un exemple de combinaison linéaire de fonctions convexes qui n'est pas convexe.
5. Donner un exemple de composée de fonctions convexes qui n'est pas convexe.
6. Donner un exemple de produit de fonctions convexes qui n'est pas convexe.

Indication p. 851

Exercice 9 (◔★♠ Convexité et épigraphe)

On rappelle qu'une partie $C \subset \mathbb{R}^2$ est dite convexe ssi

$$\forall z_0, z_1 \in C, \forall t \in [0,1], tz_1 + (1-t)z_0 \in C.$$

Étant donnée $f : I \to \mathbb{R}$ on définit l'épigraphe de f par

$$\text{Epi}(f) = \{(x, y) \in I \times \mathbb{R} \mid y \geq f(x)\}.$$

Montrer que f est convexe **ssi** $\text{Epi}(f)$ est convexe.

Faire un schéma.

Indication p. 851

Exercice 10 (◑★ Maximum et supremum de fonctions convexes)

1. Soient $f_1, f_2 : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions convexes. Montrer que $\max(f_1, f_2)$ est convexe.
2. Soit Λ un ensemble d'indices non vide et $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ une famille de fonctions de I vers $\mathbb{R}$ convexes. On suppose que pour tout $x \in I$, la famille $(f_\lambda(x))_{\lambda \in \Lambda}$ est majorée.

   On définit $F : I \to \mathbb{R}$ par

   $$\begin{aligned} F : I &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sup_{\lambda \in \Lambda} (f_\lambda(x)). \end{aligned}$$

   Montrer que F est convexe.
3. Faire des schémas.

Indication p. 851

Exercice 11 (◔★ Minimum local/global d'une fonction convexe)
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe.

1. Donner un exemple de fonction convexe sans minimum local.

   Faire un schéma.
2. Montrer que si f admet un minimum local en $\alpha \in I$ alors ce minimum est global.

   Faire un schéma.

Indication p. 851

Exercice 12 (◔★ Stricte convexité)
Soit $f : I \to \mathbb{R}$.

On dit que f est strictement convexe ssi

$$\forall (x,y) \in I^2, x \neq y \Rightarrow \forall t \in]0,1[, f(tx + (1-t)y) < tf(x) + (1-t)f(y).$$

1. Montrer que f est strictement convexe ssi pour tous $a, b, c \in I$ tels que $a < b < c$, on a $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} < \frac{f(c)-f(a)}{c-a} < \frac{f(c)-f(b)}{c-b}$.
2. On suppose de plus que f est dérivable. Montrer que f est strictement convexe ssi f' est strictement croissante.
3. Que dire d'une fonction strictement convexe dérivable deux fois ?

Indication p. 851

Exercice 13 (◔★ Suites convexes)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

Montrer l'équivalence entre les propriétés suivantes:

(i) Pour tous $a, b, c \in \mathbb{N}$ tels que $a < b < c$, on a $u_b \leq \frac{c-b}{c-a}u_a + \frac{b-a}{c-a}u_c$,
(ii) la suite des différences finies $(u_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante,
(iii) pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n \geq 0$.

Donner un nom aux suites vérifiant ces propriétés et faire un schéma.

Indication p. 851

Exercice 14 (◑★ Sous-différentielle: définition)
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ convexe.

Pour tout $a \in I$ on dit qu'un réel $\gamma \in \mathbb{R}$ est une sous-dérivée de f en $a \in I$ ssi

$$\forall x \in I, f(x) \geq f(a) + \gamma(x - a).$$

On appelle sous-différentielle de f en a, notée (localement) $\partial f(a)$, l'ensemble des sous-dérivées de f en a.

1. Faire un schéma.
2. Montrer que pour tout $a \in \mathring{I}$, $\partial f(a)$ est un segment (et en particulier est non vide).
3. Montrer que f admet un minimum local en $a \in \mathring{I}$ ssi $0 \in \partial f(a)$.
4. Montrer que f est dérivable en $a \in \mathring{I}$ ssi $\partial f(a) = \{f'(a)\}$.

Indication p. 851

Exercice 15 (◑★♠ Convexité et « tangentes »)
Soit $f : I \to \mathbb{R}$.

Montrer que

$$f \text{ convexe } \Leftrightarrow \forall a \in \mathring{I}, \exists \gamma \in \mathbb{R}, \forall x \in I, f(x) \geq f(a) + \gamma(x - a).$$

Faire un schéma.

Indication p. 852

Convexité et optimisation

Exercice 16 (◔★ Dans le cas convexe c'est suffisant)
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ convexe et $\alpha \in \mathring{I}$ tel que f est dérivable en α.

Montrer que **si** $f'(\alpha) = 0$ **alors** f admet un minimum global en α.

Faire un schéma.

Indication p. 852

Exercice 17 (◔★ Le cas essentiel en optimisation)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe telle que $f(x) \to +\infty$ lorsque $x \to \pm\infty$.

Que dire des extrema éventuels de f ?

Faire un schéma.

Indication p. 852

Exercice 18 (◔★ Fonctions convexes sur $\mathbb{R}$ majorées)

1. Déterminer une fonction $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ convexe, majorée et non constante.

Faire un schéma.

2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe et majorée. Montrer que f est constante.

Faire un schéma.

Indication p. 852

Exercice 19 (◔★ Maximum au bord d'une fonction convexe)
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction convexe.

Justifier que f admet un maximum et que ce maximum est atteint en a ou en b.

Faire un schéma.

Indication p. 852

Exercice 20 (◑☆ Unicité dans le TEAF et convexité)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable.

1. On suppose que f est strictement convexe ou strictement concave (cf exercice 12). Montrer que pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ il existe un et unique $c \in]a, b[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Faire un schéma.

2. On suppose que pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ il existe un et unique $c \in]a, b[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$, $b \mapsto \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ est strictement monotone.

Faire un schéma.

Conclure que f est strictement convexe ou strictement concave.

Indication p. 852

Convexité et inégalités

Exercice 21 (◔☆ Une forme souvent utile de l'inégalité de convexité)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe et $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k) \geq nf\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right).$$

Indication p. 852

Exercice 22 (◔★♣ Révisions: IHGAQ par convexité)
Soit $(x_1, ..., x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$.

Montrer que

$$\frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k}} \leq \left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k \leq \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k^2}.$$

Indication p. 852

Exercice 23 (◑★ Révisions : Inégalité de Hölder)
Pour $r \in [1, +\infty[$ et $f \in \mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{C})$ on note

$$\|f\|_r = \left(\int_a^b |f(t)|^r \, \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{r}}.$$

Soient $p, q \in]1, +\infty[$ tels que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

1. Démontrer une inégalité de Young: pour tous $(a,b) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$,

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q.$$

2. Soient $f, g \in \mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{R})$.

On suppose que $\|f\|_p = 1$ et $\|g\|_q = 1$.

Montrer que $\|fg\|_1 \leq 1$.

3. Soient $f, g \in \mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{C})$.

Démontrer *l'inégalité de Hölder*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Indication p. 852

Exercice 24 (◑★ Révisions : Une inégalité de Minkowski)
On utilise les notations de l'exercice 23.

Montrer que pour toutes fonctions $f, g \in \mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{C})$,

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Indication p. 853

Exercice 25 (◔★ Révisions: inégalité de Jensen)
Soit $\varphi : I \to \mathbb{R}$ convexe et $f \in \mathcal{C}^0_{pm}([a,b], I)$.

Montrer que

$$\varphi\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi(f(t))\,\mathrm{d}t.$$

Indication p. 853

Exercice 26 (◔★ Introduction à l'entropie de Shannon)

1. Montrer que la fonction

$$\begin{aligned} f :]0,+\infty[&\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x\ln(x) \end{aligned}$$

admet un prolongement par continuité en 0 et représenter graphiquement ce prolongement.

Dans la suite on utilisera la convention $0\ln(0) = 0$.

Soient $(p_1, ..., p_n) \in [0,1]^n$ tels que $\sum_{k=1}^n p_k = 1$.

2. Montrer que pour tout $(q_1, ..., q_n) \in]0,1]^n$ tel que $\sum_{k=1}^n q_k = 1$ on a

$$\sum_{k=1}^n p_k \ln\left(\frac{p_k}{q_k}\right) \geq 0.$$

3. En déduire que

$$0 \leq -\sum_{k=1}^n p_k \ln(p_k) \leq \ln(n)$$

et commenter les cas d'égalité.

Indication p. 853

Exercice 27 (◑★ Polygones de périmètre maximal)
Soit $n \geq 3$.

1. Soit $(\theta_0, ..., \theta_{n-1}) \in [0, 2\pi]^n$ tels que

$$\sum_{k=0}^{n-1} \theta_k = 2\pi.$$

Montrer que

$$\sum_{k=0}^{n-1} 2\sin\left(\frac{\theta_k}{2}\right) \leq 2n\sin\left(\frac{\pi}{n}\right),$$

et déterminer le cas d'égalité.

2. Parmi tous les polygones à n côtés inscrits dans un cercle, déterminer ceux de périmètre maximal (si ils existent).

Faire un schéma.

Indication p. 853

Exercice 28 (◔★ Une majoration d'exponentielle)
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $M > 0$.

Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, |x| \leq M \Rightarrow e^{\lambda x} \leq \frac{\mathrm{sh}(\lambda M)}{M} x + \mathrm{ch}(\lambda M).$$

Indication p. 853

Exercice 29 (◕☆ Inégalité de Hölder un peu plus générale)
Soit $\omega \in \mathcal{C}^0([a,b],]0,+\infty[)$ et $r \in [1,+\infty[$.

Pour $f \in \mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{C})$ on pose (cf exercice 23)

$$\|f\|_{r,\omega} = \left(\int_a^b |f(t)|^r \ \omega(t) \, \mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{r}}$$

et on pose aussi

$$\|f\|_{\infty,\omega} = \sup_{t \in [a,b]} (|f(t)|).$$

Soient $f, g \in \mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{C})$.

Montrer que pour tous $(r,p,q) \in [1,+\infty]^3$ tels que

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$$

$$\|fg\|_{r,\omega} \leq \|f\|_{p,\omega} \|g\|_{q,\omega}.$$

Indication p. 853

Exercice 30 (◑☆ Multi-Hölder)
On utilise les mêmes notations que dans l'exercice 23.

Soient $p_1, p_2, ..., p_n \in]1,+\infty[$ tels que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{p_k} = 1$ et soient $f_1, f_2, ..., f_n \in \mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{C})$.
Montrer que

$$\| \prod_{k=1}^n f_k \|_1 \leq \prod_{k=1}^n \|f_k\|_{p_k}.$$

Indication p. 853

Exercice 31 (◕★ IAG généralisée)
Soient $(x_1, ..., x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ et $(p_1, ..., p_n) \in]0,1]^n$ tels que $\sum_{k=1}^n p_k = 1$.

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^*$ on pose

$$N(\alpha) = \left(\sum_{k=1}^n p_k x_k^\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

1. Montrer que N est continue sur $\mathbb{R}^*$ et prolongeable par continuité en 0 par

$$N(0) = \prod_{k=1}^n x_k^{p_k}.$$

On note N le prolongement par continuité.

2. Montrer que N est croissante.

3. Montrer que si les $x_1, ..., x_n$ ne sont pas tous égaux alors N est strictement croissante.

Indication p. 853

Exercice 32 (◑★ Sous-additivité de la moyenne géométrique)
Soient $x_1, ..., x_n \in]0, +\infty[$ et $y_1, ..., y_n \in]0, +\infty[$.

Montrer que

$$\left(\prod_{k=1}^n x_k\right)^{\frac{1}{n}} + \left(\prod_{k=1}^n y_k\right)^{\frac{1}{n}} \leq \left(\prod_{k=1}^n (x_k + y_k)\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Indication p. 853

Exercice 33 (◑★ Inégalités de convexité en vrac)

1. Montrer que pour tous $x_1, x_2 \in]1, +\infty[$,

$$\ln\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \geq \sqrt{\ln(x_1)\ln(x_2)}.$$

2. Montrer que pour tous $(x_1, ..., x_n) \in (0, +\infty)^n$, en notant $S = \sum_{k=1}^n x_k$,

$$\sum_{k=1}^n \left(x_k + \frac{1}{x_k}\right)^2 \geq n\left(\frac{S^2}{n^2} + 2 + \frac{n^2}{S^2}\right).$$

3. Montrer, sans utiliser la formule de Stirling, que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n.$$

Indication p. 853

Exercice 34 (◑☆ Une inégalité de convexité avec des signes !)
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ convexe, $n \in \mathbb{N}$, et $x_0 < x_1 < ... < x_{2n}$ des éléments de I.

1. Montrer que

$$\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k x_k \in I.$$

2. Montrer que

$$f\left(\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k x_k\right) \leq \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k f(x_k).$$

Indication p. 854

Exercice 35 (◑★ Quelle est la fonction ?)
Soient $y_1, ..., y_n \in]1, +\infty[$.

Montrer que

$$\frac{1}{1 + \left(\prod_{k=1}^n y_k\right)^{\frac{1}{n}}} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + y_k}.$$

Indication p. 854

Exercice 36 (◑★ Inégalités géométriques)
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ convexe, interpréter géométriquement chacune des fonctions suivantes et étudier leurs monotonies.

1. pour $h \in]0, b - a[$,

$$\begin{aligned} [a, b-h] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \end{aligned}$$

Faire un schéma.

2.

$$\begin{aligned} [a, b] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{f(x) + f((a+b) - x)}{2} \end{aligned}$$

Faire un schéma.

Indication p. 854

Exercice 37 (◔☆ Inégalité géométrique: moyenne des pentes)
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ convexe.

Étudier la monotonie de la fonction

$$\begin{aligned}]a,b[&\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{2}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a} + \frac{f(b)-f(x)}{b-x}\right). \end{aligned}$$

Faire un schéma.

Indication p. 854

Exercice 38 (◑★ Une version un peu plus générale de Jensen)
Soit $\omega \in \mathcal{C}^0_{pm}([a,b],\mathbb{R}_+)$ tel que $\int_a^b \omega(t)\,\mathrm{d}t = 1$.

Soient $\phi : I \to \mathbb{R}$ convexe et $f \in \mathcal{C}^0_{pm}([a,b],I)$.

Montrer que

$$\phi\left(\int_a^b f(t)\omega(t)\,\mathrm{d}t\right) \leq \int_a^b \phi(f(t))\omega(t)\,\mathrm{d}t.$$

Indication p. 854

Exercice 39 (◕☆ Une version abstraite de Jensen)
Soit $L \in \mathcal{L}(\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R}),\mathbb{R})$ une forme linéaire. On suppose de plus que L est positive, c'est à dire que pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ telle que $f \geq 0$ on a $L(f) \geq 0$, et de masse totale 1 c'est à dire que $L\left(1_{[a,b]\to\mathbb{R}}\right) = 1$.

Soit $\varphi : I \to \mathbb{R}$ convexe et $f \in \mathcal{C}^0([a,b],I)$.

Montrer que

$$\varphi(L(f)) \leq L(\varphi \circ f).$$

Indication p. 854

Exercice 40 (●☆ Inégalité de Popoviciu pondérée)
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ convexe, $(x_1,x_2,x_3) \in I^3$ et $(p_1,p_2,p_3) \in (0,+\infty)^3$.

Montrer que

$$\frac{p_1 f(x_1)+p_2 f(x_2)+p_3 f(x_3)}{p_1+p_2+p_3} + f\left(\frac{p_1x_1+p_2x_2+p_3x_3}{p_1+p_2+p_3}\right) \geq \frac{(p_2+p_3)f\left(\frac{p_2x_2+p_3x_3}{p_2+p_3}\right)+(p_1+p_3)f\left(\frac{p_1x_1+p_3x_3}{p_1+p_3}\right)+(p_1+p_2)f\left(\frac{p_1x_1+p_2x_2}{p_1+p_2}\right)}{p_1+p_2+p_3}.$$

Indication p. 854

Exercice 41 (◔☆ Juste l'IAG)
Soient $(x_1, ..., x_n) \in (0, +\infty)^n$ et $\sigma \in S_n$ une permutation.

Montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{x_{\sigma(k)}} \geq n.$$

Indication p. 854

Exercice 42 (◑☆ La normalisation change le sens)
Soit $(x_1, ..., x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$.

Montrer que

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_+^* &\to \mathbb{R} \\ \alpha &\mapsto \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^\alpha \right)^{\frac{1}{\alpha}} \end{aligned}$$

est décroissante.

Indication p. 854

Exercice 43 (◔★ Un classique: l'inégalité de Nesbitt)
Soient $x, y, z \in]0, +\infty[$.

Montrer de deux manières différentes que

$$\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} \geq \frac{3}{2}.$$

Indication p. 854

Exercice 44 (◑★ Une inégalité de Kantorovitch)
Soient $m, M \in \mathbb{R}$ tels que $0 < m < M$.

1. Montrer que

$$\forall x \in [m, M], \frac{1}{x} \leq \frac{m+M}{mM} - \frac{1}{mM}x.$$

2. En déduire que pour tous $x_1, ..., x_n \in [m, M]$, et $t_1, ..., t_n \in [0, 1]$ tels que $\sum_{k=1}^{n} t_k = 1$,

$$\left(\sum_{k=1}^{n} t_k x_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} t_k \frac{1}{x_k}\right) \leq \frac{(m+M)^2}{4mM}.$$

Indication p. 855

Exercice 45 (◔★ Mini inégalité de Karamata)
Soient $f : I \to \mathbb{R}$ convexe et $(x_0, x_1), (y_0, y_1) \in I^2$ tels que $x_0 \geq x_1$, $y_0 \geq y_1$, $x_0 \leq y_0$ et $x_0 + x_1 = y_0 + y_1$.

Montrer que

$$f(x_0) + f(x_1) \leq f(y_0) + f(y_1).$$

Indication p. 855

Convexité et étude de fonctions

Exercice 46 (◑★ Un exercice flou qui en résume beaucoup d'autres)
Déterminer et tracer les trois tableaux de variations possibles pour une fonction convexe sur un intervalle, faire un schéma et démontrer ce résultat.

Indication p. 855

Exercice 47 (◔★ Limites en l'infini)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe.

On suppose que f n'est pas décroissante.

Montrer que

$$f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Indication p. 855

Exercice 48 (◔★ Asymptotes de fonctions convexes)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe.

1. Montrer qu'il existe $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ telle que
$$\frac{f(x)}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}.$$
Faire un schéma et énoncer une propriété similaire pour la limite en $-\infty$.
2. On suppose désormais que $\ell \in \mathbb{R}$.
Montrer qu'il existe $\beta \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ tel que
$$f(x) - \ell x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \beta \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}.$$
Faire un schéma et énoncer une propriété similaire en $-\infty$.
3. On suppose désormais que $\beta \in \mathbb{R}$.
Montrer que
$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq (\ell x + \beta).$$
Faire un schéma et énoncer une propriété similaire en $-\infty$.

Indication p. 855

Exercice 49 (◔★♠ La régularité à l'intérieur)
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe.

1. Soient $a, b \in \mathring{I}$ tels que $a < b$. Montrer que $f_{|[a,b]}$ est lipschitzienne.
2. Soit $a \in \mathring{I}$. Montrer que f est dérivable à droite et à gauche en a et que $f'_g(a) \leq f'_d(a)$.

Indication p. 855

Exercice 50 (◔★ Ce qui se passe aux bords)
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction convexe.

1. Redémontrer que f est continue en tout point $c \in]a, b[$.
2. Montrer que f admet une limite à droite en a (resp. à gauche en b) et que
$$f(a) \geq \lim_{\substack{x\to a\\x>a}} f(x), \lim_{\substack{x\to b\\x<b}} f(x) \leq f(b)$$
et faire un schéma.

Indication p. 855

Exercice 51 (◔★ TVI et convexité)
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et convexe.

On suppose $f(a)f(b) < 0$.

Montrer que f admet un et unique zéro dans $[a, b]$.

Faire un schéma.

Indication p. 855

Exercice 52 (◔☆ Un encadrement par trois points)
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction convexe.

On pose $M = \max(f(a), f(b))$.

Montrer que pour tout $x \in [a, b]$,

$$2f\left(\frac{a+b}{2}\right) - M \leq f(x) \leq M.$$

Faire un schéma.

Indication p. 855

Exercice 53 (◔★ Limite simple de fonctions convexes)
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions convexes de I vers $\mathbb{R}$.

On suppose que pour tout $x \in I$, la suite de réels $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge et on note

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x).$$

Montrer que f est convexe.

Indication p. 856

Exercice 54 (◔★ Convexité et trapèzes: Hermite-Hadamard)
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction convexe.

Montrer que

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leq \frac{1}{2}(f(a) + f(b)).$$

Faire un schéma.

Indication p. 856

Exercice 55 (◑★ La méthode de la fleur)
Soit $f \in \mathcal{C}^1(]0,+\infty[)$ concave et croissante.

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\frac{f(k)+f(k+1)}{2} \leq \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leq f(k) + \frac{((k+1)-k)}{2} f'(k).$$

Faire un schéma.

2. En déduire qu'il existe $C_f \in \mathbb{R}$ tel que

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = \int_1^n f(t)\,\mathrm{d}t + \frac{f(n)}{2} + C_f + o_{n\to+\infty}(1).$$

Faire un schéma.

3. Quelle formule obtient-on pour $f = \ln$?

Indication p. 856

Exercice 56 (◑★ Une application de Hermite-Hadamard)
Soit $f \in \mathcal{C}^2([a,b],\mathbb{R})$.

On pose $m = \min_{[a,b]} f''$ et $M = \max_{[a,b]} f''$.

1. Montrer que

$$\frac{m}{12}(b-a)^2 \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leq \frac{M}{12}(b-a)^2.$$

2. Montrer que

$$\frac{m}{24}(b-a)^2 \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{M}{24}(b-a)^2.$$

Indication p. 857

Exercice 57 (◔☆ Monotonies et asymptotes)
Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ convexe telle que $f(0) \leq 0$.

Montrer que

$$\begin{aligned}]0,+\infty[&\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{f(x)}{x} \end{aligned}$$

est croissante.

Faire un schéma.

Indication p. 857

Exercice 58 (◑★ Sous-additivité)
Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}_+$ concave et **positive**.

Montrer que f est sous-additive c'est à dire

$$\forall (x, y) \in [0, +\infty[\times [0, +\infty[, f(x + y) \leq f(x) + f(y).$$

Indication p. 857

Exercice 59 (◑☆ Encore des asymptotes de fonctions convexes)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe et dérivable.

Montrer qu'il existe $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ telle que

$$\frac{f(x)}{x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \ell$$

puis que

$$f'(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \ell.$$

Indication p. 857

Exercice 60 (◑☆ Re-encore des asymptotes de fonctions convexes)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe.

Montrer que si

$$f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ et } f(x) \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} 0$$

alors f est constante.

Indication p. 857

Exercice 61 (◑★ Convexe et périodique ?)
Déterminer toutes les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ convexes et périodiques.

Indication p. 857

Exercice 62 (◕☆ Dérivée de fonctions convexes dérivables)
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ convexe et dérivable.

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$.

Indication p. 857

Exercice 63 (◕★ Convergence uniforme sur tout segment intérieur et fonctions convexes)
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions convexes sur I. On suppose que pour tout $x \in I$, la suite de réels $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge et on note $f(x)$ sa limite (on dit alors que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f).

Montrer que pour tout segment $[a,b] \subset \mathring{I}$

$$\sup_{t\in[a,b]} (|f_n(t) - f(t)|) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

et faire un schéma (on dit alors que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment vers f).

Indication p. 857

Exercice 64 (◔☆ Polynômes et convexité)
On dit que $P \in \mathbb{R}[X]$ est convexe ssi la fonction polynomiale associée est convexe.

1. Que dire des polynômes de $\mathbb{R}_1[X]$ en termes de convexité ?
2. Soit P un polynôme de degré supérieur ou égal à 2 convexe.

   Montrer que $\deg(P)$ est pair et que le coefficient dominant de P est positif.
3. Donner un exemple de polynôme de degré pair et de coefficient dominant positif non convexe.

Indication p. 857

Exercice 65 (◑★ Convexité et polynômes de Bernstein)
Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ convexe et continue.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k}.$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} [0,1] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto B_n(x) \end{aligned}$$

est convexe.

Indication p. 857

Convexité et convexité

Exercice 66 (◔★♠ Précision sur les inégalités de pentes limites)
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ convexe.

On rappelle que f est dérivable à droite et à gauche en tout point intérieur (cf exercice 49).

Soit $(a, b) \in \left(\mathring{I}\right)^2$ tel que $a < b$.

Montrer que

$$f'_g(a) \leq f'_d(a) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq f'_g(b) \leq f'_d(b).$$

Indication p. 858

Exercice 67 (◑☆ Fonctions continues convexes et dyadiques)
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ **continue**.

Montrer que f est convexe **ssi**

$$\forall (x, y) \in I^2, f\left(\frac{x + y}{2}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2}.$$

Indication p. 858

Exercice 68 (◑★ Une petite transformation)
Soit $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$.

On définit $\tilde{f}$, par

$$\begin{aligned} \tilde{f} :]0, +\infty[&\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x f\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

Montrer que f est convexe ssi $\tilde{f}$ est convexe:

1. Dans le cas où f est deux fois dérivable.
2. Dans le cas général.

Indication p. 858

Exercice 69 (◑★ Convexité et moyennes glissantes)
Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction convexe.

Montrer que

$$\begin{aligned} g :]0, +\infty[&\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

est convexe.

Indication p. 858

Exercice 70 (◔☆ Somme de convexes affine)
Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions convexes.

On suppose que $f + g$ est affine, montrer que f et g sont affines.

Faire un schéma.

Indication p. 858

Exercice 71 (◔☆ Se ramener à $[0, 1]$)
Soit $f : I \to \mathbb{R}$.

Montrer que f est convexe **ssi** pour tout $(x, y) \in I^2$,

$$\begin{aligned} f_{x,y} : [0,1] &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto f(tx + (1-t)y) \end{aligned}$$

est convexe.

Indication p. 858

Exercice 72 (◔★ Réciproque d'une fonction convexe strictement monotone)
Soit $f : I \to J$ convexe, strictement monotone et telle que $J = f(I)$.

Montrer que
- ▹ Si f est strictement croissante alors $f^{-1} : J \to I$ est concave.
- ▹ Si f est strictement décroissante alors $f^{-1} : J \to I$ est convexe.

Faire un schéma.

Indication p. 859

Exercice 73 (◑★ Un critère de convexité)
Soit $f : I \to \mathbb{R}$.

Montrer l'équivalence entre
(i) f est convexe
(ii) pour tout $[a, b] \subset I$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \varphi_\lambda : [a, b] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) + \lambda x \end{aligned}$$

admet un maximum sur $[a, b]$ et ce maximum est atteint en a ou en b

Indication p. 859

Exercice 74 (◑★ Convexité et raccordements)
Soit $f : I \to \mathbb{R}$.

On dit que f est convexe sur un intervalle $J \subset I$ ssi $f_{|J}$ est convexe sur J.

On dit de plus que f est localement convexe ssi pour tout $a \in I$ il existe un voisinage de a sur lequel f est convexe.

1. Donner un exemple de fonction convexe sur deux intervalles non disjoints et non convexe sur leur union.
2. Soient J_1 et J_2 deux intervalles de I tels que $J_1 \cap J_2$ contient au moins deux points.

Montrer que si f est convexe sur J_1 et sur J_2 alors f est convexe sur $J_1 \cup J_2$.
3. En déduire que si f est localement convexe alors f est convexe.

Indication p. 859

Exercice 75 (◕★ Une propriété de la moyenne)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue.

Montrer l'équivalence entre
(i) f est convexe,
(ii) $$\forall x \in \mathbb{R}, \forall h > 0, f(x) \leq \frac{f(x+h) + f(x-h)}{2},$$
(iii) $$\forall x \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists h \in]0, \varepsilon[, f(x) \leq \frac{f(x+h) + f(x-h)}{2}.$$

Indication p. 859

Exercice 76 (◔★ Continuité et convexité à l'intérieur)
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue telle que $f_{|\mathring{I}}$ est convexe.

Montrer que f est convexe.

Indication p. 859

Exercice 77 (◔☆ À faire une fois vu le chapitre déterminant)
Soit $f : I \to \mathbb{R}$.

Montrer que pour tous $a, b, c \in I$ tq $a < b < c$,

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(c) - f(a)}{c - a} \leq \frac{f(c) - f(b)}{c - b}$$

ssi pour tous $a, b, c \in I$ tq $a < b < c$,

$$\begin{vmatrix} 1 & a & f(a) \\ 1 & b & f(b) \\ 1 & c & f(c) \end{vmatrix} \geq 0.$$

Indication p. 859

Exercice 78 (◕☆ Une variation autour du critère sur la dérivée seconde)
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue. On suppose de plus que I est un intervalle ouvert.

Montrer que f est convexe ssi

$$\forall x \in I, \limsup_{h \to 0} \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} \geq 0.$$

Indication p. 859

Exercice 79 (◑★ Une variation autour de la convexité et du laplacien)
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue. On suppose de plus que I est un intervalle ouvert.

Montrer que f est convexe **ssi**

$$\forall x \in I, \forall h > 0 \ \text{ tq } \ [x-h, x+h] \subset I, f(x) \leq \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Indication p. 859

Exercice 80 (◕☆ Dérivée à droite suffit)
Soit $f : I \to \mathbb{R}$. On suppose de plus que I est un intervalle ouvert.

Montrer que f est convexe **ssi** f est continue, dérivable à droite, de dérivée à droite croissante.

Indication p. 860

Exercice 81 (◕☆ Fonctions fortement convexes)
Soit $f : I \to \mathbb{R}$.

Soit $\varepsilon > 0$.

1. Montrer l'équivalence entre
(i) on a l'inégalité de forte convexité

$$\forall (x,y) \in I^2,\ \forall t \in [0,1],\ f(tx+(1-t)y) \leq tf(x)+(1-t)f(y) - \frac{\varepsilon}{2}t(1-t)(x-y)^2.$$

(ii) la fonction

$$\begin{aligned} I &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) - \frac{\varepsilon}{2}x^2 \end{aligned}$$

est convexe.

Dans ce cas on dit que f est ε-fortement convexe.

2. Supposons que f est ε-fortement convexe.

Montrer que pour tous $(x_1, x_2, ..., x_n) \in I^n$ et $(t_1, t_2, ..., t_n) \in [0,1]^n$ tels que $\sum_{i=1}^n t_i = 1$, on a

$$f\left(\sum_{i=1}^n t_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n t_i f(x_i) - \frac{\varepsilon}{2}\sum_{i=1}^n t_i \left(x_i - \sum_{k=1}^n t_k x_k\right)^2.$$

3. Supposons que f est deux fois dérivable.

Montrer que f est ε-fortement convexe ssi pour tout $x \in I$, $f''(x) \geq \varepsilon$.

Indication p. 860

Thème: log-convexité

Soit $f : I \to \mathbb{R}_+^*$.

On dit que f est *log-convexe* ssi $\ln \circ f : I \to \mathbb{R}$ est convexe.

Exercice 82 (◑★ Fonctions log-convexes: le début)

1. Montrer que toute fonction log-convexe est convexe.

2. Donner un exemple de fonction convexe qui n'est pas log-convexe.

3. Soit $f : I \to \mathbb{R}_+^*$. Montrer l'équivalence entre

(i) f est log-convexe

(ii) pour tout $\alpha > 0$, $x \mapsto \alpha^x f(x)$ est convexe

(iii) pour tous $(x, y) \in I^2$ et $t \in [0, 1]$,

$$f(tx + (1-t)y) \leq (f(x))^t (f(y))^{1-t}.$$

Indication p. 860

Exercice 83 (◔☆ Caractérisation par la dérivée seconde de la log-convexité)
Soit $f \in \mathcal{D}^2(I, \mathbb{R}_+^*)$.

Montrer que f est log-convexe ssi pour tout $x \in I$,

$$f(x)f''(x) \geq (f'(x))^2.$$

Indication p. 860

Exercice 84 (◑★ Fonctions log-convexes: une caractérisation)
Soit $f : I \to \mathbb{R}_+^*$.

Montrer que f est log-convexe **ssi** pour tout $\alpha > 0$, f^α est convexe.

Indication p. 860

Exercice 85 (◑☆ Fonctions log-convexes: opérations)

1. Montrer que le produit de deux fonctions log-convexes est log-convexe.

2. Montrer que la somme de deux fonctions log-convexes est log-convexe.

Indication p. 860

Exercice 86 (◔☆ Un cas particulier de log-convexité)
Soient $a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}_+^*$ des réels strictement positifs et $\lambda_1, ..., \lambda_n$ des réels.

Montrer que

$$\begin{aligned}\mathbb{R} &\to \mathbb{R}\\ x &\mapsto \ln\left(\sum_{k=1}^{n} a_k e^{\lambda_k x}\right)\end{aligned}$$

est convexe.

Indication p. 860

Exercice 87 (◔☆ Log-concavité et coefficients binomiaux)

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la suite $\left(\binom{n}{k}\right)_{k\in[\![0,n]\!]}$ est log-concave, c'est à dire que

$$\forall k \in [\![1, n-1]\!], \binom{n}{k}^2 \geq \binom{n}{k-1}\binom{n}{k+1}.$$

2. Soit $k \in \mathbb{N}$. Pour $x \in \mathbb{R}$ on note $\binom{x}{k} = \frac{x(x-1)\cdots(x-k+1)}{k!}$.

Montrer que la fonction

$$\begin{aligned}[k, +\infty[&\to \mathbb{R}\\ x &\mapsto \binom{x}{k}\end{aligned}$$

est log-concave et convexe.

Indication p. 861

Exercice 88 (◉☆ Log-concavité des fonctions symétriques moyennées: inégalité de Newton)
Pour $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}$, et $k \in [\![0, n]\!]$ on pose $E_k(x_1, ..., x_n)$ la k-ième fonction symétrique élémentaire normalisée par son nombre de termes c'est à dire

$$E_k(x_1, ..., x_n) = \frac{1}{\binom{n}{k}} \sum_{\substack{I \subset [\![1,n]\!] \\ |I| = k}} \prod_{i \in I} x_i.$$

1. Soient $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}$ tous non nuls. Exprimer la suite $\left(E_k\left(\frac{1}{x_1}, ..., \frac{1}{x_n}\right)\right)_{k \in [\![1,n]\!]}$ en fonction de la suite $(E_k(x_1, ..., x_n))_{k \in [\![1,n]\!]}$.
2. Soient $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $y_1, ..., y_{n-1} \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $E_k(x_1, ..., x_n) = E_k(y_1, ..., y_{n-1})$.
3. Soient $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}$.

   Montrer que la suite $(E_k(x_1, ..., x_n))_{k \in [\![0,n]\!]}$ est log-concave, c'est à dire que pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$,

$$E_k(x_1, ..., x_n)^2 \geq E_{k-1}(x_1, ..., x_n) E_{k+1}(x_1, ..., x_n).$$

Indication p. 861

Exercice 89 (◑☆ Une généralisation de l'IAG: inégalités de Maclaurin)
On réutilise les notations de l'exercice 88 et on admet le résultat de cet exercice.

Soient $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}_+$. Montrer que

$$(E_n(x_1, ..., x_n))^{\frac{1}{n}} \leq (E_{n-1}(x_1, ..., x_n))^{\frac{1}{n-1}} \leq \cdots \leq (E_2(x_1, ..., x_n))^{\frac{1}{2}} \leq E_1(x_1, ..., x_n).$$

Indication p. 861

Thème culturel: transformée de Legendre-Fenchel

Exercice 90 (◔☆ Cas particulier d'inégalités de Young)

1. Soient $p, q \in]1, +\infty[$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Montrer que pour tout $x, y \in \mathbb{R}_+$,

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}.$$

2. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ strictement croissante et bijective.

Montrer que pour tout $x, y \in \mathbb{R}_+$,

$$xy \leq \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^y f^{-1}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Faire un schéma.

3. Redémontrer la question 1 à l'aide de la question 2.

Indication p. 861

Exercice 91 (◑★ Enveloppe convexe et fonction)
Soit $f : I \to \mathbb{R}$.

On suppose que f est minorée.

Montrer qu'il existe une (et unique) plus grande fonction convexe plus petite que f, c'est à dire une (et unique) fonction $\tilde{f}$ telle que

- $\tilde{f} : I \to \mathbb{R}$ convexe,
- $\tilde{f} \leq f$,
- pour toute fonction convexe g, $g \leq f \Rightarrow g \leq \tilde{f}$.

Faire un schéma.

Commenter l'hypothèse de minoration.

Indication p. 861

Soit $f : I \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

On dit que f est convexe ssi pour tous $x, y \in I$ et $t \in [0, 1]$,

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y).$$

Avec la convention $0 \times +\infty = 0$.

Exercice 92 (◔☆ Domaine d'une fonction convexe)
Soit $f : I \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

On appelle domaine de f l'ensemble

$$\mathrm{Dom}(f) = \{x \in I \mid f(x) < +\infty\}.$$

Montrer que $f : I \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est convexe **ssi**
- ▷ $\mathrm{Dom}(f)$ est un intervalle
- ▷ $f_{|\mathrm{Dom}(f)} : \mathrm{Dom}(f) \to \mathbb{R}$ est convexe.

Faire un schéma.

Indication p. 861

Pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ non identiquement $+\infty$, on définit sa transformée de Legendre-Fenchel, notée $f^* : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$; par

$$\forall p \in \mathbb{R},\ f^*(p) = \sup_{x \in \mathbb{R}} (px - f(x)).$$

Exercice 93 (◔★ Premières constatations)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ non identiquement $+\infty$.

1. Commenter la bonne définition de f^*.
2. Montrer que f^* est convexe.
3. Soit g non identiquement $+\infty$ telle que $f \leq g$. Montrer que $f^* \geq g^*$.

Indication p. 862

Exercice 94 (◑☆ Des calculs explicites)
Calculer la transformée de Legendre-Fenchel des fonctions suivantes:
1. $x \mapsto \rho x$ pour $\rho \in \mathbb{R}$,
2. $x \mapsto \eta x^2$ pour $\eta > 0$,
3. $x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in A \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$ pour $A \subset \mathbb{R}$

Indication p. 862

Exercice 95 (◔★ Cas d'une fonction régulière)
Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ strictement convexe.

Déterminer une expression explicite de f^*.

Faire un schéma.

Indication p. 862

Exercice 96 (◑★ Inégalité de Young)

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ non identiquement $+\infty$.

Montrer que pour tout $x, p \in \mathbb{R}$,

$$px \leq f(x) + f^*(p).$$

2. Que donne cette inégalité pour les fonctions suivantes:

- ▷ $f : x \mapsto \eta x^2$ pour $\eta > 0$,
- ▷ $f : x \mapsto |x|^p$ pour $p > 1$,
- ▷ $F : x \mapsto \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ où $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ strictement croissante et bijective.

Indication p. 862

Exercice 97 (◕★ Bidualité de Fenchel-Legendre)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

1. Montrer que $f^{**} \leq f$.

2. On suppose que f est convexe. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ il existe $p \in \mathbb{R}$ tel que $f^*(p) = px - f(x)$.

3. En déduire que si f est convexe alors $f^{**} = f$.

4. Montrer que de manière générale f^{**} est la plus grande fonction convexe minorant f (cf exercice 91).

Indication p. 862

Exercice 98 (◑☆ Transformée de Fenchel et opérations)

1. Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ non identiquement $+\infty$.

Montrer que pour tout $t \in [0,1]$,

$$(tf + (1-t)g)^* \leq tf^* + (1-t)g^*.$$

2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ non identiquement $+\infty$ et $(a,b) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. Montrer que

$$(x \mapsto f(ax+b))^* = \left(p \mapsto f^*\left(\frac{p}{a}\right) - b\frac{p}{a}\right)$$

et

$$(x \mapsto af(x)+b)^* = \left(p \mapsto af^*\left(\frac{p}{a}\right) - b\right).$$

3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ non identiquement $+\infty$ et $\gamma \in \mathbb{R}$.

Montrer que

$$(x \mapsto f(x) + \gamma x)^* = (p \mapsto f^*(p-\gamma))$$

et

$$(x \mapsto f(x-\gamma))^* = (p \mapsto f^*(p) + \gamma p).$$

Indication p. 862

Exercice 99 (◉☆ Épi-somme ou inf-convolution)

Pour $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ non identiquement $+\infty$, on définit leur épi-somme ou inf-convolution par

$$\begin{aligned}(f \square g) : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} \\ x &\mapsto \inf_{y \in \mathbb{R}} (f(y) + g(x-y))\end{aligned}$$

1. Montrer que $\square$ définit une loi de composition interne commutative sur l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ non identiquement $+\infty$ et minorées.

2. Soient f, g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ non identiquement $+\infty$, convexes et minorées.

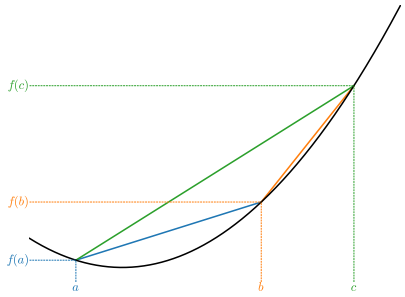
Montrer que

$$(f \square g)^* = f^* + g^*.$$

Indication p. 862

Indications

Indication 1 · Énoncé p. 818 (À savoir refaire: inégalité des trois pentes)



Cf cours, on rappelle que

$$b = \frac{c-b}{c-a}a + \frac{b-a}{c-a}c$$

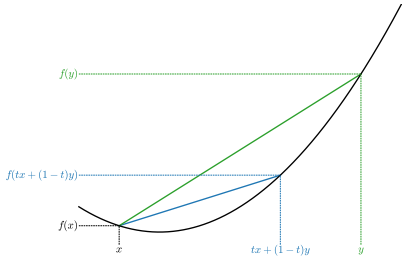
et que le schéma **essentiel** de ce chapitre est le suivant:

Indication 2 · Énoncé p. 818 (Inégalités de tangence)
RAS.

Indication 3 · Énoncé p. 818 (Se ramener à tout segment)
La restriction d'une fonction convexe est convexe.

Pour tous $(x,y) \in I^2$ il existe $[a,b] \subset I$ tel que $(x,y) \in [a,b]^2$.

Indication 4 · Énoncé p. 819 (L'inégalité des deux pentes suffit)



Dans un sens il s'agit de deux des trois pentes de l'inégalité des trois pentes.

Dans l'autre sens écrire pour $(x,y) \in I^2$ et $t \in]0,1[$ constater que sans perte de généralité $x < y$ et alors $x < tx + (1-t)y < y$.

Indication 5 · Énoncé p. 819 (Fonctions convexes et concaves)

1. Immédiat.
2. Observer par exemple que les taux d'accroissements sont croissants et décroissants.

Indication 6 · Énoncé p. 819 (Convexité et additions affines)
Le terme affine disparaît dans l'écriture de l'inégalité de convexité.

Indication 7 · Énoncé p. 819 (Convexité et composées affines)
L'ensemble de définition est $J = \{x \in \mathbb{R} \mid \alpha x + \beta \in I\} = \left\{\frac{y-\beta}{\alpha}, y \in I\right\}$.

Pour la convexité remarquer que $\alpha(tx + (1-t)y) + \beta = t(\alpha x + \beta) + (1-t)(\alpha y + \beta)$.

Indication 8 · Énoncé p. 820 (Opérations et fonctions convexes)
1. Produit des inégalités par un réel positif, puis somme d'inégalités.
2. Croissance puis convexité.
3. Produit d'inégalités positives. Puis étude d'un trinôme du second degré en t.
4. Prendre une fonction convexe non affine et considérer son opposé.
5. Par exemple $x \mapsto (x^2-1)^2$.
6. Par exemple $x \mapsto (x^2-1)^2$.

Indication 9 · Énoncé p. 820 (Convexité et épigraphe)
Cf cours.

Indication 10 · Énoncé p. 820 (Maximum et supremum de fonctions convexes)
Écrire une inégalité «$\leq$».

Le max (resp. sup) étant un majorant, majoré en particulier à droite.

Le max (resp. sup) étant plus petit que tous les majorants, passer au max (resp. au sup) à gauche.

Pour les schémas, interpréter en termes de pentes, ou encore d'épigraphes (l'intersection de convexes est convexe).

On pourra aussi méditer sur l'hypothèse de majoration à la lumière de l'exercice 92.

Indication 11 · Énoncé p. 821 (Minimum local/global d'une fonction convexe)
1. Par exemple une fonction affine, exp, etc.
2. Si par l'absurde il n'est pas global, alors il existe $\beta \in I$ tel que $f(\beta) < f(\alpha)$. Distinguer selon la position relative de α et β et écrire une inégalité des pentes.

Indication 12 · Énoncé p. 821 (Stricte convexité)
Reprendre les preuves du cours.

Attention cas de la dérivée seconde: on obtient seulement que $f'' \geq 0$, le lien entre stricte monotonie et signe de la dérivée n'est pas un signe strict.

Indication 13 · Énoncé p. 821 (Suites convexes)
Il s'agit évidemment des suites convexes.

Indication 14 · Énoncé p. 822 (Sous-différentielle: définition)
1. Faire le schéma pour une fonction convexe non dérivable, par exemple $x \mapsto |x|$ dont la sous-différentielle en 0 est $[-1, 1]$.
2. Cf exercice 66 pour le caractère non vide. Pour montrer qu'il s'agit d'un intervalle montrer qu'il s'agit d'une partie convexe. Pour montrer qu'il s'agit d'un segment montrer qu'il s'agit d'une partie « fermée ».

3. Faire un schéma.
4. Par double inclusion, en remarquant qu'une des deux inclusions se traite par étude locale de $x \mapsto f'(a)(x-a) - \gamma(x-a)$.

Indication 15 · Énoncé p. 822 (Convexité et « tangentes »)
Pour le sens direct voir par exemple les exercices 14 ou 66.

Pour la réciproque remarquer qu'un supremum de fonctions affines est convexe !

Indication 16 · Énoncé p. 822 (Dans le cas convexe c'est suffisant)
Utiliser la monotonie des taux d'accroissements en α (prolongés en la dérivée au point α).

Indication 17 · Énoncé p. 822 (Le cas essentiel en optimisation)
L'ensemble des extrema est un segment (non vide) et ce sont des minima.

Indication 18 · Énoncé p. 823 (Fonctions convexes sur $\mathbb{R}$ majorées)
1. Faire un schéma. Par exemple $x \mapsto e^{-x}$.
2. Supposer f non constante, avec α, β tels que $f(\alpha) \neq f(\beta)$, étudier la position relative de f par rapport à la corde passant par $(\alpha, f(\alpha))$ et $(\beta, f(\beta))$. (Faire un schéma).

Indication 19 · Énoncé p. 823 (Maximum au bord d'une fonction convexe)
Pour tout $x \in [a,b]$ majorer $f(x)$ par la corde entre $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$ et effectuer une disjonction de cas sur le signe de la pente.

Indication 20 · Énoncé p. 823 (Unicité dans le TEAF et convexité)
1. Strictement monotone implique injectif d'où l'unicité. L'existence est le TEAF.
2. Constater que $b \mapsto \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ est continue, et que la non stricte monotonie implique la non injectivité. De deux points ayant la même image faire un schéma et conclure.

Indication 21 · Énoncé p. 824 (Une forme souvent utile de l'inégalité de convexité)
Juste écrire l'inégalité de convexité sur $(x_1, ..., x_n)$ avec des poids uniformes.

Indication 22 · Énoncé p. 824 (Révisions: IHGAQ par convexité)
Utiliser la concavité de ln pour montrer que la moyenne géométrique est plus petite que la moyenne arithmétique.

Appliquer cette inégalité aux inverses puis inverser pour obtenir que la moyenne harmonique est plus petite que la moyenne géométrique.

Utiliser la convexité de $x \mapsto x^2$ pour le terme quadratique.

Indication 23 · Énoncé p. 825 (Révisions : Inégalité de Hölder)
1. Inégalité de concavité de ln.
2. Écrire l'inégalité précédente point par point puis intégrer.
3. Si les fonctions sont non nulles, considérer $\frac{f}{\|f\|_p}$ et $\frac{g}{\|g\|_q}$.

Indication 24 · Énoncé p. 825 (Révisions : Une inégalité de Minkowski)
Appliquer l'inégalité de Hölder à des fonctions bien choisies.

Indication 25 · Énoncé p. 825 (Révisions: inégalité de Jensen)
Au choix soit utiliser des sommes et passer à la limite (sommes de Riemann dans le cas $\mathcal{C}^0_{pm}$) soit écrire que φ est au-dessus d'une tangente (pourquoi une telle tangente existe ?).

Indication 26 · Énoncé p. 826 (Introduction à l'entropie de Shannon)
1. Croissance comparée.
2. Convexité de f aux points $\frac{p_k}{q_k}$.
3. Prendre $q_k = \frac{1}{n}$ pour tout k.

Indication 27 · Énoncé p. 826 (Polygones de périmètre maximal)
1. Écrire l'inégalité de concavité de sin sur $[0, \pi]$.
2. Faire un schéma et utiliser la question précédente.

Indication 28 · Énoncé p. 827 (Une majoration d'exponentielle)
Juste utiliser que exp est en-dessous de ses cordes et calculer l'équation de la corde entre $\left(-M, e^{-\lambda M}\right)$ et $\left(M, e^{\lambda M}\right)$.

Indication 29 · Énoncé p. 827 (Inégalité de Hölder un peu plus générale)
Traiter le cas où un des paramètres est $+\infty$ à part.

Dans le cas général remarquer que $\|f^\alpha\|_\beta = \left(\|f\|_{\alpha\beta}\right)^\alpha$ et utiliser l'inégalité de Hölder démontrée à la question 23 en remarquant que ω ne change rien.

Indication 30 · Énoncé p. 827 (Multi-Hölder)
Au choix: faire un multi-Young: $\prod_{k=1}^n a_k \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{p_k} a_k^{p_k}$ par concavité de ln puis faire comme Hölder ou bien par récurrence en faisant le cas $\omega = 1$ de l'exercice 29.

Indication 31 · Énoncé p. 828 (IAG généralisée)
1. Effectuer un DL_1 pour obtenir le prolongement par continuité.
2. Distinguer selon la position relative de α, β et 0. Se ramener au cas $\alpha = 0 < \beta$ et $\alpha = 1 < \beta$.

   Dans un cas utiliser la concavité de ln, dans l'autre de $t \mapsto t^\gamma$ où $\gamma \in]0, 1]$.

Indication 32 · Énoncé p. 828 (Sous-additivité de la moyenne géométrique)
Se ramener au cas où pour tout k, $x_k = 1$.

Utiliser ensuite la convexité de $x \mapsto \ln(1 + e^x)$.

Alternativement utiliser 31.

Indication 33 · Énoncé p. 828 (Inégalités de convexité en vrac)
1. Concavité de $\ln \circ \ln$.
2. Si nécessaire utiliser l'homogénéité. Puis la convexité de $x \mapsto \left(x + \frac{1}{x}\right)^2$.

3. Concavité de ln.

Indication 34 · Énoncé p. 829 (Une inégalité de convexité avec des signes !)
1. Repérer une combinaison convexe ou bien regrouper les termes deux à deux. Ou encore procéder par récurrence.
2. Si vous ne repérez pas une combinaison convexe, faire une récurrence.

Indication 35 · Énoncé p. 829 (Quelle est la fonction ?)
Convexité de $x \mapsto \frac{1}{1+e^x}$ sur $[0, +\infty[$.

Indication 36 · Énoncé p. 829 (Inégalités géométriques)
Il s'agit de moyenne avec le symétrique par rapport au milieu du segment dans le second cas et de taux d'accroissements dont le point varie dans le premier.

L'étude de la monotonie est immédiate dans le cas dérivable.

Dans le cas général, écrire des inégalités des trois pentes bien choisies.

Indication 37 · Énoncé p. 830 (Inégalité géométrique: moyenne des pentes)
Somme de deux fonctions croissantes.

Indication 38 · Énoncé p. 830 (Une version un peu plus générale de Jensen)
Faire la même preuve que 25 ou bien faire le cas général qu'est l'exercice 39.

Indication 39 · Énoncé p. 830 (Une version abstraite de Jensen)
Faire comme l'inégalité de convexité standard en remarquant que toute fonction convexe est supremum de fonctions affines.

Indication 40 · Énoncé p. 830 (Inégalité de Popoviciu pondérée)
Bon courage avec toutes les inégalités de convexité ! (Cet exercice ne sera pas corrigé).

Indication 41 · Énoncé p. 831 (Juste l'IAG)
Appliquer l'IAG et constater que $\prod \frac{x_k}{x_{\sigma(k)}}$ se calcule bien.

Indication 42 · Énoncé p. 831 (La normalisation change le sens)
Utiliser par exemple la sous-additivité des fonctions concaves (cf exercice 58) et remarquer que si $\alpha \leq \beta$ alors $\xi \mapsto \xi^{\frac{\alpha}{\beta}}$ est concave.

Indication 43 · Énoncé p. 831 (Un classique: l'inégalité de Nesbitt)
Parmi les méthodes possibles:
- ▷ IAG
- ▷ Cauchy-Schwarz
- ▷ IAH
- ▷ Inégalité de réarrangement
- ▷ Par convexité de $t \mapsto \frac{t}{(x+y+z)-t}$ sur $]0, x+y+z[$.

Sachant que toutes ces preuves sont simplifiées par un adimensionnement du problème.

Indication 44 · Énoncé p. 832 (Une inégalité de Kantorovitch)

1. Convexité de la fonction inverse sur $[m, M]$ ou bien tout simplement la fameuse inégalité $(M-x)(x-m) \geq 0$.
2. On connaît le maximum d'un trinôme $(X-a)(b-X)$ (c'est au point milieu).

Indication 45 · Énoncé p. 832 (Mini inégalité de Karamata)
Faire un schéma pour montrer que $f(y_0) - f(x_0) \geq f(x_1) - f(y_1)$.

Indication 46 · Énoncé p. 832 (Un exercice flou qui en résume beaucoup d'autres)
On obtient trois cas possibles:

- ▷ croissant,
- ▷ décroissant,
- ▷ décroissant puis croissant.

Indication 47 · Énoncé p. 832 (Limites en l'infini)
Attention à la bonne négation.

Utiliser deux points pour minorer f par une fonction affine de pente positive.

Indication 48 · Énoncé p. 833 (Asymptotes de fonctions convexes)

1. Fixer $a \in \mathbb{R}$, le taux d'accroissements en a, $\tau_a : x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est croissant. Limite monotone.
2. Quitte à considérer $x \mapsto f(x) - \ell x$ se ramener à $\ell = 0$.

   Comme τ_a est croissant et tend vers 0, il est négatif. En déduire la décroissance de f. Limite monotone.
3. Quitte à considérer $x \mapsto f(x) - (\ell x + \beta)$ se ramener à $\ell = 0, \beta = 0$.

   Remarquer que f est décroissante et tend vers 0 pour étudier son signe.

Indication 49 · Énoncé p. 833 (La régularité à l'intérieur)
Faire des schémas et cf cours.

Indication 50 · Énoncé p. 833 (Ce qui se passe aux bords)

1. Cf le cours.
2. Reprendre la preuve du cours avec seulement un côté.

Indication 51 · Énoncé p. 834 (TVI et convexité)

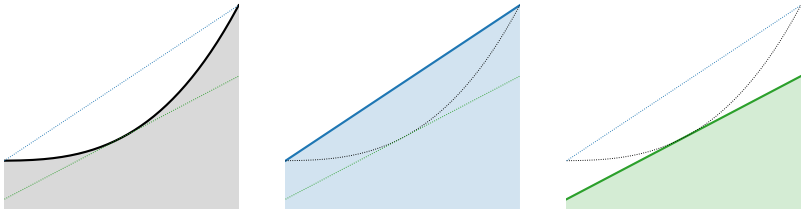
- ▷ L'existence est issue du TVI.
- ▷ Pour l'unicité supposer qu'il en existe 2 et écrire une inégalité des pentes bien choisie.

Indication 52 · Énoncé p. 834 (Un encadrement par trois points)
Faire un schéma et pour la majoration les pentes entre a, x, b, et pour la minoration les pentes entre $\frac{a+b}{2}, x, b$ ainsi que $a, \frac{a+b}{2}, x$.

Indication 53 · Énoncé p. 834 (Limite simple de fonctions convexes)
PLIL de l'ineg. conv.

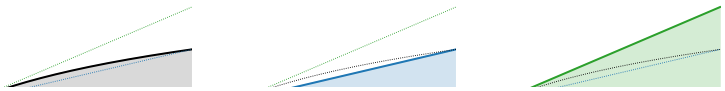
Indication 54 · Énoncé p. 834 (Convexité et trapèzes: Hermite-Hadamard)
La fonction f est majorée par la fonction affine passant par $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$. Intégrer cette inégalité.

La fonction f est minorée par une fonction affine passant par $\left(\frac{a+b}{2}, f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)$. Intégrer cette inégalité.

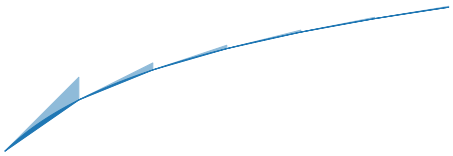


Indication 55 · Énoncé p. 835 (La méthode de la fleur)

1. Interpréter comme une aire comprise entre deux trapèzes.



2. Commencer par faire un schéma.



Remarquer que l'erreur totale (somme des petites erreurs) est croissante par l'inégalité précédente, et majorée par télescopage en fleur (décroissance des pentes).

Cf les schémas.



3. On obtient la formule de Stirling sans la valeur de la constante de Stirling $\ln\left(\sqrt{2\pi}\right)$ (ici $C_f = \ln\left(\sqrt{2\pi}\right) - 1$).

Indication 56 · Énoncé p. 835 (Une application de Hermite-Hadamard)
Remarquer que $x \mapsto f(x) - \frac{mx^2}{2}$ est convexe ainsi que $x \mapsto \frac{Mx^2}{2} - f(x)$.

Appliquer l'exercice 54.

Indication 57 · Énoncé p. 835 (Monotonies et asymptotes)
Inégalité des pentes entre $0, x, y$ pour $0 < x < y$ et constater que $f(0)\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)$ a un signe.

Indication 58 · Énoncé p. 836 (Sous-additivité)
Se ramener au cas $f(0) = 0$.

Montrer que $\frac{f(x+y)}{x+y} \leq \frac{f(x)}{x}$ et $\frac{f(x+y)}{x+y} \leq \frac{f(y)}{y}$ puis faire une combinaison de ces deux inégalités.

Indication 59 · Énoncé p. 836 (Encore des asymptotes de fonctions convexes)
Utiliser les taux d'accroissements.

Indication 60 · Énoncé p. 836 (Re-encore des asymptotes de fonctions convexes)
Regarder encore les taux d'accroissements.

Indication 61 · Énoncé p. 836 (Convexe et périodique ?)
Il n'y a que les constantes. Le démontrer (plein de méthodes possibles).

Indication 62 · Énoncé p. 836 (Dérivée de fonctions convexes dérivables)
Par le théorème de Darboux f' vérifie la propriété des valeurs intermédiaires. De plus f' est croissante.

En déduire (cf cours sur la continuité) que f' est continue.

Indication 63 · Énoncé p. 837 (Convergence uniforme sur tout segment intérieur et fonctions convexes)
Étant fixé $[a, b]$ montrer que toutes les f_n sont lipschitziennes de même constante de Lipschitz.

Conclure la convergence uniforme.

Indication 64 · Énoncé p. 837 (Polynômes et convexité)

1. Les fonctions affines sont convexes.

2. La dérivée seconde doit être positive sur $\mathbb{R}$.

3. Il n'y a pas de contre-exemple de degré 2. Pour le degré 4 faire un schéma de $X^4 - \alpha X^2$.

Indication 65 · Énoncé p. 837 (Convexité et polynômes de Bernstein)
En dérivant deux fois et par formule de la capitaine et réindexation on obtient (pour $n \geq 2$)

$$B_n'' = n(n-1)\sum_{k=0}^{n-2}\left(f\left(\frac{k+2}{n}\right) - 2f\left(\frac{k+1}{n}\right) + f\left(\frac{k}{n}\right)\right)\binom{n-2}{k}X^k(1-X)^{n-2-k}.$$

Remarque: vous verrez probablement l'année prochaine que la suite des fonctions polynomiales $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f (sur le segment $[0,1]$) si f est continue. Ainsi cet exercice montre que «toute fonction convexe continue sur un segment est limite uniforme de fonctions polynomiales convexes».

Indication 66 · Énoncé p. 838 (Précision sur les inégalités de pentes limites)
Reprendre la preuve du cours en gardant toutes les inégalités.

Indication 67 · Énoncé p. 838 (Fonctions continues convexes et dyadiques)
Le sens direct est immédiat.

Pour le sens réciproque, à $x, y \in I$ fixés montrer par récurrence sur n que l'inégalité de convexité est vérifiée pour tout t de la forme $\frac{p}{2^n}$ et conclure par densité des dyadiques et continuité de f.

Proposer un exemple de fonction non continue vérifiant la condition mais non convexe, par exemple vérifiant l'égalité (fonction $\mathbb{Q}$ linéaire).

Faire un schéma.

Indication 68 · Énoncé p. 838 (Une petite transformation)
Remarquer que $\tilde{\tilde{f}} = f$.

1. Dans le cas deux fois dérivable écrire une relation entre g'' et f''.
2. Dans le cas général, pour $x, y > 0$ et $t \in [0,1]$, déterminer $s \in [0,1]$ tel que

$$\frac{1}{tx+(1-t)y} = s\frac{1}{x} + (1-s)\frac{1}{y}.$$

On obtient $\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)s = \frac{1}{tx+(1-t)y} - \frac{1}{y}$ c'est à dire $s = \frac{tx}{tx+(1-t)y}$.

Puis écrire l'inégalité de convexité sur f.

Indication 69 · Énoncé p. 839 (Convexité et moyennes glissantes)
Écrire $g(x) = \int_0^1 f(xs)\,\mathrm{d}s$ et constater que $x \mapsto f(xs)$ est convexe.

Indication 70 · Énoncé p. 839 (Somme de convexes affine)
Commencer par traiter l'exercice 5.

Remarquer que $f = (f+g) + (-g)$ est concave.

Indication 71 · Énoncé p. 839 (Se ramener à $[0,1]$)

- ▷ $\Longleftarrow$ Fixer x et y dans I^2, $t \in [0,1]$ et écrire l'inégalité de convexité sur $f_{x,y}(t\cdot 0 + (1-t)\cdot 1)$.
- ▷ $\Rightarrow$ Pour $t = \lambda t_1 + (1-\lambda)t_2$ écrire $tx + (1-t)y$ comme combinaison convexe de $t_1x + (1-t_1)y$ et $t_2x + (1-t_2)y$.

Indication 72 · Énoncé p. 839 (Réciproque d'une fonction convexe strictement monotone)
Remarquer que l'injectivité est issue de la stricte monotonie.

Écrire l'inégalité de convexité et composer (s'inspirer de l'étude de la monotonie de la réciproque).

Indication 73 · Énoncé p. 840 (Un critère de convexité)
- ▷ $(i) \Rightarrow (ii)$ utiliser les exercices 6 et 19.
- ▷ $(ii) \Rightarrow (i)$ étant donnés $x, y \in I$ prendre $[a, b] = [x, y]$ et λ tel que $\varphi_\lambda(a) = \varphi_\lambda(b)$.

Indication 74 · Énoncé p. 840 (Convexité et raccordements)
1. Par la question suivante il faut prendre deux intervalles dont l'intersection est exactement un point. Prendre ensuite par exemple une fonction affine par morceaux.
2. Se ramener au cas f convexe sur $[a, b]$ et $[c, d]$ avec $a < c < b < d$ et faire des schémas. Utiliser au choix des inégalités de pentes, une caractérisation comme 73, ou une associativité du barycentre bien choisie.
3. Utiliser un principe de continuation utilisant la question précédente.

Indication 75 · Énoncé p. 840 (Une propriété de la moyenne)
Repérer que le sens non immédiat est $(iii) \Rightarrow (i)$.

Remarquer que
- ▷ l'inégalité est stable par somme
- ▷ l'inégalité est une égalité pour les fonctions affines
- ▷ une fonction vérifiant l'inégalité n'admet pas de maximum à l'intérieur d'un intervalle
- ▷ pour montrer que f est convexe il suffit de montrer que pour tout $[a, b]$, $x \mapsto f(x) - \left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a)\right)$ atteint un maximum, en a (et b).

Indication 76 · Énoncé p. 841 (Continuité et convexité à l'intérieur)
Obtenir l'inégalité de convexité sur les bords par passage à la limite.

Indication 77 · Énoncé p. 841 (À faire une fois vu le chapitre déterminant)
Calculer le déterminant 3x3…

Indication 78 · Énoncé p. 841 (Une variation autour du critère sur la dérivée seconde)
Constater qu'un sens est immédiat.

Dans l'autre sens se ramener d'abord:
- ▷ Pour $x < y \in I$, à montrer que f est en-dessous de sa corde entre x et y.
- ▷ Pour $x < y \in I$ tq $f(x) = f(y) = 0$, à montrer que $f \leq 0$ entre x et y.
- ▷ Si ce n'est pas le cas il existe un maximum local sur $]x, y[$ et alors un point où la limsup est négative ou nulle. En déduire le résultat si la limsup est strictement positive.
- ▷ Pour obtenir large au lieu de strict étudier $x \mapsto f(x) + \varepsilon x^2$ (par exemple) et faire $\varepsilon \to 0$.

Indication 79 · Énoncé p. 841 (Une variation autour de la convexité et du laplacien)
Par exemple minorer f par une fonction affine coïncidant avec f en x.

On remarquera que l'on peut en fait montrer à l'aide de l'exercice 78 que la condition est une CNS.

Indication 80 · Énoncé p. 842 (Dérivée à droite suffit)
Commencer par montrer que si une fonction continue est dérivable à droite de dérivée à droite positive alors elle est croissante (ce n'est pas si facile).

Calquer ensuite la preuve du cours.

Indication 81 · Énoncé p. 842 (Fonctions fortement convexes)
Adapter les preuves du cours.

Indication 82 · Énoncé p. 843 (Fonctions log-convexes: le début)

1. Composer par exp croissante et convexe.

2. Par exemple $x \mapsto x$.

3.
- ▷ Pour $(i) \Rightarrow (ii)$ utiliser l'exercice 6 et le fait que la log-convexité implique la convexité.
- ▷ Pour $(iii) \Rightarrow (i)$ utiliser la croissance de ln.
- ▷ Le sens plus difficile est $(ii) \Rightarrow (iii)$. À $x, y \in I$ et $t \in [0,1]$ fixés, écrire pour tout $\alpha > 0$ l'inégalité de convexité sur $x \mapsto \alpha^x f(x)$ pour obtenir

$$\forall \alpha > 0, f(tx + (1-t)y) \leq \alpha^{(1-t)(x-y)} t f(x) + \alpha^{t(y-x)}(1-t) f(y)$$

et optimiser en α.

Indication 83 · Énoncé p. 843 (Caractérisation par la dérivée seconde de la log-convexité)
Calculer la dérivée seconde de $\ln \circ f$…

Indication 84 · Énoncé p. 843 (Fonctions log-convexes: une caractérisation)
- ▷ $\Rightarrow$ Remarquer que $f^\alpha = \exp \circ (\alpha \ln \circ f)$.
- ▷ $\Leftarrow$ À $x, y \in I$ et $t \in [0,1]$ fixés, l'idée est d'écrire une inégalité de convexité sur f^α puis de faire tendre α vers 0^+.

  Plus précisément pour tout $\alpha > 0$,

$$\ln(f(tx + (1-t)y)) \leq \frac{\ln(t(f(x))^\alpha + (1-t)(f(y))^\alpha)}{\alpha}$$

  et effectuer un DL_1 du numérateur pour α au voisinage de 0.

Indication 85 · Énoncé p. 843 (Fonctions log-convexes: opérations)

1. Pour le produit écrire le ln d'un produit comme la somme de deux fonctions convexes.

2. Pour la somme utiliser la caractérisation (ii) de l'exercice 82.

Indication 86 · Énoncé p. 844 (Un cas particulier de log-convexité)
Au choix d'abord montrer que la somme de fonctions log-convexes est log-convexe (exercice 85) ou bien plus simplement dériver deux fois.

Il faut alors montrer que

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_k e^{\lambda_k x}\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k \lambda_k^2 e^{\lambda_k x}\right)\left(\sum_{k=1}^{n} a_k e^{\lambda_k x}\right)$$

ce qui est une inégalité bien connue dont les initiales sont « C-S ».

Indication 87 · Énoncé p. 844 (Log-concavité et coefficients binomiaux)

1. Vérifier que $\frac{(n-k+1)}{k}\frac{k+1}{n-k} \geq 1$.
2. Dériver deux fois.

Indication 88 · Énoncé p. 845 (Log-concavité des fonctions symétriques moyennées: inégalité de Newton)

1. Par calcul on obtient $E_k\left(\frac{1}{x_1}, ..., \frac{1}{x_n}\right) = E_{n-k}\frac{x_1,...,x_n}{E_n}(x_1, ..., x_n)$.
2. Par Rolle avec $P = \prod(X - x_k)$ on a P' scindé et ses racines conviennent par dérivée et coefficients.
3. C'est le point clef: par récurrence en remarquant que les deux points précédents permettent de passer de $n+1$ à n.

Indication 89 · Énoncé p. 845 (Une généralisation de l'IAG: inégalités de Maclaurin)
Remarquer qu'il s'agit de montrer que si une fonction f est concave on a une information sur la monotonie de $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$.

Alternativement faire des produits malins.

Indication 90 · Énoncé p. 846 (Cas particulier d'inégalités de Young)
La première est la concavité de ln ou encore un cas particulier de la seconde pour $f(x) = x^{p-1}$.

Pour la seconde, par exemple fixer une variable et dériver par rapport à l'autre.

On pourra remarquer que $\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t)\,\mathrm{d}t = xf(x)$.

On remarquera aussi a posteriori que l'hypothèse $\mathcal{C}^1$ ne sert qu'à démontrer cette somme, et que (cf TD d'intégration), cette somme étant correcte dans le cas $\mathcal{C}^0$ l'inégalité de Young est vérifiée dans ce cas plus général.

Indication 91 · Énoncé p. 846 (Enveloppe convexe et fonction)
On rappelle qu'un sup de fonctions convexes est convexe.

Prendre le sup de toutes les fonctions convexes, ou de toutes les fonctions affines plus petites que f (méditer pourquoi cela est équivalent).

L'hypothèse de minoration par une constante peut être remplacée par une hypothèse de minoration par une fonction convexe ou par une fonction affine (méditer pourquoi cela est équivalent).

Indication 92 · Énoncé p. 847 (Domaine d'une fonction convexe)
$\Longleftarrow$ Juste vérifier la convexité en effectuant une disjonction des cas si une valeur est infinie.

$\Rightarrow$ Montrer que, si deux extrémités sont dans le domaine, alors le segment aussi.

Indication 93 · Énoncé p. 847 (Premières constatations)
1. Supremum dans $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ d'un ensemble contenant au moins un élément fini.
2. Supremum de fonctions affines donc convexes.
3. Inégalité de supremum en deux temps.

Indication 94 · Énoncé p. 847 (Des calculs explicites)
Calcul explicite.

Pour le dernier point se convaincre que cela ne dépend que de $\sup(A)$ et $\inf(A)$.

Indication 95 · Énoncé p. 847 (Cas d'une fonction régulière)
On pourra faire intervenir $x^*(p)$ l'unique solution de $f'(x) = p$.

Indication 96 · Énoncé p. 848 (Inégalité de Young)
1. Le sup est un majorant.
2. On obtient trois inégalités bien connues. On pourra utiliser l'exercice 95 pour calculer les transformées.

Indication 97 · Énoncé p. 848 (Bidualité de Fenchel-Legendre)
1. Le sup est un majorant puis passage au sup.
2. Trouver p tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(t) \geq f(x) + p(t-x)$.
3. En déduire que dans le cas convexe $f^{**} \geq f$.
4. Utiliser les encadrements avec la « décroissance » de $f \mapsto f^*$.

Indication 98 · Énoncé p. 849 (Transformée de Fenchel et opérations)
C'est un bon exercice de révision de manipulation de sup.

Indication 99 · Énoncé p. 849 (Épi-somme ou inf-convolution)
1. Pour la bonne définition il faut vérifier la minoration. Pour le caractère associatif et commutatif il suffit d'écrire $\{(y, x-y), y \in \mathbb{R}\} = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid y_1 + y_2 = x\}$.
2. Par double inégalité, bon courage !

Chapitre 24

Équations Différentielles Ordinaires

Énoncés 864
Calculs 864
Méthodes et résultats essentiels 868
Indications 886
Solutions 892

Énoncés

Dans tout le TD, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $t_0 \in I$.

Calculs

Exercice 1 (◔★ Équations à coefficients constants avec second membre)
Déterminer des solutions des équations suivantes:

1. $\forall x \in \mathbb{R}, y'(x) + 2y(x) = 5(x-1)^2$
2. $\forall t \in \mathbb{R}, y'(t) + y(t) = \left(e^t + 1\right)^2$
3. $\forall x \in \mathbb{R}, 2y'(x) + 3y(x) = e^x + x$
4. $\forall t \in \mathbb{R}, y'(t) - y(t) = \left(e^t + 1\right)^2$
5. $\forall t \in \mathbb{R}, y'(t) = 3y(t) - 13\cos(2t)$
6. $\forall x \in \mathbb{R}, 2y'(x) + y(x) = x^3 - 4$
7. $\forall t \in \mathbb{R}, x'(t) = -2x(t) + \cos(t)\sin(t)$
8. (plus long)
$$\forall t \in \mathbb{R}, f'(t) = f(t) + \sin(t)^4$$
9. (un peu différent)
$$\forall x \in \mathbb{R}, y'(x) + y(x) = xe^x$$
10. (plus long)
$$\forall t \in \mathbb{R}, p'(t) + 2p(t) = t^5$$
11. (un peu différent et plus long)
$$\forall x \in \mathbb{R}, y'(x) - 2y(x) = (\cos(x)x)^2$$

Solution p. 892

Exercice 2 (◔★ Équations avec second membre bis)
Déterminer l'ensemble des solutions des équations suivantes

1. (en utilisant la variation de la constante)

$$\forall x \in \mathbb{R}, y'(x) - y(x) = e^{-5x}$$

2. (en utilisant la variation de la constante)

$$\forall x \in \mathbb{R}, y'(x) - y(x) = e^{x}$$

3. $\forall t \geq 0, x'(t) = -x(t) + 3\dfrac{e^{-t}}{1+t^2}$

4. $\forall x \in \mathbb{R}, y'(x) + 2y(x) = 2\dfrac{e^{-x}}{1+e^{x}}$

5. $\forall x \in \mathbb{R}, y'(x) + 3y(x) = \left(1+e^{3x}\right)^5$

6. $\forall t > 0, 2f'(t) - f(t) = \dfrac{\sqrt{e^t}}{t^2+2t}$

7. $\forall t > 0, y'(t) + \dfrac{1}{3}y(t) = \dfrac{1}{3^3}t^3 + \dfrac{e^{-\frac{t}{3}}}{t^{\frac{1}{3}}}$

Solution p. 894

Exercice 3 (◔★ Conditions initiales)
Déterminer les solutions des problèmes suivants

1.
$$\forall x \in \mathbb{R}_+, y'(x) + y(x) = x$$
$$y(0) = 2$$

2.
$$\forall t \geq 1, x'(t) = \frac{x(t)}{2} + e^{\frac{t}{2}} \ln\left(\sqrt{t}\right)$$
$$x(1) = -3$$

Indication p. 886

Exercice 4 (◔★ Autre condition)
Déterminer les solutions du problème suivant

$$\forall x \in [0,1],\ y'(x) + 2y(x) = 3$$

$$\int_0^1 y(x)dx = 0$$

Indication p. 886

Exercice 5 (◔★ Équations homogènes)
Donner l'ensemble des solutions des équations suivantes:

1. $\forall \theta \in \mathbb{R}, y'(\theta) + (1+\cos(\theta)^2)y(\theta) = 0$
2. $\forall t \in]0,1[, x'(t) = \dfrac{x(t)}{t\ln(t)}$
3. $\forall x > 0, x^2y'(x) - (5-4x)y(x) = 0$
4. $\forall t \in \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right], \cos(t)f'(t) + f(t) = 0$

Solution p. 895

Exercice 6 (◑★ Équations avec second membre)
Donner l'ensemble des solutions des équations suivantes:

1. $\forall t > 0,\ x'(t) + \dfrac{1-2t}{t^2}x(t) = 1$
2. $\forall x \in \mathbb{R},\ y'(x) + xy(x) = x$
3. $\forall \theta \in]0, \dfrac{\pi}{2}[, f'(\theta) + \dfrac{1+\tan(\theta)^2}{\tan(\theta)}f(\theta) = \tan(\theta)^3 + \tan(\theta)$

Solution p. 896

Exercice 7 (◔★ Équations d'ordre 2)
Déterminer l'ensemble des solutions des équations suivantes:

1. $\forall t \in \mathbb{R}_+,\ y''(t) - \sqrt{2}y'(t) + y(t) = t^3$
2. $\forall t \in \mathbb{R},\ x''(t) - 2x'(t) + x(t) = t\,\mathrm{ch}(t)$
3. $\forall x \in [0,1],\ y''(x) = 4y(x) + x(1-x)$
4. $\forall t \geq 0,\ y''(t) + 4y(t) = \cos(t)^2$

Indication p. 886

Exercice 8 (◔★ Avec conditions initiales)
Déterminer les solutions des problèmes de Cauchy suivants

1. $$\begin{aligned} \forall t \geq 0, x''(t) - x'(t) &= x(t) + te^t \\ x(0) &= 1 \\ x'(0) &= 0 \end{aligned}$$
2. $$\begin{aligned} \forall t \geq 0, y''(t) + 9y(t) &= \cos^3(t) \\ y(0) &= 0 \\ y'(0) &= 0 \end{aligned}$$

Indication p. 886

Exercice 9 (◔★ Avec conditions aux bords)
Déterminer l'ensemble des solutions du problème suivant

$$\forall x \in [-1,1], y''(x) - 2y'(x) - 4y(x) = x^2$$

$$y(0) = 0 \quad \text{et} \quad y(1) = 0$$

Indication p. 886

Méthodes et résultats essentiels

Exercice 10 (◔★♣ Formule de Duhamel)
Soient $a \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$ et $y_0 \in \mathbb{K}$.

Montrer que l'unique solution du problème de Cauchy

$$\forall t \in I, y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$$

$$y(t_0) = y_0$$

est

$$y : t \mapsto y_0 e^{-\int_{t_0}^{t} a(\xi)\,\mathrm{d}\xi} + \int_{t_0}^{t} b(s) e^{-\int_{s}^{t} a(\xi)\,\mathrm{d}\xi}\,\mathrm{d}s.$$

Indication p. 886

Exercice 11 (◔★ Systèmes d'équations différentielles)

1. Trouver toutes les fonctions $(x, y) \in \left(\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})\right)^2$ telles que

$$\forall t \geq 0, \quad \begin{cases} x'(t) = y(t) - 1 \\ y'(t) = x(t) - 1. \end{cases}$$

2. Trouver toutes les fonctions $(q, p) \in \left(\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})\right)^2$ telles que

$$\forall t \geq 0, \quad \begin{cases} q'(t) = p(t) \\ p'(t) = 1 - q(t). \end{cases}$$

3. Trouver toutes les fonctions $(u, v) \in \left(\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})\right)^2$ telles que

$$\forall t \geq 0, \quad \begin{cases} u'(t) = u(t) + v(t) \\ v'(t) = u(t) - v(t). \end{cases}$$

4. Trouver toutes les fonctions $(f, g) \in \left(\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})\right)^2$ telles que

$$\forall t \geq 0, \quad \begin{cases} f'(t) = -g(t) \\ g'(t) = f(t) - 2g(t). \end{cases}$$

Indication p. 886

Exercice 12 (◔★♠ Conjugaison)
On note dans cet exercice D l'opérateur de dérivation.

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, on note $e_\lambda : t \mapsto e^{\lambda t}$.

1. Soit $f \in \mathcal{D}^1(I, \mathbb{K})$.

   Exprimer $e_{-\lambda} \times D(e_\lambda \times f)$ en fonction de $D(f)$ et de λ.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathcal{D}^n(I, \mathbb{K})$.

   Exprimer $e_{-\lambda} \times D^n(e_\lambda \times f)$ en fonction des dérivées de f et de λ.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$, $P \in \mathbb{K}_n[X]$ et $f \in \mathcal{D}^n(I, \mathbb{R})$.

   Exprimer $e_{-\lambda} \times P(D)(e_\lambda \times f)$ en fonction des dérivées de f et de λ.
4. Commenter.

Indication p. 886

Exercice 13 (◔★ Un exemple d'énergie)
Soit $E \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$, on pose $f = -E'$.

1. Soit y une solution de l'équation différentielle

$$\forall t \in I, y''(t) = f(y(t)).$$

   Montrer que la fonction

$$H : t \mapsto \frac{1}{2}(y'(t))^2 + E(y(t))$$

   est constante.
2. Soit y une solution de l'équation différentielle

$$\forall t \in I, y''(t) = f(y(t)) - \lambda y'(t)$$

   où $\lambda \geq 0$.

   Montrer que la fonction

$$H : t \mapsto \frac{1}{2}(y'(t))^2 + E(y(t))$$

   est décroissante.

Indication p. 886

Exercice 14 (◑★ Un exemple de formulation elliptique)
On note

$$E = \{u \in \mathcal{C}^2([0,1],\mathbb{R}) \mid u(0) = u(1) = 0\}.$$

Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$.

Soit $y \in E$.

$$(\forall t \in [0,1], -y''(t) + y(t) = f(t)$$
$$y(0) = y(1) = 0) \Leftrightarrow \left(\forall g \in E, \int_0^1 (y'(t)g'(t) + y(t)g(t))\,\mathrm{d}t = \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\right).$$

Indication p. 886

Exercice 15 (◑★ Un exemple de recollement)
Déterminer toutes les fonctions $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}, xy'(x) + y(x) = e^x.$$

Indication p. 886

Exercice 16 (◔★ Un exemple d'équation intégrale)
Déterminer toutes les fonctions $y \in \mathcal{C}^0(]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[,\mathbb{R})$ telles que

$$\forall \theta \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[, y(\theta) = \cos(\theta) + 3\int_0^\theta \tan(\varphi)y(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi$$

Indication p. 887

Exercice 17 (◔★♠ Lemme de Gronwall: version différentielle)
Soit $a \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$.

Soit $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ telle que

$$\forall t \geq 0,\ y'(t) \leq a(t)y(t).$$

Montrer que

$$\forall t \geq 0,\ y(t) \leq y(0)e^{\int_0^t a(s)\,\mathrm{d}s}.$$

Indication p. 887

Exercice 18 (◔★♠ Lemme de Gronwall: version intégrale)
Soit $a \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ une fonction **positive** et $y_0 \in \mathbb{R}$.

Soit $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ une fonction **positive** telle que

$$\forall t \geq 0, 0 \leq y(t) \leq y_0 + \int_0^t a(s)y(s)\,\mathrm{d}s.$$

Montrer que

$$\forall t \geq 0, 0 \leq y(t) \leq y_0 e^{\int_0^t a(s)\,\mathrm{d}s}.$$

Indication p. 887

Exercice 19 (◑★ Une introduction au Wronksien)
Soient $a, b \in C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$. On considère l'équation

$$\forall t \geq 0, \quad y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = 0. \tag{1}$$

Soient $y_1, y_2 \in C^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ deux solutions de (1).

On pose pour $t \geq 0$

$$W(y_1, y_2)(t) = y_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2(t).$$

1. Montrer que $W(y_1, y_2)$ est dérivable et déterminer sa dérivée en fonction de a, b et W.
2. Donner l'expression explicite de $W(y_1, y_2)$ en fonction de $W(y_1, y_2)(0)$.
3. **(Bonus)** Proposer au moins une application du résultat précédent.

Indication p. 887

Exercice 20 (◔★ Bootstrap de régularité: cas linéaire)
Soit $N \in \mathbb{N}$.

Soient $a_0, ..., a_{n-1} \in \mathcal{C}^N(I, \mathbb{K})$ et $b \in \mathcal{C}^N(I, \mathbb{K})$.

Soit $y \in \mathcal{D}^n(I, \mathbb{K})$ solution de

$$\forall t \in I, y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0(t)y(t) = b(t).$$

Montrer que $y \in \mathcal{C}^{N+n}(I, \mathbb{K})$.

Indication p. 887

Exercice 21 (◔★ Bootstrap de régularité: cas non linéaire autonome)
Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$ et $F \in \mathcal{C}^\infty(J, \mathbb{K})$.

Soit $f \in \mathcal{D}^1(I, J)$ solution de

$$\forall t \in I, f'(t) = F(f(t)).$$

Montrer que $f \in \mathcal{C}^\infty(I, J)$.

Commenter.

Indication p. 887

Exercice 22 (◔★ De l'importance de nommer les objets)
Soit $f \in \mathcal{D}^1(I, \mathbb{R})$.

Exprimer f en fonction de $f' + f$.

Indication p. 887

Exercice 23 (◔★ Les solutions physiques)
Soit $P = X^2 + \alpha_1 X + \alpha_0 \in \mathbb{C}_2[X]$.

Déterminer une CNS sur P pour que toutes les solutions de

$$\forall t \geq 0, y''(t) + \alpha_1 y'(t) + \alpha_0 y(t) = 0$$

tendent vers 0 en $+\infty$.

Indication p. 888

Exercice 24 (◔★ Construction d'exercice: cas CC et variation de la constante)
Soient $a \in \mathbb{K}$ et $f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})$.

Proposer une EDL1CC dont l'ensemble des solutions est

$$\mathcal{S} = \left\{t \mapsto Ce^{-@} + f(t), C \in \mathbb{K}\right\}$$

Indication p. 888

Exercice 25 (◔★ Construction d'exercice: variation de la constante)
Soient $\Phi \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K} \setminus \{0\})$ et $f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})$.

Proposer une EDL1 dont l'ensemble des solutions est

$$\mathcal{S} = \{t \mapsto C\Phi(t) + f(t), C \in \mathbb{K}\}$$

Indication p. 888

Exercice 26 (◑★ Petites perturbations par des fonctions bornées)
Soit $\varphi \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$ une fonction bornée.

1. Montrer que toutes les solutions de

$$\forall t \geq 0, \quad y'(t) + y(t) = \varphi(t)$$

sont bornées.

2. Montrer qu'il existe une seule solution de

$$\forall t \geq 0, \quad y'(t) - y(t) = \varphi(t)$$

qui est bornée.

Soit $\psi \in C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$ telle que

$$\forall t \geq 0, \quad |\operatorname{Re}(\psi(t))| \leq \frac{1}{2}.$$

1. Montrer que toutes les solutions de

$$\forall t \geq 0, \quad y'(t) + (1 + \psi(t))y(t) = \varphi(t)$$

sont bornées.

2. Montrer qu'il existe une seule solution de

$$\forall t \geq 0, \quad y'(t) - (1 + \psi(t))y(t) = \varphi(t)$$

qui est bornée.

Indication p. 888

Exercice 27 (◑★ Perturbations: variante)

1. Soit $f \in C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ telle que

$$f' + f \text{ est borné.}$$

Montrer que

$$f \text{ est borné.}$$

2. Soit $f \in C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ telle que

$$\lim_{x \to +\infty} (f'(x) + f(x)) = 0.$$

Montrer que $f(x)$ converge quand $x \to +\infty$ et que

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0.$$

Indication p. 888

Exercice 28 (◔★ Second membre défini par morceaux)

Résoudre l'équation différentielle suivante

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y'(x) + y(x) = |x|.$$

Indication p. 888

Exercice 29 (◔★ Parité)

1. Soit $a \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ une fonction impaire.

1.1. Soit $b \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ une fonction impaire.

Montrer que toutes les solutions de

$$\forall x \in \mathbb{R}, y'(x) + a(x)y(x) = b(x)$$

sont paires.

1.2. Soit $b \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ une fonction paire.

Montrer que y solution

$$\forall x \in \mathbb{R}, y'(x) + a(x)y(x) = b(x)$$

est impaire ssi $y(0) = 0$.

2. Soient $a_0 \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ une fonction paire et $a_1 \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ une fonction impaire.

2.1. Soit $b \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ une fonction paire.

Montrer que y solution de

$$\forall x \in \mathbb{R}, y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = b(x)$$

est paire ssi $y'(0) = 0$.

2.2. Soit $b \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ une fonction impaire.

y solution de

$$\forall x \in \mathbb{R}, y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = b(x)$$

est impaire ssi $y(0) = 0$.

Indication p. 888

Exercice 30 (◑★ Minimisation et équation elliptiques: la chaînette)

On pose $E = \{y \in \mathcal{C}^2([-1, 1], \mathbb{R}) \mid y(-1) = y(1) = 0\}$.

Soit $g \in \mathbb{R}$ et $\kappa > 0$.

Déterminer, si elle existe, la fonction $y \in E$ minimisant

$$\Phi : y \mapsto \int_{-1}^{1} \Big((y'(x))^2 + \kappa y(x)^2 - g y(x) \Big).$$

Indication p. 888

Exercice 31 (◔★ Nombre de degrés de libertés)

1. Trouver l'ensemble des fonction $y \in C^1([0,1],\mathbb{R})$ telles que

$$\forall t \in [0,1], \quad y'(t) + 2y(t) = t(1-t) \tag{1}$$

2. Pour chacune des conditions suivantes, déterminer l'ensemble des fonctions $y \in C^1([0,1],\mathbb{R})$ vérifiant (1) ainsi que la condition donnée.

2.1. $y(0) = 0$
2.2. $y'(0) = 0$
2.3. $y(1) = 0$
2.4. $y(0) + y(1) = 0$
2.5. $\int_0^1 ty(t)dt = 0$
2.6. $y(0) - y'(0) = 0$
2.7. $y(0) = y(1) = 0$
2.8. $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$

3. Commenter.

4. Pour chacune des conditions suivantes, déterminer l'ensemble des fonctions $y \in C^1([0,1],\mathbb{R})$ vérifiant (1) ainsi que la condition donnée.

4.1. $y(0) - e^2 y(1) = 0$
4.2. $y(0) - e^2 y(1) = \frac{1}{2}$
4.3. $\int_0^1 (@ + b)y(t)dt = 0$ où $a = 2e^2 - 2$ et $b = 3 - e^2$
4.4. $y'(0) + 2y(0) = 0$
4.5. $y(0) = y(1) = \frac{1}{2(1-e^2)}$
4.6. $y(0) = 0$ et $y'(0) = -2$

5. Commenter à nouveau.

Indication p. 888

Exercice 32 (◔★ Valeurs propres du Laplacien de Dirichlet)
Donner l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que le problème

$$\begin{cases} \forall t \in [0,1], & y''(t) = \lambda y(t) \\ & y(0) = y(1) = 0. \end{cases}$$

admette des solutions non nulles.

Indication p. 889

Exercice 33 (◔★ Oscillateur harmonique excité)
Soit $\omega_0 > 0$.

Déterminer pour $\omega > 0$ et $A \in \mathbb{R}$ l'ensemble des solutions du problème de Cauchy

$$\begin{aligned} \forall t \geq 0, x''(t) + \omega_0^2 x(t) &= A\cos(\omega t) \\ x(0) &= x_0 \\ x'(0) &= v_0 \end{aligned}$$

Indication p. 889

Exercice 34 (◑★ Variation des constantes pour les EDOL2)
Soient $a_1, a_0, b \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$.

On considère l'équation différentielle

$$\forall t \in I, y''(t) + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = b(t).$$

On suppose que l'on connaît $y_1, y_2 \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{K})$ telles que l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée est

$$\mathcal{S}_H = \text{Vect}(y_1, y_2).$$

Montrer que

$$y_p : t \mapsto \gamma_1(t)y_1(t) + \gamma_2(t)y_2(t)$$

où $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{K})$ est solution particulière de l'équation ssi

$$\forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} y_1(t)\gamma_1'(t) + y_2(t)\gamma_2'(t) = 0 \\ y_1'(t)\gamma_1'(t) + y_2'(t)\gamma_2'(t) = b(t). \end{cases}$$

Commenter.

Indication p. 889

Exercice 35 (◔★ Chambre à bulles)
Soit $\omega > 0$.

1. Donner l'ensemble des fonctions $(x, y) \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})^2$ solutions de

$$\begin{aligned} \forall t \geq 0, x''(t) &= -\omega y'(t) \\ y''(t) &= +\omega x'(t). \end{aligned}$$

Représenter graphiquement l'ensemble $\{(x(t), y(t)), t \in \mathbb{R}_+\}$.

2. Soit $\lambda > 0$. Donner l'ensemble des fonctions $(x, y) \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})^2$ solutions de

$$\begin{aligned} \forall t \geq 0, x''(t) &= -\omega y'(t) - \lambda x'(t) \\ y''(t) &= +\omega x'(t) - \lambda y'(t) \end{aligned}$$

Représenter graphiquement l'ensemble $\{(x(t), y(t)), t \in \mathbb{R}_+\}$.

Indication p. 889

Exercice 36 (◑★ Toute périodique ?)
Soit $T > 0$.

Soit $a \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ une fonction T-périodique.

Soit $b \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ une fonction T-périodique.

Montrer que toutes les solutions de

$$\forall t \in \mathbb{R}, y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$$

sont T-périodiques ssi

$$\int_0^T a(s)\,\mathrm{d}s = 0$$

et

$$\int_0^T b(s)e^{\int_0^s a(\xi)\,\mathrm{d}\xi}\,\mathrm{d}s = 0.$$

Indication p. 889

Exercice 37 (◑★ Au moins une périodique !)
Soit $T > 0$.

Soit $a \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ une fonction T-périodique.

Soit $b \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ une fonction T-périodique.

On suppose que $\int_0^T a(s)\,\mathrm{d}s \neq 0$.

Montrer qu'une et unique solution de

$$\forall t \in \mathbb{R}, y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$$

est T-périodique.

Indication p. 889

Exercice 38 (◑★ Recollement avec second membre quelconque)
Montrer que pour tout $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ dérivable en 0, l'équation différentielle

$$\forall x \in \mathbb{R}, xy'(x) + y(x) = f(x)$$

admet une et unique solution.

Indication p. 889

Exercice 39 (◔★ Pas une équation différentielle)
Déterminer toutes les fonctions $y \in \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{K})$ telles que

$$\forall t \in [0,1], y'(t) + y(t) = \int_0^1 y(s)\,\mathrm{d}s.$$

Indication p. 889

Exercice 40 (◑★ Équation de Verhulst)
Soit $u_{\max} > 0$ et $\kappa > 0$.

Pour $u_0 \geq 0$, on considère le problème de Cauchy

$$\forall t \geq 0, u'(t) = \kappa u(t)(u_{max} - u(t))$$
$$u(0) = u_0.$$

et on **admet** que ce problème de Cauchy admet une et unique solution.

Déterminer cette solution et la représenter graphiquement selon les différents cas.

Indication p. 889

Exercice 41 (◑★ Une formule de Duhamel elliptique)
Soit $\lambda > 0$, $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{K})$ et $(y_0, y_1) \in \mathbb{K}^2$.

Montrer que l'unique solution du problème de Cauchy

$$\begin{aligned} \forall t \geq 0, -y''(t) + \lambda^2 y(t) &= f(t) \\ y(0) &= y_0 \\ y'(0) &= y_1 \end{aligned}$$

est

$$y : t \mapsto \left(y_0 \operatorname{ch}(\lambda t) + \frac{y_1}{\lambda} \operatorname{sh}(\lambda t) + \int_0^t \frac{\operatorname{sh}(\lambda(t-s))}{\lambda} f(s)\, \mathrm{d}s \right).$$

Indication p. 889

Exercice 42 (◑☆ Reparamétrisation)

1. On cherche à résoudre l'équation différentielle

$$\forall x > 0, x^2 y''(x) + 3xy'(x) + y(x) = (x+1)^2.$$

1.1. Analyse Montrer que si y est solution alors $z : \xi \mapsto y\left(e^{\xi}\right)$ est solution d'une équation différentielle que l'on explicitera.

1.2. Synthèse En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle.

2. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle

$$\forall x \in]-1, 1[, (1-x^2)y''(x) - xy'(x) + y(x) = 0$$

à l'aide de la reparamétrisation $x = \sin(\theta)$.

3. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle

$$\forall x \in \mathbb{R}, \left(1+x^2\right)^2 y''(x) + 2x(1+x^2)y'(x) + 4y(x) = 0$$

à l'aide de la reparamétrisation $x = \tan(\theta)$.

4. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle

$$\forall x \in \mathbb{R}, (1+x^2)y''(x) + xy'(x) - 4y(x) = 0$$

à l'aide de la reparamétrisation $x = \operatorname{sh}(t)$.

Indication p. 890

Exercice 43 (◔☆ Construction d'exercice: reparamétrisation)
Soient $a_0, a_1 \in \mathbb{K}^2$, $b \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$.

Soit $\varphi \in \mathcal{C}^2(I, J)$ bijective.

Déterminer des fonctions $\alpha_2, \alpha_1, \alpha_0$ et β continues sur J telles que, pour toute fonction $y \in \mathcal{C}^2(J, \mathbb{K})$,

$$\forall x \in J, \alpha_2(x)y''(x) + \alpha_1(x)y'(x) + \alpha_0(x)y(x) = \beta(x)$$

ssi la fonction $z : t \mapsto y(\varphi(t))$ vérifie

$$\forall t \in I, z''(t) + a_1 z'(t) + a_0 z(t) = b(t).$$

Indication p. 890

Exercice 44 (◔★ Limites et formule de Duhamel)
Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.

On suppose qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que

$$f'(x) + \alpha f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \ell.$$

Montrer que

$$f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{\ell}{\alpha}.$$

Indication p. 890

Exercice 45 (◑☆ Valeurs propres de la valeur moyenne)
On note

$$M : \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \to \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$$
$$f \mapsto \left(x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t & \text{si } x > 0 \\ f(0) & \text{si } x = 0. \end{cases} \right)$$

1. Montrer que $M \in \mathcal{L}(\mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{K}))$.

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ on note

$$E_\lambda = \mathrm{Ker}(M - \lambda\,\mathrm{Id})$$

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f \in E_\lambda$. Montrer que
- ▷ $(1-\lambda)f(0) = 0$
- ▷ f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \lambda f'(x) + \frac{\lambda - 1}{x} f(x) = 0$$

2. Déterminer E_0.
3. Déterminer E_1.
4. Déterminer tous les $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que

$$E_\lambda \neq \{0\}.$$

Indication p. 890

Exercice 46 (◔☆ Pseudopériodicité)
Soit $T > 0$.

Soient $a_1, a_0 \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ solution de

$$\forall t \in \mathbb{R}, y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = 0$$

vérifiant de plus

$$y(0) = y(T) = 0.$$

Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{Z}, y(nT) = 0.$$

Indication p. 890

Exercice 47 (◑☆ Encore un recollement)
Déterminer selon la valeur de $\alpha \in \mathbb{R}$ l'ensemble des solutions du problème de Cauchy

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, xy'(x) - 3y(x) &= x^6 \\ y(1) &= \alpha \end{aligned}$$

Indication p. 890

Exercice 48 (◔☆ Équations de Bernoulli)
Soit $\alpha \neq 1$ un réel, $a_0 \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ et $b \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$.

Montrer que $y \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ ne s'annulant pas est solution de l'équation

$$\forall t \in I, y'(t) = a_0(t)y(t) + b(t)(y(t))^\alpha$$

ssi $z : t \mapsto (y(t))^{1-\alpha}$ est solution de l'équation

$$\forall t \in I, \frac{1}{1-\alpha} z'(t) = a_0(t)z(t) + b(t).$$

Commenter.

Indication p. 890

Exercice 49 (◕☆ Équations de Riccati)
Soient $a, b, c \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$. On cherche des méthodes pour transformer l'équation

$$\forall t \in I, y'(t) = a(t)y(t) + c(t)(y(t))^2 + b(t)$$

en une équation linéaire.

1. On suppose que c ne s'annule pas.

   Montrer que $y \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ est solution de l'équation différentielle

   ssi $u : t \mapsto e^{-\int_{t_0}^t c(s)y(s)\,\mathrm{d}s}$ est solution d'une EDOL2 que l'on précisera.
2. On suppose que l'on connaît $\tilde{y}$ une solution particulière de l'équation. Montrer que pour tout $z \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ ne s'annulant pas $y = \tilde{y} + \frac{1}{z}$ est solution ssi z est solution d'une EDOL1 que l'on précisera.

Indication p. 891

Exercice 50 (◑★ Équation de la brachistochrone)
Soit $L > 0$ et $C > 0$.

Déterminer une solution de l'équation différentielle

$$\forall x \in [0, L], \left(1 + (y'(x))^2\right) y(x) = C.$$

Indication p. 891

Exercice 51 (◑☆ Différentiation sur les fonctions de dérivées bornées)
Soit E l'espace vectoriel des fonctions $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ dont toutes les dérivées sont bornées.

Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ l'application $\mathrm{Id} + \lambda D$ est bijective.

Indication p. 891

Exercice 52 (◔☆ Gronwall avec second membre)
Soient $a, b \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, et $y, \tilde{y}$ telles que

$$\begin{aligned} y(0) &\leq \tilde{y}(0) \\ \forall t \geq 0, y'(t) &\leq a(t)y(t) + b(t) \\ \forall t \geq 0, \tilde{y}'(t) &= a(t)\tilde{y}(t) + b(t). \end{aligned}$$

Montrer que

$$\forall t \geq 0, y(t) \leq \tilde{y}(t).$$

Indication p. 891

Exercice 53 (◕★ Variation des constantes: cas EDOLnCC scindé)
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme de degré n scindé à racines simples.

On note $\lambda_1, ..., \lambda_n$ ses racines.

Soit $b \in \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$. On cherche à déterminer une solution particulière de l'équation

$$P(D)(y) = b$$

1. Montrer que y est solution de l'équation homogène ssi il existe

$$\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$$

tel que

$$\forall t \in I, \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \vdots & & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & \\ & e^{\lambda_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}}_{R(t)} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix}$$

2. Soient $\gamma_1, ..., \gamma_n \in \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$. Montrer que si

$$\forall t \in I, \begin{pmatrix} \gamma_1'(t) \\ \gamma_2'(t) \\ \vdots \\ \gamma_n'(t) \end{pmatrix} = (R(t))^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ b(t) \end{pmatrix}$$

alors $y_p : t \mapsto \sum_{k=1}^n \gamma_k(t) e^{\lambda_k t}$ est une solution particulière.

3. Conclure que

$$y_p : t \mapsto \int_0^t \sum_{k=1}^n c_k e^{\lambda_k (t-s)} b(s) \, \mathrm{d}s$$

où

$$\forall k \in [\![1, n]\!], c_k = \frac{1}{\prod_{j \neq k} (\lambda_k - \lambda_j)}$$

est une solution particulière.

Indication p. 891

Indications

Indication 3 · Énoncé p. 865 (Conditions initiales)
Déterminer l'ensemble des solutions puis utiliser les CI.

Pour déterminer des solutions particulières

1. Variation de la constante ou recherche de solution polynomiale.
2. Variation de la constante.

Indication 4 · Énoncé p. 866 (Autre condition)
Déterminer l'ensemble des solutions.

On obtient un degré de liberté. Le fixer avec la condition.

Indication 7 · Énoncé p. 867 (Équations d'ordre 2)
Pour la solution homogène RAS, suivre la méthode du cours.

Pour les solutions particulières, rechercher des solutions polynômes fois exponentielles.

Indication 8 · Énoncé p. 867 (Avec conditions initiales)
Idem que pour l'exercice 7, utiliser ensuite les CI pour déterminer les solutions.

Indication 9 · Énoncé p. 867 (Avec conditions aux bords)
Idem que pour l'exercice 7, utiliser ensuite les CB pour déterminer les solutions.

Indication 10 · Énoncé p. 868 (Formule de Duhamel)
Cf le cours. Il suffit d'écrire la méthode de variation de la constante.

Indication 11 · Énoncé p. 868 (Systèmes d'équations différentielles)
Dans chaque cas plusieurs options sont possibles:

- ▷ Déterminer deux CLs des fonctions satisfaisant des équations d'ordre 1 non couplées.
- ▷ Par analyse synthèse, se ramener à une équation d'ordre 2.

Indication 12 · Énoncé p. 869 (Conjugaison)
Cf cours.

Indication 13 · Énoncé p. 869 (Un exemple d'énergie)
Dériver.

Indication 14 · Énoncé p. 870 (Un exemple de formulation elliptique)

- ▷ On rappelle qu'une fonction φ est nulle ssi pour toute fonction ψ assez régulière $\int \varphi\psi = 0$.
- ▷ Procéder par IPP

Indication 15 · Énoncé p. 870 (Un exemple de recollement)
Par analyse synthèse.

Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$ puis déterminer les conditions de compatibilité.

Indication 16 · Énoncé p. 870 (Un exemple d'équation intégrale)
Se ramener à une EDL1 dans l'analyse.

Soit en considérant $\int_0^\theta \tan(\varphi)y(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi$ soit en montrant que y est $\mathcal{C}^1$ et en dérivant.

Indication 17 · Énoncé p. 870 (Lemme de Gronwall: version différentielle)
Dériver la fonction auxiliaire $\tilde{y} : t \mapsto y(t)e^{-\int_0^t a(s)\,\mathrm{d}s}$ et constater que sa dérivée est négative.

Alternativement résoudre l'équation $y' - ay = y' - ay$.

Indication 18 · Énoncé p. 871 (Lemme de Gronwall: version intégrale)
Poser $z : t \mapsto y_0 + \int_0^t a(s)y(s)\,\mathrm{d}s$ et au choix considérer $t \mapsto z(t)e^{-\int_0^t a(s)\,\mathrm{d}s}$ ou $t \mapsto \ln(z(t))$.

Indication 19 · Énoncé p. 871 (Une introduction au Wronksien)

1. Dérivée d'un produit + utiliser l'équation.
2. Se déduit de la dérivée.
3. On peut par exemple interpréter le wronskien en termes de liberté. Ou bien à partir d'une solution du système homogène y_1 en déterminer une deuxième y_2 indépendante de la première et donc déterminer l'ensemble de toutes les solutions de l'équation homogène.

   Le wronskien sera étudié en détails l'année prochaine.

Indication 20 · Énoncé p. 871 (Bootstrap de régularité: cas linéaire)
On a $y^{(n)} = b - \sum_{k=0}^{n-1} a_k y^{(k)}$.

Procéder par récurrence sur M pour montrer que $y \in \mathcal{C}^{M+n}$.

On remarque qu'en particulier si b et les a_k sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ alors $y \in \mathcal{C}^\infty$.

Indication 21 · Énoncé p. 872 (Bootstrap de régularité: cas non linéaire autonome)
Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f \in \mathcal{D}^n$.

Ce résultat (et la méthode pour le démontrer) s'étend aux équations de la forme

$$\forall t \in I, y'(t) = F(y(t), t)$$

ou encore

$$\forall t \in I, y^{(n)}(t) = F\big(t, y(t), ..., y^{(n-1)}(t)\big)$$

à condition que $F : I \times E \times \cdots \times E \to E$ soit régulière dans un sens à préciser.

Indication 22 · Énoncé p. 872 (De l'importance de nommer les objets)
Résoudre l'équation différentielle

$$f' + f = f' + f.$$

Indication 23 · Énoncé p. 872 (Les solutions physiques)
On obtient comme CNS que les racines de P sont de parties réelles strictement négatives.

Indication 24 · Énoncé p. 872 (Construction d'exercice: cas CC et variation de la constante)
L'équation homogène est fixée, il suffit ensuite de choisir le second membre pour que f soit solution.

Indication 25 · Énoncé p. 873 (Construction d'exercice: variation de la constante)
L'équation homogène est fixée par Φ, il suffit ensuite de choisir le second membre pour que f soit solution.

Indication 26 · Énoncé p. 873 (Petites perturbations par des fonctions bornées)
Dans chacun des cas résoudre explicitement à l'aide d'une formulation intégrale.

Dans le cas où la racine est -1, majorer simplement.

Dans le cas où la racine est 1 procéder par analyse synthèse. On pourra si nécessaire se contenter de l'unicité sans montrer l'existence.

Indication 27 · Énoncé p. 874 (Perturbations: variante)
Remarquer que f est solution de l'équation différentielle

$$f' + f = \underbrace{f' + f}_{\text{second membre}}$$

et refaire l'exercice 26.

Indication 28 · Énoncé p. 874 (Second membre défini par morceaux)
Au choix:
- ▷ Découper l'équation: résoudre sur $\mathbb{R}_+$ et $\mathbb{R}_-$ et recoller la solution
- ▷ Découper la solution: bien résoudre par variation de la constante et découper l'intégrale.

Indication 29 · Énoncé p. 875 (Parité)
Dans chaque cas, écrire l'équation satisfaite par $\hat{y} : x \mapsto y(-x)$ puis celle vérifiée par $y \pm \hat{y}$.
Conclure par unicité du problème de Cauchy.

Indication 30 · Énoncé p. 875 (Minimisation et équation elliptiques: la chaînette)
Considérer à y et z fixés $t \mapsto \Phi(y + tz)$ qui est un polynôme du second degré.

Cette étude sera moins surprenante une fois traités les espaces euclidiens.

Indication 31 · Énoncé p. 876 (Nombre de degrés de libertés)
Déterminer l'ensemble des solutions comme une droite affine (donc 1 degré de liberté).

Dans chacun des cas écrire la condition comme une équation linéaire sur ce degré de liberté.

A priori 1 équation linéaire à 1 inconnue admet une et unique solution mais en pratique cela dépend du rang.

De même un système de 2 équations linéaires à 1 inconnue peut selon le rang admettre 0 , 1 ou une infinité de solutions.

Indication 32 · Énoncé p. 876 (Valeurs propres du Laplacien de Dirichlet)
Résoudre explicitement et obtenir un système 2×2.

Indication 33 · Énoncé p. 877 (Oscillateur harmonique excité)
Cf cours de Physique ou de Maths.

Distinguer les cas $\omega \neq \omega_0$ et $\omega = \omega_0$.

Indication 34 · Énoncé p. 877 (Variation des constantes pour les EDOL2)
Au choix réinjecter ou utiliser une formulation matricielle.

On peut ainsi, à condition de savoir résoudre l'équation homogène, déterminer l'ensemble des solutions.

Indication 35 · Énoncé p. 878 (Chambre à bulles)
Poser $z = x + iy$.

Indication 36 · Énoncé p. 878 (Toute périodique ?)
Comme toute ED1LCC, se ramener à une étude d'intégrale fonction de sa borne supérieure par formule de Duhamel.

Toutes les solutions sont périodiques ssi les solutions homogènes ainsi qu'une solution particulière sont périodiques.

Ou plus simplement comme y est solution ssi $y(\cdot + T)$ est solution se ramener (unicité de la solution du problème de Cauchy) à $y(0) = y(T)$.

Indication 37 · Énoncé p. 879 (Au moins une périodique !)
Procéder par analyse-synthèse, comme pour l'exercice 36.

Indication 38 · Énoncé p. 879 (Recollement avec second membre quelconque)
Résoudre explicitement sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$ puis recoller.

Indication 39 · Énoncé p. 879 (Pas une équation différentielle)
Résoudre $y' + y = K$ avec K constante puis ajuster les degrés de liberté.

Indication 40 · Énoncé p. 879 (Équation de Verhulst)
Variables séparables.

Indication 41 · Énoncé p. 880 (Une formule de Duhamel elliptique)
Par unicité de la solution du problème de Cauchy il suffit de vérifier que c'est bien une solution.

Alternativement, pour retrouver la formule utiliser une méthode de variation des constantes.

Indication 42 · Énoncé p. 880 (Reparamétrisation)
Aucun piège, si ce n'est faire attention aux calculs et la rédaction par analyse-synthèse.

Indication 43 · Énoncé p. 881 (Construction d'exercice: reparamétrisation)
Juste injecter. On obtient par exemple

$$\begin{aligned}\alpha_0 &: x \mapsto a_0\\ \alpha_1 &: x \mapsto a_1\varphi'(\varphi^{-1}(x)) + \varphi''(\varphi^{-1}(x))\\ \alpha_2 &: x \mapsto (\varphi'(\varphi^{-1}(x)))^2\\ \beta &: b(\varphi^{-1}(x))\end{aligned}$$

ou toute multiplication de ces fonctions par toute fonction ne s'annulant pas.

Indication 44 · Énoncé p. 881 (Limites et formule de Duhamel)
Écrire f comme solution de l'équation différentielle $f' + \alpha f = f' + \alpha f$ puis une formule de Duhamel.

Indication 45 · Énoncé p. 882 (Valeurs propres de la valeur moyenne)

1. Pour la bonne définition, la continuité sur $\mathbb{R}_+^*$ est immédiate (pourquoi ?) et il faut ensuite redémontrer
$$\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \underset{x\to 0}{\longrightarrow} f(0).$$
La linéarité est immédiate.
2. $M(f)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ par le TFA. Dériver $M(f) = \lambda f$ sur $\mathbb{R}_+^*$ puis réutiliser $M(f) = \lambda f$.
3. On obtient $E_0 = \{0\}$ (et donc M injective).
4. On obtient les constantes.
5. Résoudre explicitement sur $\mathbb{R}_+^*$ et regarder si il existe des solutions non nulles se prolongeant par continuité en 0 par 0.

Indication 46 · Énoncé p. 882 (Pseudopériodicité)
Résoudre explicitement l'équation puis utiliser les conditions. On distinguera selon les régimes.

Ou alternativement considérer le wronskien (cf exercice 19) entre y et sa translatée de T.

Indication 47 · Énoncé p. 883 (Encore un recollement)
Effectuer une analyse synthèse. On obtient qu'il existe une solution ssi $\alpha = \frac{2}{3}$.

Indication 48 · Énoncé p. 883 (Équations de Bernoulli)
Aucun piège.

Étant donné que l'on sait résoudre (à calcul d'intégrales près) les EDL1 on peut donc résoudre les équations de la forme

$$y' = ay + by^\alpha.$$

On a même une expression explicite (peu utile), avec la condition initiale $y(t_0) = y_0$:

$$y : t \mapsto y_0 e^{\int_{t_0}^{t} a_0(s)\,\mathrm{d}s} \left(1 + (1-\alpha) y_0^{\alpha-1} \int_{t_0}^{t} b(s) e^{(\alpha-1)\int_{t_0}^{t} a(\xi)\,\mathrm{d}\xi}\ \mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Indication 49 · Énoncé p. 883 (Équations de Riccati)
Injecter et se munir de son courage.

Indication 50 · Énoncé p. 884 (Équation de la brachistochrone)
Il n'est demandé ici que d'en trouver une.

Pour calculer une intégrale de la forme $\int F\left(\sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) \mathrm{d}x$ un changement de variable pertinent est parfois $u = \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}$.

Indication 51 · Énoncé p. 884 (Différentiation sur les fonctions de dérivées bornées)
Pour l'injectivité considérer le noyau.

Pour la surjectivité faire comme à l'exercice 26.

Indication 52 · Énoncé p. 884 (Gronwall avec second membre)
Utiliser la linéarité (considérer $y - \tilde{y}$) et le lemme de Gronwall différentiel.

Indication 53 · Énoncé p. 885 (Variation des constantes: cas EDOLnCC scindé)

1. $\mathcal{S}_H = \mathrm{Vect}\left(e_{\lambda_k}\right)$
2. Écrire les équations matriciellement.
3. Il suffit de déterminer la dernière colonne de l'inverse d'une matrice de Vandermonde.

Solutions

Solution pour l'exercice 1 · Énoncé p. 864 (Équations à coefficients constants avec second membre)

1. $$\forall x \in \mathbb{R}, y'(x) + 2y(x) = 5(x-1)^2$$

Équation homogène

L'équation homogène associée est

$$\forall x \in \mathbb{R}, y'(x) + 2y(x) = 0$$

et donc l'ensemble des solutions de l'équation homogène est

$$\mathcal{S}_H = \{Ce^{-2x}, C \in \mathbb{R}\}.$$

Solution particulière

On cherche une solution particulière sous la forme

$$y_p : x \mapsto a_2x^2 + a_1x + a_0.$$

Alors y_p est solution ssi

$$\forall x \in \mathbb{R}, 2a_2x + a_1 + 2(a_2x^2 + a_1x + a_0) = 5(x-1)^2$$

c'est à dire

$$(2a_2)x^2 + (2a_1 + 2a_2)x + (2a_0 + a_1) = 5x^2 - 10x + 5$$

ce qui, par identification, est équivalent au système

$$\begin{cases} 2a_2 & = 5 \\ 2a_1 + 2a_2 & = -10 \\ 2a_0 + a_1 & = 5. \end{cases}$$

ce système étant triangulaire on obtient directement

$$\begin{cases} a_2 = \frac{5}{2} \\ a_1 = -5 - a_2 \\ a_0 = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}a_1. \end{cases}$$

i.e.

$$\begin{cases} a_2 = \frac{5}{2} \\ a_1 = -\frac{15}{2} \\ a_0 = \frac{25}{4}. \end{cases}$$

et donc une solution particulière est

$$y_p : x \mapsto \frac{5x^2}{2} - \frac{15x}{2} + \frac{25}{4}.$$

Conclusion

L'ensemble des solutions est

$$\mathcal{S} = \left\{ x \mapsto Ce^{-2x} + \frac{5x^2}{2} - \frac{15x}{2} + \frac{25}{4}, C \in \mathbb{R} \right\}.$$

2. $$\forall t \in \mathbb{R}, y'(t) + y(t) = \left(e^t + 1\right)^2$$

L'ensemble des solutions est

$$\mathcal{S} = \left\{ t \mapsto Ce^{-t} + e^t + \frac{1}{3}e^{2t} + 1, C \in \mathbb{R} \right\}.$$

3. $$\forall x \in \mathbb{R}, 2y'(x) + 3y(x) = e^x + x$$

L'ensemble des solutions est

$$\mathcal{S} = \left\{ x \mapsto Ce^{-\frac{3}{2}x} + \frac{x}{3} + \frac{e^x}{5} - \frac{2}{9}, C \in \mathbb{R} \right\}.$$

4. $$\forall t \in \mathbb{R}, y'(t) - y(t) = \left(e^t + 1\right)^2$$

$$\mathcal{S} = \left\{ t \mapsto Ce^t + 2e^t t + e^{2t} - 1, C \in \mathbb{R} \right\}.$$

5. $$\forall t \in \mathbb{R}, y'(t) = 3y(t) - 13\cos(2t)$$

$$\mathcal{S} = \left\{ t \mapsto Ce^{3t} - 2\sin(2t) + 3\cos(2t), C \in \mathbb{R} \right\}.$$

6. $$\forall x \in \mathbb{R}, 2y'(x) + y(x) = x^3 - 4$$

$$\mathcal{S} = \left\{ x \mapsto Ce^{-\frac{1}{2}x} + x^3 - 6x^2 + 24x - 52, C \in \mathbb{R} \right\}.$$

7. $$\forall t \in \mathbb{R}, x'(t) = -2x(t) + \cos(t)\sin(t)$$

$$\mathcal{S} = \left\{ t \mapsto Ce^{-2t} + \frac{1}{8}\sin(2t) - \frac{1}{8}\cos(2t), C \in \mathbb{R} \right\}.$$

8. (plus long)

$$\forall t \in \mathbb{R}, f'(t) = f(t) + \sin(t)^4$$

$$\mathcal{S} = \left\{ t \mapsto Ce^t - \frac{1}{5}\sin(2t) + \frac{1}{34}\sin(4t) + \frac{1}{10}\cos(2t) - \frac{1}{136}\cos(4t) - \frac{3}{8}, C \in \mathbb{R} \right\}.$$

9. (un peu différent)

$$\forall x \in \mathbb{R}, y'(x) + y(x) = xe^x$$

$$\mathcal{S} = \left\{ x \mapsto Ce^{-x} + \frac{e^x x}{2} - \frac{e^x}{4}, C \in \mathbb{R} \right\}.$$

10. (plus long)

$$\forall t \in \mathbb{R}, p'(t) + 2p(t) = t^5$$

$$\mathcal{S} = \left\{ t \mapsto Ce^{-2t} + \frac{t^5}{2} - \frac{5t^4}{4} + \frac{5t^3}{2} - \frac{15t^2}{4} + \frac{15t}{4} - \frac{15}{8}, C \in \mathbb{R} \right\}.$$

11. (un peu différent et plus long)

$$\forall x \in \mathbb{R}, y'(x) - 2y(x) = (\cos(x)x)^2$$

$$\mathcal{S} = \left\{ x \mapsto Ce^{2x} - \frac{x^2}{4} + \frac{1}{8}x^2\sin(2x) - \frac{1}{8}x^2\cos(2x) - \frac{x}{4} + \frac{1}{8}x\sin(2x) + \frac{1}{32}\sin(2x) + \frac{1}{32}\cos(2x) - \frac{1}{8}, C \in \mathbb{R} \right\}.$$

Solution pour l'exercice 2 · Énoncé p. 865 (Équations avec second membre bis)

1. (en utilisant la variation de la constante)

$$\forall x \in \mathbb{R}, y'(x) - y(x) = e^{-5x}$$

Équation homogène

L'équation homogène associée est

$$\forall x \in \mathbb{R}, y'(x) - y(x) = 0$$

et donc l'ensemble des solutions de l'équation homogène est

$$\mathcal{S}_H = \{Ce^x, C \in \mathbb{R}\}.$$

Solution particulière

Ici, même si on aurait pu rechercher une solution particulière sous la forme $x \mapsto \alpha e^{-5x}$, on procède par variation de la constante.

On cherche donc une solution sous la forme

$$y_p : x \mapsto \gamma(x)e^x.$$

Alors y_p est solution ssi

$$\forall x \in \mathbb{R}, \gamma'(x)e^x - \gamma(x)e^x + \gamma(x)e^x = e^{-5x}$$

ce qui se simplifie en

$$\forall x \in \mathbb{R}, \gamma'(x) = e^{-6x}.$$

Donc

$$\gamma : x \mapsto -\frac{1}{6}e^{-6x}$$

convient. Donc une solution particulière est

$$y_p : x \mapsto -\frac{1}{6}e^{-6x}e^x.$$

c'est à dire

$$y_p : x \mapsto -\frac{1}{6}e^{-5x}.$$

Conclusion

L'ensemble des solutions est

$$\mathcal{S} = \left\{ x \mapsto Ce^x - \frac{1}{6}e^{-5x}, C \in \mathbb{R} \right\}.$$

2. (en utilisant la variation de la constante)

$$\forall x \in \mathbb{R}, y'(x) - y(x) = e^x$$

L'ensemble des solutions est

$$\mathcal{S} = \{x \mapsto Ce^x + xe^x, C \in \mathbb{R}\}.$$

3. $$\forall t \geq 0, x'(t) = -x(t) + 3\frac{e^{-t}}{1+t^2}$$

$$\mathcal{S} = \{t \mapsto Ce^{-t} + 3\arctan(t)e^{-t}, C \in \mathbb{R}\}.$$

4. $$\forall x \in \mathbb{R}, y'(x) + 2y(x) = 2\frac{e^{-x}}{1+e^x}$$

$$\mathcal{S} = \{x \mapsto Ce^{-2x} + 2e^{-2x}\ln(1+e^x), C \in \mathbb{R}\}.$$

5. $$\forall x \in \mathbb{R}, y'(x) + 3y(x) = \left(1+e^{3x}\right)^5$$

$$\mathcal{S} = \left\{x \mapsto Ce^{-3x} + \frac{e^{-3x}}{18}\left(1+e^{3x}\right)^6, C \in \mathbb{R}\right\}.$$

6. $$\forall t > 0, 2f'(t) - f(t) = \frac{\sqrt{e^t}}{t^2+2t}$$

$$\mathcal{S} = \left\{t \mapsto Ce^{\frac{1}{2}t} + \frac{1}{4}e^{\frac{t}{2}}(\ln(t) - \ln(t+2)), C \in \mathbb{R}\right\}.$$

7. $$\forall t > 0, y'(t) + \frac{1}{3}y(t) = \frac{1}{3^3}t^3 + \frac{e^{-\frac{t}{3}}}{t^{\frac{1}{3}}}$$

$$\mathcal{S} = \left\{t \mapsto Ce^{-\frac{1}{3}t} + \frac{3}{2}e^{-\frac{1}{3}t}t^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{9}t^3 - t^2 + 6t - 18, C \in \mathbb{R}\right\}.$$

Solution pour l'exercice 5 · Énoncé p. 866 (Équations homogènes)

1. Une primitive de $\theta \mapsto 1+\cos(\theta)^2$ c'est à dire de $\theta \mapsto 1 + \frac{1+\cos(2\theta)}{2}$ est $\theta \mapsto \frac{3}{2}\theta + \frac{1}{4}\sin(2\theta)$. Donc l'ensemble des solutions est

$$\boxed{\mathcal{S}_H = \left\{\theta \mapsto Ce^{-\left(\frac{3}{2}\theta + \frac{1}{4}\sin(2\theta)\right)}, C \in \mathbb{R}\right\}}.$$

2. Une primitive de $t \mapsto -\frac{1}{t\ln(t)}$ c'est à dire de $t \mapsto -\frac{\frac{1}{t}}{\ln(t)}$ sur $]0,1[$ est $t \mapsto -\ln(|\ln(t)|)$ c'est à dire $t \mapsto -\ln(-\ln(t))$. Comme de plus pour tout $t \in]0,1[$, $e^{\ln(-\ln(t))} = -\ln(t)$ on en déduit que l'ensemble des solutions est

$$\boxed{\mathcal{S}_H = \{t \mapsto C\ln(t), C \in \mathbb{R}\}}.$$

3. Pour tout $x > 0$, $x^2 \neq 0$ et donc l'équation se met sous la forme résolue

$$\forall x > 0, y'(x) - \left(\frac{5}{x^2} - \frac{4}{x}\right)y(x) = 0.$$

Une primitive de $x \mapsto \frac{5}{x^2} - \frac{4}{x}$ est $x \mapsto -\frac{5}{x} - 4\ln(x)$ et donc l'ensemble des solutions est

$$\boxed{\mathcal{S}_H = \left\{x \mapsto Ce^{-\frac{5}{x}}x^{-4}, C \in \mathbb{R}\right\}}.$$

4. Pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{4}]$, $\cos(t) \neq 0$ et donc l'équation se met sous la forme résolue

$$\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right], f'(t) + \frac{1}{\cos(t)} f(t) = 0.$$

(Ici il est moins facile de déterminer une primitive « à l'œil » on effectue donc un calcul d'intégrale.)

Soit $t \in [0, \frac{\pi}{4}]$. Alors à l'aide du changement de variable $v = \sin(u)$ on a

$$\begin{aligned}\int_0^t \frac{1}{\cos(u)}\,\mathrm{d}u &= \int_0^t \frac{\cos(u)}{1-\sin^2(u)}\,\mathrm{d}u \\ &= \int_0^{\sin(t)} \frac{1}{1-v^2}\,\mathrm{d}v \\ &= \int_0^{\sin(t)} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-v} + \frac{1}{1+v}\right)\mathrm{d}v \\ &= \left[\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+v}{1-v}\right)\right]_0^{\sin(t)}\end{aligned}$$

d'où une primitive de $t \mapsto \frac{1}{\cos(t)}$ est $t \mapsto \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sin(t)}{1-\sin(t)}\right)$.

De plus pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{4}]$,

$$\exp\left(-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sin(t)}{1-\sin(t)}\right)\right) = \sqrt{\frac{1-\sin(t)}{1+\sin(t)}}$$

Par conséquent l'ensemble des solutions est

$$\boxed{\mathcal{S}_H = \left\{t \mapsto C\sqrt{\tfrac{1-\sin(t)}{1+\sin(t)}}, C \in \mathbb{R}\right\}}.$$

(On pourrait simplifier l'expression à l'aide de la formule de l'angle moitié.)

Solution pour l'exercice 6 · Énoncé p. 866 (Équations avec second membre)
On obtient

1. $\boxed{\mathcal{S} = \left\{t \mapsto Ce^{\frac{1}{t}}t^2 + t^2, C \in \mathbb{R}\right\}}$.

2. $\boxed{\mathcal{S} = \left\{x \mapsto Ce^{\frac{-x^2}{2}} + 1, C \in \mathbb{R}\right\}}$.

3. $\boxed{\mathcal{S} = \left\{\theta \mapsto C\frac{1}{\tan(\theta)} + \frac{\tan^2(\theta)}{3}, C \in \mathbb{R}\right\}}$.

Chapitre 25

Dénombrement

Énoncés 898
Les essentiels 898
Un peu de contextualisation 903
Des calculs classiques 906
Standard 909
Applications 915
Indications 918
Solutions 928

Énoncés

Les essentiels

Exercice 1 (◔★♣ Nombre de bijections)
Soient E et F deux ensembles finis de cardinaux respectifs n et p.

Combien y-a-t-il de bijections de E vers F ?

Indication p. 918

Exercice 2 (◔★♣ Nombre d'injections)
Soient E et F deux ensembles finis de cardinaux respectifs n et p.

Combien y-a-t-il d'injections de E dans F ?

Indication p. 918

Exercice 3 (◔★♣ Les ronds et batons)
Soit n un entier naturel et p un entier naturel.

Combien existe-t-il de p-uplets $\left(k_1, ..., k_p\right) \in \mathbb{N}^p$ tels que

$$n = \sum_{i=1}^{p} k_i.$$

Indication p. 918

Exercice 4 (◑★ Dénombrement de fonctions monotones)
Soient n, p deux entiers.

1. Déterminer le nombre de fonctions strictement croissantes de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, p]\!]$.
2. Déterminer le nombre de fonctions croissantes de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, p]\!]$.

Indication p. 918

Exercice 5 (◔★♣ Symétrie des coefficients binomiaux)
Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![0, n]\!]$.

Montrer que

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

1. À l'aide de la formule explicite.
2. En considérant la fraction rationnelle $X^n\left(1+\frac{1}{X}\right)^n$.
3. En considérant l'application $\varphi : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$ définie par $\varphi : A \mapsto \overline{A}$.
4. À l'aide d'un raisonnement combinatoire.

Indication p. 918 · Solution p. 928

Exercice 6 (◔★♣ Une formule de Vandermonde)
Soient $(n, m, r) \in \mathbb{N}^3$.

Montrer que

$$\sum_{k=0}^{r} \binom{n}{k}\binom{m}{r-k} = \binom{n+m}{r}.$$

1. Par une méthode polynomiale.
2. Par un raisonnement combinatoire.
3. À l'aide d'une bijection bien choisie.

Indication p. 918

Exercice 7 (◔★♣ Fonction indicatrice et cardinal)
Soit E un ensemble fini.

1. Montrer que pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$:
$$|A| = \sum_{x \in E} \mathbb{1}_A(x).$$
2. Montrer que $\forall x \in E$
$$\mathbb{1}_{A\cup B}(x) = \mathbb{1}_A(x) + \mathbb{1}_B(x) - \mathbb{1}_{A\cap B}(x)$$
3. En déduire une démonstration de la formule du crible.

Indication p. 918

Exercice 8 (◔★♣ Formule de la capitaine)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![1, n]\!]$.

Montrer que

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$$

1. À l'aide de la formule explicite.
2. En considérant le polynôme $((1+X)^n)'$.
3. À l'aide d'un raisonnement combinatoire.
4. En considérant une bijection bien choisie.

Indication p. 919

Exercice 9 (◑★♠ Formule du crible)
Soit $n \in \mathbb{N}$ et $A_1, ..., A_n$ des ensembles finis. Montrer que

$$\left|\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right| = \sum_{i=1}^{n}\left((-1)^{i-1} \sum_{1\leq k_1<k_2<\cdots<k_i\leq n}\left|\bigcap_{p=1}^{i} A_{k_p}\right|\right).$$

Indication p. 919

Exercice 10 (◔★ Rappel sur les nombres de Fibonacci)
On définit la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la récurrence

$$F_0 = 1$$
$$F_1 = 1$$
$$\forall n \in \mathbb{N}, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

Déterminer une expression explicite pour la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Indication p. 919

Exercice 11 (◔★ Coefficients multinomiaux)
Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k_1, ..., k_r$ des entiers naturels tels que $\sum_{i=1}^{r} k_i = n$.

Combien y-a-t-il de façons de partitionner un ensemble à n éléments en r sous-ensembles de cardinaux respectifs $k_1, ..., k_r$?

Indication p. 919

Exercice 12 (◑★ Introduction aux nombres de Catalan)
On définit la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la récurrence

$$c_0 = 1$$
$$\forall n \in \mathbb{N}, c_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} c_k c_{n-k}.$$

1. Déterminer une fonction $c \in \mathcal{C}^0(]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[, \mathbb{R})$ telle que

$$\forall x \in]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[, c(x) - 1 = xc(x)^2.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que c admet un $\mathrm{DL}_n(0)$ et le déterminer de deux manières différentes.

3. En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}, c_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

Indication p. 919

Exercice 13 (◔★♣ Autour des triangularités)
Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Combien existe-t-il de couples $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ tels que $i \leq j$?

2. Combien existe-t-il de couples $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ tels que $i < j$?

Indication p. 919

Exercice 14 (◔★♠ Formule d'inversion de Pascal)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^n$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\forall i \in [\![0,n]\!], u_i = \sum_{j=0}^{n} \binom{j}{i} v_j$$

ssi

$$\forall i \in [\![0,n]\!], v_i = \sum_{j=0}^{n} (-1)^{i-j} \binom{j}{i} u_j.$$

2. Montrer que:

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} v_k$$

ssi

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} u_k.$$

Indication p. 919

Exercice 15 (◔★ Le début des marches aléatoires)
On appelle chemin de longueur n une liste $((x_k, y_k))_{k\in[\![0,n]\!]}$ de points de $\mathbb{Z}^2$ tels que

$$(x_0, y_0) = (0,0)$$
$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} x_{n+1} = x_n + 1 \\ y_{n+1} = y_n \pm 1 \end{cases}$$

1. Faire un schéma.
2. Soit $k \in \mathbb{Z}$ déterminer le nombre de chemins de longueur n se terminant en (n,k).

Indication p. 919

Exercice 16 (◔★ Parité du cardinal des sous-ensembles de cardinal pair)
Soit E un ensemble fini de cardinal $n \geq 1$.

Montrer qu'il y a autant de sous-ensembles de E de cardinaux pairs que de sous-ensembles de E de cardinal impair;

1. En calculant la somme
$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$$
2. En considérant $a \in E$ et l'application
$$\varphi : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$$
$$A \mapsto \begin{cases} A \cup \{a\} & \text{si } a \notin A \\ A \setminus \{a\} & \text{si } a \in A \end{cases}$$

Indication p. 919

Un peu de contextualisation

Exercice 17 (◔★ Chaussettes et tiroirs)

1. Combien y-a-t-il de façons de ranger 7 chaussettes différentes dans 3 tiroirs différents ?
2. Combien y-a-t-il de façons de ranger 7 chaussettes indistinguables dans 3 tiroirs différents ?
3. Combien y-a-t-il de façons de ranger 7 chaussettes indistinguables dans 3 tiroirs indistinguables ?
4. Combien y-a-t-il de façons de ranger 7 chaussettes différentes dans 3 tiroirs indistinguables ?

Indication p. 920

Exercice 18 (◔★ Le début des boules numérotées et des urnes)
Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n.

1. Combien y-a-t-il de façons de tirer trois boules à la fois ?
2. Combien y-a-t-il de façons de tirer trois boules les unes à la suite des autres en remettant la boule tirée dans l'urne après chaque tirage (remise) ?
3. Combien y-a-t-il de façons de tirer trois boules les unes à la suite des autres sans remise ?

Indication p. 920

Exercice 19 (◑★ Thé ou café ?)
Tous les matins le professeur de mathématiques boit une tasse de thé ou de café.

Sur n jours combien y-a-t-il de configurations

1. sans aucune contrainte supplémentaire,
2. telles que le professeur a bu au moins une fois du thé et une fois du café,
3. telles que le professeur a bu plus de tasses de café que de thé,
4. telles qu'il n'existe pas deux jours consécutifs où le professeur a bu la même boisson,
5. telles qu'il n'existe pas deux jours consécutifs où le professeur a bu du thé,
6. telles qu'il n'existe pas trois jours consécutifs où le professeur a bu la même boisson.

Indication p. 920

Exercice 20 (◔★ Anagrammes)
Déterminer le nombre d'anagrammes (ayant un sens ou non) des mots suivants:

- ▷ `\ textsc{chat}`
- ▷ `\ textsc{ellipse}`
- ▷ `\ textsc{anagramme}`

Indication p. 920

Exercice 21 (◔☆ Placement autour d'une table)
On dispose de n élèves option info et de n élèves option SI.

On cherche à les placer autour d'une table de telle façon qu'il n'y ait jamais deux élèves de la même option côte à côte.

1. Combien y-a-t-il de façons de les placer autour d'une table rectiligne ayant un seul côté ?
2. Combien y-a-t-il de façons de les placer autour d'une table rectiligne ayant deux côtés ?
3. Combien y-a-t-il de façons de les placer autour d'une table circulaire ?

Indication p. 920

Exercice 22 (◔★ Un petit pavage (apparition de Fibo))
Soit $n \in \mathbb{N}$.

Combien y-a-t-il de façons de paver un rectangle $n \times 2$ avec des dominos 2×1 et 1×2 ?

Indication p. 920

Exercice 23 (◑★ Nombre de questions et nombre de réponses)
Soit E un ensemble fini de cardinal n et $p \in \mathbb{N}$.

On suppose que l'on dispose de p questions dont les réponses `oui/non` permettent de déterminer avec certitude tout élément de E.

Montrer que $p \geq \log_2(n)$.

Commenter.

Indication p. 921

Exercice 24 (◔★ Nombre de diagonales)
Soit $n \geq 4$.

Déterminer le nombre de diagonales d'un polygone régulier à n côtés.

Indication p. 921

Exercice 25 (◔☆ Le problème des tours)
Soit $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}$.

Combien y-a-t-il de façons de placer p tours sur un échiquier $n \times n$ de telle façon qu'aucune n'est prise par une autre.

Indication p. 921

Exercice 26 (◑☆ Le problème des n-reines pour $n = 4$)
Combien y-a-t-il de façons de placer 4 reines sur un échiquier 4×4 de telle façon qu'aucune n'est prise par une autre.

Indication p. 921

Exercice 27 (◑☆ L'araignée du Dr. B)
L'araignée du Dr. B possède n pattes (distinguables).

Elle possède aussi n chaussettes (indistinguables) et n chaussures (indistinguables).

Elle se chausse en $2n$ étapes, et à chaque étape elle met soit une chaussette à une patte sans chaussure ni chaussette, soit une chaussure à une patte avec une chaussette mais sans chaussure.

Combien y-a-t-il de façons différentes de chausser l'araignée du Dr. B ?

Indication p. 921

Des calculs classiques

Exercice 28 (◔★ Un principe de tranches souvent utile)
Soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

Montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} \varphi(k) = \sum_{j=0}^{\infty} |\{k \in [\![1, n]\!] \mid \varphi(k) > j\}|.$$

Indication p. 921

Exercice 29 (◔★ Révisions sur des formules de coefficients binomiaux)

1. Soit $p \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$\forall n \geq p, \sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$$

2. Soient p, k, n trois entiers naturels tels que $p \leq k \leq n$. Montrer que

$$\binom{k}{p}\binom{n}{k} = \binom{n}{p}\binom{n-p}{k-p}.$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

Indication p. 921

Exercice 30 (◔☆ Somme sur une diagonale)
Soit $n \in \mathbb{N}$.

Déterminer

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n-k}{k}.$$

Indication p. 921

Exercice 31 (◑★ Nombre de dérangements)
Pour $n \in \mathbb{N}$ on appelle *dérangement* à n éléments toute permutation de n éléments n'admettant aucun point fixe.

Déterminer une formule explicite du nombre de dérangements à n éléments à l'aide d'une somme.

Indication p. 922

Exercice 32 (◑★ Nombre de surjections)
Soient n et p deux entiers.

Déterminer une formule explicite du nombre de surjections de $[\![1, n]\!]$ sur $[\![1, p]\!]$ à l'aide d'une somme.

Indication p. 922

Exercice 33 (◑☆ Nombre de dérangements, les autres méthodes)
Pour $n \in \mathbb{N}$ on note D_n le nombre de dérangements à n éléments (cf exercice 31).

1. Montrer que

$$D_0 = 1$$
$$D_1 = 0$$
$$\forall n \in \mathbb{N}, D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})$$

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{e^{-x}}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} D_k \frac{x^k}{k!} + o_{x\to 0}(x^n).$$

Indication p. 922

Exercice 34 (◑☆ Nombre de surjections, les autres méthodes)
Pour $n, p \in \mathbb{N}$ on note $S_{n,p}$ le nombre de surjections de $[\![1, n]\!]$ sur $[\![1, p]\!]$ (cf exercice 32).

1. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_{n,0} = 0$$
$$S_{0,0} = 1$$
$$\forall (n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2, S_{n,p} = pS_{n-1,p} + pS_{n-1,p-1}$$

2. Montrer que pour tout $n, p \in \mathbb{N}$,

$$S_{n,p} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} S_{n-k,p-1}$$

3. Montrer que pour tout $n, p \in \mathbb{N}$,

$$(e^x - 1)^p = \sum_{k=0}^{n} S_{n,p} \frac{x^n}{n!} + o_{x\to 0}(x^n).$$

Indication p. 922

Exercice 35 (◔☆ Nombre de surjections: un cas très particulier)
Soit $n \in \mathbb{N}$.

Déterminer le nombre de surjections de $[\![1, n]\!]$ sur $[\![1, n-1]\!]$.

Indication p. 922

Exercice 36 (◑★ Nombre d'involutions)
Soit E un ensemble fini de cardinal n.

On dit que $f : E \to E$ est *involutive* ssi $f \circ f = \mathrm{Id}_E$.

On note u_n le nombre d'involutions sur E.

Déterminer une relation de récurrence vérifiée par la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Indication p. 922

Standard

Exercice 37 (◔★ Encore des capitaines)
Soit E un ensemble fini de cardinal n.

Déterminer

$$\left|(A,B) \in (\mathcal{P}(E))^2 \mid A \subset B\right|$$

Indication p. 923

Exercice 38 (◔★ Nombre de partitions (nombres de Bell))
Pour $n \in \mathbb{N}$ on note B_n le nombre de classes d'équivalences sur un ensemble à n éléments.

Montrer que la suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la relation de récurrence

$$B_0 = 1$$
$$\forall n \in \mathbb{N}, B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k$$

Indication p. 923

Exercice 39 (◑★ Deux généralisations)

1. Soient $n_0 \geq n_1 \geq n_2 \geq \cdots \geq n_r \geq 0$ des entiers. Montrer que

$$\binom{n_0}{n_1}\binom{n_1}{n_2}\binom{n_2}{n_3}\cdots\binom{n_{r-1}}{n_r} = \binom{n_0}{n_r}\binom{n_0-n_r}{n_{r-1}-n_r}\binom{n_0-n_{r-1}}{n_{r-2}-n_{r-1}}\cdots\binom{n_0-n_2}{n_1-n_2}$$

2. Soient $n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{N}$ et $p_1, ..., p_r$ des entiers. Montrer que

$$\sum_{\substack{(i_1,\ldots,i_r)\in\mathbb{N}^r \\ i_1+\cdots+i_r=n}} \binom{p_1}{i_1}\binom{p_2}{i_2}\cdots\binom{p_r}{i_r} = \binom{p_1+p_2+\cdots+p_r}{n}.$$

Indication p. 923

Exercice 40 (◔☆ Ronds et batons translatés)
Soient $n \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{N}$ et $(a_1, ..., a_p) \in \mathbb{Z}$.

Déterminer

$$\left|\left\{(k_1, ..., k_p) \in \mathbb{Z}^p \mid \sum_{i=1}^{p} k_i = n \text{ et } \forall i \in [\![1,p]\!], k_i \geq a_i\right\}\right|.$$

Indication p. 923

Exercice 41 (◔★ Épaississement de la diagonale)
Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![0, n-1]\!]$.

Combien existe-t-il de couples $(i, j) \in [\![1, n]\!]$ tels que $|i - j| \leq k$.

Indication p. 923

Exercice 42 (◑★ Fonctions très strictements croissantes)
Soient n, p des entiers et $d \in \mathbb{N}^*$.

Déterminer le nombre d'applications $f : [\![1, n]\!] \to [\![1, p]\!]$ telles que

$$\forall k \in [\![1, n]\!], f(k+1) \geq f(k) + d.$$

Indication p. 924

Exercice 43 (◔★ Formule de Legendre)
Soit p un nombre premier.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$v_p(n!) = \sum_{k=1}^{\left\lfloor \frac{\ln(n)}{\ln(p)} \right\rfloor} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor.$$

Indication p. 924

Exercice 44 (◔★ Selon la taille de l'intersection)
Soit E un ensemble fini de cardinal n et $p \in [\![0, n]\!]$.

Déterminer

$$\big|(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2 \mid |A \cap B| = p\big|.$$

Indication p. 924

Exercice 45 (◔★ Diamètre fixé)
Soit $k \in \mathbb{N}$.

Déterminer le nombre de parties A non vides de $[\![1, n]\!]$ telles que $\max(A) - \min(A) = k$.

Indication p. 924

Exercice 46 (◑★ Pas de consécutifs (encore Fibo !))
Déterminer le nombre de parties de $[\![1, n]\!]$ ne contenant aucun couple d'entiers consécutifs.

Indication p. 924

Exercice 47 (◑★ Nombre de parenthésages)
Déterminer le nombre de mots de $2n$ caractères contenant les symboles « (» et «) », et représentant un parenthésage correct.

Indication p. 924

Exercice 48 (◑★ Nombre de chemins positifs)
Pour $n \in \mathbb{N}$ on note c_n le nombre de chemins (au sens de l'exercice 15) de longueur $2n+1$, positifs (c'est à dire tels que pour tout $k \in [\![0, 2n+1]\!]$, $y_k \geq 0$) et se terminant en sur l'axe des abscisses (c'est à dire tels que $y_{2n+1} = 0$).

Déterminer une expression de $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Indication p. 924

Exercice 49 (◔☆ Classes d'équivalences de tailles égales)
Soient n et p deux entiers et E un ensemble fini de cardinal $n \times p$.

Déterminer le nombre de relations d'équivalences sur E telles que chaque classe d'équivalence contienne exactement p éléments.

Indication p. 924

Exercice 50 (◔☆ Nombre de relations d'ordre total)
Soit E un ensemble fini de cardinal n.

Combien existe-t-il de relations d'ordre total sur E.

Indication p. 924

Exercice 51 (◔☆ Un peu de tarot)
Un jeu de tarot comporte 78 cartes. À quatre joueurs les cartes sont distribuées en 4 mains de 18 cartes et un « chien » de 6 cartes.

1. Combien y-a-t-il de mains de 18 cartes possibles ?
2. Parmi les 78 cartes se trouvent trois « bouts ». Combien y-a-t-il de mains possibles:
   a. Sans « bouts » ?
   b. Avec 1 « bout » ?
   c. Avec 2 « bouts » ?
   d. Avec les 3 « bouts » ?
3. Combien y-a-t-il de donnes possibles si on ordonne les joueurs ?
4. Combien de donnes y-a-t-il avec le roi de cœur dans le « chien » ?

Indication p. 924

Exercice 52 (◔☆ Sécurité du téléphone)
Un code PIN est une suite de chiffres entre 0 et 9 avec répétition possible.

1. Combien de code PIN de 4 chiffres existe-t-il ?
2. Combien de code PIN comportant entre 4 et 6 chiffres existe-t-il ?
3. Un schéma de déverrouillage et une suite de 4 à 9 chiffres sans répétition. Combien de schémas de déverrouillage existe-t-il ?

Indication p. 924

Exercice 53 (◔☆ Un exemple de crible)
Soient $N \in \mathbb{N}^*$ et trois entiers $a, b, c \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le nombre d'entiers de $[\![1, N]\!]$ divisibles par au moins l'un de a, b ou c.

Indication p. 925

Exercice 54 (◑☆ Intersection de diagonales)
Soit $n \in \mathbb{N}$, on trace un polygone régulier à n côtés et on trace toutes ses diagonales.

On suppose que trois diagonales ne sont jamais concourantes en dehors des sommets.

Combien y-a-t-il de points d'intersection de ces diagonales à l'intérieur du polygone ?

Indication p. 925

Exercice 55 (◔☆ Variation autour des sommes)
Soient n et k deux entiers.

Combien y-a-t-il de façons de distribuer $n+k$ polycopiés identiques parmi n élèves de telle sorte que chaque élève en reçoive au moins 1.

Indication p. 925

Exercice 56 (◑☆ Comptage avec pivot)
Soient $n \in \mathbb{N}$ et $g, d \in \mathbb{N}$.

Montrer que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{k}{g} \binom{n-k}{d} = \binom{n+1}{g+1+d}.$$

Indication p. 925

Exercice 57 (◔☆ Nombre de relations)
Soit E un ensemble fini de cardinal n.

1. Combien y-a-t-il de relations (quelconques) sur E ?
2. Combien y-a-t-il de relations réflexives sur E ?
3. Combien y-a-t-il de relations réflexives et symétriques sur E ?

Indication p. 925

Exercice 58 (◑☆ Nombre d'idempotents)
Soit E un ensemble fini de cardinal n.

On dit que $f : E \to E$ est *idempotent* ssi $f \circ f = f$.

Déterminer une formule explicite du nombre d'idempotents de E à l'aide d'une somme.

Indication p. 925

Exercice 59 (◑☆ Maximum du produit à somme fixée)
Soit $n \in \mathbb{N}$.

Déterminer le maximum du produit d'entiers naturels dont la somme fait n.

Indication p. 925

Exercice 60 (◔☆ Disjoints et non contenus)
Soit E un ensemble fini de cardinal n et $A \subset E$.

1. Déterminer

$$|\{B \subset E \mid A \cap B = \varnothing\}|$$

2. Déterminer

$$|\{B \subset E \mid B \not\subset A\}|$$

3. Déterminer

$$|\{B \subset E \mid A \not\subset B\}|$$

Indication p. 925

Exercice 61 (◑★ Somme de cardinaux de parties)
Soit E un ensemble fini de cardinal n.

1. Calculer

$$\sum_{A \subset E} |A|.$$

2. Calculer

$$\sum_{(A,B) \in (\mathcal{P}(E))^2} |A \cap B|.$$

3. Calculer

$$\sum_{(A,B) \in (\mathcal{P}(E))^2} |A \cup B|.$$

Indication p. 926

Exercice 62 (◔☆ Nombre de solutions d'une équation ensembliste)
Soit E un ensemble de cardinal fini et $A, B \in \mathcal{P}(E)$.

Déterminer le nombre de solutions des équations ensemblistes suivantes, d'inconnue $X \in \mathcal{P}(E)$:

1. $A \cap X = B$,

2. $A \cup X = B$.

Indication p. 926

Applications

Exercice 63 (◑★ Approximation diophantienne)
Soit $x \in \mathbb{R}$.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ il existe $p, q \in \mathbb{Z} \times [\![1, n]\!]$ tel que

$$| x - \frac{p}{q} | < \frac{1}{nq}.$$

Indication p. 926

Exercice 64 (◑☆ Tiroirs et groupes)
Soit G un groupe fini et A, B deux parties de G.

On suppose que $|G| < |A| + |B|$.

Montrer que

$$\forall g \in G, \exists (a, b) \in A \times B, g = ab.$$

Indication p. 926

Exercice 65 (◕☆ Nombre chromatique du plan)
Pour $n \in \mathbb{N}$ un entier on appelle coloriage du plan $\mathcal{P}$ à n couleurs toute application $c : \mathcal{P} \to [\![0, n-1]\!]$.

On appelle couleur du point P la valeur $c(P)$.

On dit qu'un coloriage est c est correct ssi pour tous points $P, Q \in \mathcal{P}$ à distance de 1, $c(P) \neq c(Q)$.

1. Montrer qu'il n'existe pas de coloriage correct à 2 couleurs.
2. Montrer qu'il existe un coloriage correct à 7 couleurs.
3. Montrer qu'il n'existe pas de coloriage correct à 3 couleurs.

Indication p. 926

Exercice 66 (◑☆ Une application des tiroirs)
Soit $n \in \mathbb{N}$.

On considère $n+1$ entiers $a_1, ..., a_{n+1}$ deux à deux distincts dans $[\![1, 2n]\!]$.

Montrer qu'il existe $i, j \in [\![1, n+1]\!]$ distincts tels que $a_i \mid a_j$.

Indication p. 927

Exercice 67 (◑★ Cardinaux et algèbre linéaire sur corps finis)
Soit $q \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{K}$ un corps à q éléments.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Déterminer $|\mathrm{M}_n(\mathbb{K})|$.
2. Déterminer $|\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})|$.
3. (Nécessite le chapitre déterminants)

   Déterminer $|\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})|$.

Indication p. 927

Exercice 68 (◑☆ Le problème des chapeaux, cas général)
Les n élèves de l'Ellipse choisissent chaque jour leurs places au « hasard ».

Pour $k \in \mathbb{N}$ on note $p_{k,n}$ la probabilité qu'exactement k élèves retrouvent leur place d'un jour à l'autre.

Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$ fixé

$$p_{k,n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1^k}{k!}e^{-1}.$$

Indication p. 927

Exercice 69 (◕☆▫ Nombre de partitions)
Écrire un programme python prenant en argument un entier n et renvoyant le nombre de façons d'écrire n comme somme d'entiers strictement positifs **non ordonnés**.

Indication p. 927

Exercice 70 (◑☆ Points entiers de boules pour diverses normes)
Soit $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [1, +\infty[$.

On note pour $R > 0$,

$$B_p(R) = \left\{ (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n} |x_i|^p < R^p \right\}.$$

Déterminer un équivalent lorsque R tend vers $+\infty$ de

$$\left| B_p(R) \cap \mathbb{Z}^n \right|$$

dans les cas suivants:

1. $n = 2$ et $p = 2$,
2. n quelconque et $p = 1$.

Indication p. 927

Exercice 71 (◑☆ Encore des indicatrices)
Soit $n \in \mathbb{N}$.

Déterminer

$$\sum_{A \subset [\![1,n]\!]} \sum_{k \in A} k.$$

Indication p. 927

Exercice 72 (◕★ Un chouette exercice de crible de M.V)
Soient $x_1, ..., x_n$ des éléments de $\mathbb{R}$.

Montrer que

$$\max(x_1, ..., x_n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{\substack{I \subset [\![1,n]\!] \\ |I|=k}} \min_{i \in I}(x_i).$$

Indication p. 927

Indications

Indication 1 · Énoncé p. 898 (Nombre de bijections)
Si $n \neq p$ aucune, si $n = p$, $n!$.

Indication 2 · Énoncé p. 898 (Nombre d'injections)
Par exemple (ce n'est pas la seule méthode), choisir l'image.

Indication 3 · Énoncé p. 898 (Les ronds et batons)
Cf cours.

Indication 4 · Énoncé p. 898 (Dénombrement de fonctions monotones)
Faire un schéma.

À tout moment remarquer que $i \mapsto f(i)$ est croissante ssi $i \mapsto f(i) + i - 1$ est strictement croissante (pourquoi ?) et qu'un seul des deux calculs suffit.

Il y a ensuite plusieurs méthodes.
- ▷ Identifier une fonction monotone à (au choix)
  - ▷ Son image
  - ▷ Les écarts stricts entres deux valeurs successives
  - ▷ etc.
- ▷ Identifier une fonction croissante à (au choix)
  - ▷ Le nombre d'images réciproques de chaque élément (cf 3)
  - ▷ Les écarts entre valeurs successives
  - ▷ etc.

Alternativement écrire une relation de récurrence et deviner le résultat

Indication 5 · Énoncé p. 899 (Symétrie des coefficients binomiaux)
1. $k = n - (n - k)$
2. Développer par le binôme.
3. L'application φ est bijective et envoie les parties à k éléments sur les parties à $n - k$ éléments
4. Reformuler le point précédent.

Solution p. 928

Indication 6 · Énoncé p. 899 (Une formule de Vandermonde)
1. Déterminer le coefficient en X^r de $(1 + X)^n(1 + X)^m$.
2. Considérer un ensemble à $n + m$ éléments dont n bleus et m verts. En choisir r indépendamment de la couleur.
3. Formaliser le raisonnement précédent à l'aide d'un produit cartésien et d'unions.

Indication 7 · Énoncé p. 899 (Fonction indicatrice et cardinal)
Pour le dernier point, sommer.

Indication 8 · Énoncé p. 900 (Formule de la capitaine)
1. RAS
2. Dériver puis développer. Développer puis dériver.
3. Choisir un groupe de k élèves parmi n dont une capitaine.
4. Formaliser le raisonnement combinatoire précédent.

Indication 9 · Énoncé p. 900 (Formule du crible)
Procéder par récurrence sur n. Ou bien utiliser des fonctions indicatrices.

Indication 10 · Énoncé p. 900 (Rappel sur les nombres de Fibonacci)
ERLCC2H

Indication 11 · Énoncé p. 900 (Coefficients multinomiaux)
Il s'agit du coefficient multinomial

$$\frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_r!}.$$

Indication 12 · Énoncé p. 901 (Introduction aux nombres de Catalan)
1. Résoudre le trinôme du second degré. Une seule racine est continue en 0.
2. On peut
- ▷ Utiliser une méthode de bootstrap
- ▷ Utiliser le $\mathrm{DL}_{n+1}(0)$ de $y \mapsto \sqrt{1-y}$.
- ▷ Unicité du DL.

Indication 13 · Énoncé p. 901 (Autour des triangularités)
Respectivement $\frac{n(n+1)}{2}$ et $\frac{n(n-1)}{2}$.

Indication 14 · Énoncé p. 902 (Formule d'inversion de Pascal)
Cf TDs précédents (coefficient binomiaux, matrices et polynômes). Le plus simple est d'interpréter via l'endomorphisme de translation $P \mapsto P(X+1)$.

Indication 15 · Énoncé p. 902 (Le début des marches aléatoires)
Cf cours.

Indication 16 · Énoncé p. 903 (Parité du cardinal des sous-ensembles de cardinal pair)
1. Cette somme vaut $(1-1)^n = 0$. D'où

$$2\sum_{k \text{ pair}} \binom{n}{k} = 2^n$$

c'est à dire

$$\sum_{\substack{A \subset E \\ |A| \text{ pair}}} 1 = \frac{1}{2}2^n$$

2. Cette application est bijective (car involutive) et envoie les parties de cardinaux pairs sur les parties de cardinaux impairs (et réciproquement).

Indication 17 · Énoncé p. 903 (Chausettes et tiroirs)

1. Cela revient à compter le nombre d'applications d'un ensemble de 7 éléments dans un ensemble à 3 éléments.

2. Cela revient à écrire 7 comme la somme de 3 entiers ordonnés, cf 3.

3. Ici cela revient à compter le nombre de façons d'écrire 7 comme la somme de 3 entiers non ordonnés. Plutôt que de chercher une formule générale (compliqué) compter à la main.

4. Ici cela revient à compter le nombre de relation d'équivalences ayant 3 classes d'équivalence sur un ensemble à 7 éléments. Plutôt que de chercher une formule générale (compliqué, cf 38) compter à la main.

Indication 18 · Énoncé p. 903 (Le début des boules numérotées et des urnes)
RAS

Indication 19 · Énoncé p. 904 (Thé ou café ?)

1. RAS 2^n

2. retirer juste deux configurations

3. faire le symétrique en prenant garde à la parité

4. c'est déterminé par la première boisson

5. des ronds et des batons puis une somme sur une diagonale montante du triangle de Pascal, ou bien faire une récurrence d'ordre 2 en distinguant selon la dernière boisson

6. on peut faire une récurrence et voir un double de Fibo apparaître ou bien se rendre compte qu'il s'agit d'un pavage par des blocs de tailles 1 et 2 puis de choisir la boisson initiale (faire un schéma)

Indication 20 · Énoncé p. 904 (Anagrammes)
Deux méthodes:

- ▹ Placer type de lettre par type de lettre (produit de coefficients binomiaux)
- ▹ Colorier pour rendre distincts puis dés-ordonner (factorielle divisé par produit de factorielles).

Indication 21 · Énoncé p. 904 (Placement autour d'une table)
Faire un schéma et remarquer que cela revient à placer des couples «Info-SI» les uns à côté des autres.

Indication 22 · Énoncé p. 904 (Un petit pavage (apparition de Fibo))
Regarder la fin du pavage, deux cas sont possibles (faire un schéma).

On obtient alors la relation de récurrence de Fibonacci.

Indication 23 · Énoncé p. 905 (Nombre de questions et nombre de réponses)
Chaque question correspond à un ensemble A_i et il faut et suffit que la connaissance de tous les $\mathbb{1}_{A_i}(x)$ permette de reconstituer x. Ainsi l'application

$$E \to \{0,1\}^p x \mapsto \left(\mathbb{1}_{A_i}(x)\right)_{1\leq i\leq p}$$

est injective d'ou $n \leq 2^p$.

On observe que si n est une puissance de 2 l'égalité est atteinte (par exemple par l'écriture en base 2) et que de manière générale on peut atteindre une telle borne par recherche dichotomique.

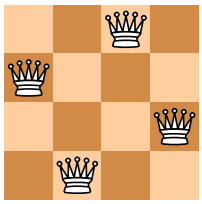
Le fait que « le nombre de questions croît logarithmiquement en le nombre de réponses » est à la base de la notion d'**entropie**.

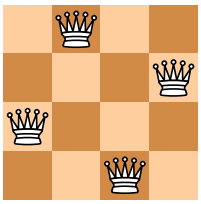
Indication 24 · Énoncé p. 905 (Nombre de diagonales)
Attention deux sommets successifs ne forment pas de diagonale.

Indication 25 · Énoncé p. 905 (Le problème des tours)
Interpréter comme la construction d'une injection.

Indication 26 · Énoncé p. 905 (Le problème des n-reines pour $n = 4$)
La question du cas n quelconque est toujours ouverte !

Compter donc à la main, on obtient 2 solutions:





Il reste à montrer que ce sont bien les seules.

Indication 27 · Énoncé p. 905 (L'araignée du Dr. B)
Deux possibilités au moins:

- Interpréter cela comment une partition de $[\![1, 2n]\!]$ en n parties de cardinal 2.
- Faire une récurrence: si l'araignée gagne une patte il faut intercaler dans sa procédure de chausse un chaussette et une chaussure.

Indication 28 · Énoncé p. 906 (Un principe de tranches souvent utile)
Par exemple écrire comme une somme double de 1 ou faire une transformée d'Abel.

Indication 29 · Énoncé p. 906 (Révisions sur des formules de coefficients binomiaux)
Déjà vu.

Indication 30 · Énoncé p. 906 (Somme sur une diagonale)
Faire un schéma pour se convaincre qu'il s'agit de nombre de Fibonacci puis une récurrence.

Indication 31 · Énoncé p. 907 (Nombre de dérangements)
En notant D_n le nombre de dérangements à n éléments on a

$$n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_{n-k}$$

puis utiliser la formule d'inversion de Pascal de l'exercice 14.

Indication 32 · Énoncé p. 907 (Nombre de surjections)
En notant $S_{n,p}$ ce nombre de surjections on a

$$p^n = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} S_{n,k}$$

puis utiliser la formule d'inversion de Pascal de l'exercice 14.

Indication 33 · Énoncé p. 907 (Nombre de dérangements, les autres méthodes)
Au pire faire l'exercice 31 pour obtenir la formule explicite

$$D_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

et vérifier que cette formule vérifie les deux points précédents. Mais il y a des méthodes plus simples à chaque fois.

1. Distinguer selon l'image de n et selon qu'il s'agisse d'une transposition ou d'un cycle de longueur plus grande.
2. Interpréter $e^x \sum D_k \frac{x^k}{k!}$ en lien avec l'exercice 31.

Indication 34 · Énoncé p. 908 (Nombre de surjections, les autres méthodes)
Au pire faire l'exercice 32 pour obtenir la formule explicite

$$S_{n,p} = \sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} k^n$$

et vérifier que cette formule vérifie les trois points précédents. Mais il y a des méthodes plus simples à chaque fois.

1. Distinguer selon $f(n)$ et si il est atteint par d'autres éléments ou pas.
2. Distinguer selon $f^{-1}(\{p\})$.
3. Au pire la formule explicite, un peu mieux la récurrence, sinon développer et interpréter les surjections comme blocs.

Indication 35 · Énoncé p. 908 (Nombre de surjections: un cas très particulier)
Il y a un élément choisi deux fois. Le choisir.

Indication 36 · Énoncé p. 908 (Nombre d'involutions)
Noter u_n le nombre d'involutions d'un ensemble à n éléments.

En distinguer selon que l'image du dernier élément est lui même ou un autre élément on obtient

$$u_n = u_{n-1} + (n-1)u_{n-2}$$

puis résoudre.

Alternativement il s'agit de compter le nombre de permutations ne possédant que des deux cycles.

On obtient alors

$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} \frac{(2k)!}{k!2^k}$$

(cf automorphismes de S_n), mais ce n'est pas une relation de récurrence.

Indication 37 · Énoncé p. 909 (Encore des capitaines)
Distinguer sur les cardinaux en choisissant d'abord B puis A (ou A puis B) puis sommer.

Reconnaître une formule des capitaines.

Indication 38 · Énoncé p. 909 (Nombre de partitions (nombres de Bell))
Cela revient à compter le nombre de partitions.

Singulariser un élément a d'un ensemble à n élément et distinguer selon la taille de la classe d'équivalence de a.

On obtient avec $k \in [\![1, n+1]\!]$ ce cardinal $\binom{n+1}{k}$ possibilités pour sa classe d'équivalence et B_{n+1-k} possibilités pour le reste.

Sommer sur k et travailler un peu la somme.

Indication 39 · Énoncé p. 909 (Deux généralisations)

1. Reconnaître une généralisation de la formule des capitaines. Au choix utiliser la formule explicite, procéder par récurrence, ou interpréter comme un choix de rôles télescopiques.
2. Reconnaître une généralisation de la formule de Vandermonde. Au choix se compliquer la tâche par récurrence ou juste développer $(1+X)^{p_1} \cdots (1+X)^{p_r}$.

Indication 40 · Énoncé p. 909 (Ronds et batons translatés)
Revient à

$$\sum_{i=1}^{p} (k_i - a_i) = n - \sum_{i=1}^{p} a_i.$$

Indication 41 · Énoncé p. 910 (Épaississement de la diagonale)
Faire un schéma. Cela représente le nombre de termes à une distance k de la diagonale.

Indication 42 · Énoncé p. 910 (Fonctions très strictements croissantes)
Montrer l'application qui à une telle fonction f associe la fonction $k \mapsto f(k) - (k-1)d$ permet de construire une bijection avec un ensemble de fonctions croissantes et utiliser l'exercice 4

Indication 43 · Énoncé p. 910 (Formule de Legendre)
Cf TD d'arithmétique.

Indication 44 · Énoncé p. 910 (Selon la taille de l'intersection)
Commencer par choisir l'intersection, puis A, puis B.

Indication 45 · Énoncé p. 910 (Diamètre fixé)
Pour $k \in [\![1, n-1]\!]$ construire une telle partie en

- ▷ Choisissant le minimum et par conséquent le maximum
- ▷ Choisir les éléments entre les deux

Indication 46 · Énoncé p. 911 (Pas de consécutifs (encore Fibo !))
Pour construire une telle partie de $[\![1, n]\!]$ distinguer selon que $n+1$ est dedans ou non.

On obtient la relation de récurrence de Fibonacci.

Indication 47 · Énoncé p. 911 (Nombre de parenthésages)
On obtient la relation de récurrence des nombres de Catalan, cf exercice 12.

Indication 48 · Énoncé p. 911 (Nombre de chemins positifs)
Ce sont les nombre de Catalan (pourquoi ?)

Indication 49 · Énoncé p. 911 (Classes d'équivalences de tailles égales)
Choisir successivement chaque classe d'équivalence:

- ▷ $\binom{np}{p}$ pour la première
- ▷ $\binom{(n-1)p}{p}$ pour la seconde
- ▷ etc.
- ▷ $\binom{2p}{p}$ pour l'avant dernière
- ▷ $\binom{p}{p}$ pour la dernière

puis ne pas oublier de diviser par $n!$ pour l'ordre.

Indication 50 · Énoncé p. 911 (Nombre de relations d'ordre total)
Cela revient à déterminer une bijection de $[\![1, n]\!]$ vers E (pourquoi ?) d'où $n!$.

Indication 51 · Énoncé p. 912 (Un peu de tarot)
RAS

Indication 52 · Énoncé p. 912 (Sécurité du téléphone)
RAS

Indication 53 · Énoncé p. 912 (Un exemple de crible)
On sait calculer le nombre d'entiers divisibles par k, il s'agit de $\lfloor N/k \rfloor$. Faire une formule du crible (à trois ensembles) pour éviter de compter plusieurs fois le même.

Indication 54 · Énoncé p. 912 (Intersection de diagonales)
Choisir un point d'intersection c'est choisir 4 sommets.

Indication 55 · Énoncé p. 913 (Variation autour des sommes)
Plusieurs méthodes, par exemple en distribué un à chacun puis répartir le reste.

Indication 56 · Énoncé p. 913 (Comptage avec pivot)
Compter de parties à $g+1+d$ éléments de $[\![0,n]\!]$.

Pour tout k compter le nombre de parties dont un k est un « pivot » avec g éléments à gauche et d éléments à droite.

Indication 57 · Énoncé p. 913 (Nombre de relations)
1. Il s'agit de compter le nombre de fonctions de $E \times E \to \{0,1\}$ ou encore le nombre de matrices $n \times n$ de coefficients 0 ou 1.
2. Idem mais en imposant la valeur sur la diagonale.
3. Idem mais cette fois-ci compter les matrices symétriques.

Indication 58 · Énoncé p. 913 (Nombre d'idempotents)
Distinguer selon $|\mathrm{Im}(f)|$. En notant k ce cardinal.
- ▹ Il y a $\binom{n}{k}$ choix pour l'image.
- ▹ Sur l'image il n'y a qu'un seul choix.
- ▹ Sur le complémentaire il y a autant de choix que d'applications d'un ensemble de $n-k$ éléments dans un ensemble à k éléments.

Somme sur k.

Indication 59 · Énoncé p. 913 (Maximum du produit à somme fixée)
Remarquer que:
- ▹ on peut se passer de 1,
- ▹ on peut se passer de 4 ou plus car pour $m \geq 4$, $2(m-2) \geq 4$,
- ▹ et $3 \times 3 \geq 2 \times 2 \times 2$.

On en déduit un résultat selon la congruence de n modulo 3.

On pourra faire le lien avec l'exercice 33.

Indication 60 · Énoncé p. 914 (Disjoints et non contenus)
1. Cela revient à compter le nombre de parties de $E \setminus A$.
2. Cela revient à compter le (complémentaire du) nombre de parties de A.
3. Cela revient à compter le nombre de parties de $E \setminus A$.

Indication 61 · Énoncé p. 914 (Somme de cardinaux de parties)

1. Somme de $k\binom{n}{k}$, ou bien par $|A| = \sum_{x\in E} \mathbb{1}_A(x)$ et en inversant les sommes.
2. On peut fixer d'abord l'intersection puis sommet ou tout simplement faire $|A \cap B| = \sum_{x\in E} \mathbb{1}_A(x)\mathbb{1}_B(x)$ et inverser les sommes.
3. Faire de même ou se ramener à l'intersection.

Indication 62 · Énoncé p. 914 (Nombre de solutions d'une équation ensembliste)

1. Regarder la condition pour qu'il y ait une solution. Puis regarder ce qu'il faut faire sur $A \setminus B$ et sur $E \setminus A$.
2. Faire de même ou juste passer au complémentaire.

Indication 63 · Énoncé p. 915 (Approximation diophantienne)
Remarquer que par principe des tiroirs il existe $i, j \in [\![0, n]\!]$ distincts tels que

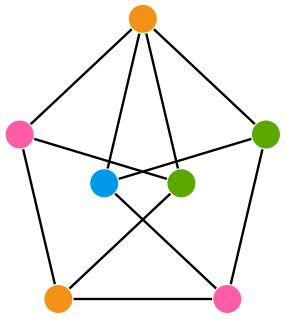
$$|(ix - \lfloor ix \rfloor) - (jx - \lfloor jx \rfloor)\ | < \frac{1}{n}.$$

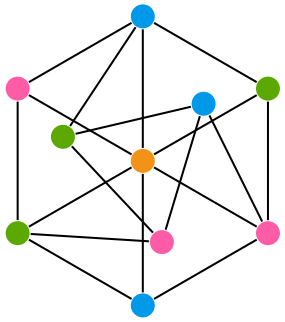
Remarquer ensuite que $q = |i - j|$ convient.

Indication 64 · Énoncé p. 915 (Tiroirs et groupes)
Étant donné $g \in G$ montrer que $\{a^{-1}g, a \in A\}$ rencontre B.

Indication 65 · Énoncé p. 915 (Nombre chromatique du plan)

1. Considérer un triangle équilatéral et un principe des tiroirs.
2. Exhiber un pavage hexagonal.
3. On pourra méditer au choix une des deux figures suivantes:





Indication 66 · Énoncé p. 915 (Une application des tiroirs)
Montrer la propriété plus forte: il existe $i, j \in [\![1, n+1]\!]$ distincts tels que $a_i = 2^{v_i} b_i$ et $a_j = 2^{v_j} b_j$ avec $b_i = b_j$ (et $v_i \leq v_j$).

Indication 67 · Énoncé p. 916 (Cardinaux et algèbre linéaire sur corps finis)

1. q^{n^2}
2. Cela revient à dénombre le nombre de familles libres de $\mathbb{K}^n$ de n éléments.
   - ▷ On a $q^n - 1$ possibilités pour le premier vecteur
   - ▷ Puis $q^n - q$ possibilités pour le second
   - ▷ etc.
   - ▷ Puis $q^n - q^{n-1}$ possibilités pour le dernier
3. Constater que le $\det : \mathrm{GL}_n(K) \to \mathbb{K}^*$ est un morphisme et que donc tous les $\det^{-1}(\{x\})$ ont le même cardinal (pourquoi ?).

Indication 68 · Énoncé p. 916 (Le problème des chapeaux, cas général)
Commencer par formaliser: on a

$$p_{k,n} = \frac{|\{\sigma \in S_n \mid N(\sigma) = k\}|}{n!}.$$

S'inspirer ensuite du calcul du nombre de dérangements (cas $k = 0$) pour obtenir la formule explicite (pour $k \leq n$)

$$p_{k,n} = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(-1)^i}{i!}.$$

Indication 69 · Énoncé p. 916 (Nombre de partitions)
Si une grande complexité ne vous effraie pas procéder par exemple de manière récursive.

Indication 70 · Énoncé p. 917 (Points entiers de boules pour diverses normes)
Faire des schémas.

1. Il s'agit de compter les points entiers dans un disque. Ce qui correspond presque à son aire. Pour cela encadrer par exemple par des rectangles.
2. Il s'agit de compter les points entiers dans un symplexe (par exemple pour $n = 3$ il s'agit d'un octaèdre). En encadrant par des hypercubes on peut trouver $\frac{2^n}{n!} R^n$.

Indication 71 · Énoncé p. 917 (Encore des indicatrices)
Intervertir une somme ou bien couple A avec $\overline{A}$.

Indication 72 · Énoncé p. 917 (Un chouette exercice de crible de M.V)
Constater que cela semble beaucoup à une formule du crible.

Pour les x_i entier il s'agit du crible pour $[\![1, x_i]\!]$.

Puis soit faire par densité soit considérer les $\int_0^A \mathbb{1}_{[0,x_i]}(t)\,\mathrm{d}t$.

Solutions

Solution pour l'exercice 5 · Énoncé p. 899 · Indication p. 918 (Symétrie des coefficients binomiaux)

1. On a d'après la formule explicite

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \binom{n}{n-k}$$

2. On a dans $\mathbb{K}(X)$,

$$X^n\left(1+\frac{1}{X}\right)^n = (1+X)^n$$

Par conséquent, en développant les membres de gauche et de droit par la formule du binôme,

$$X^n \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}X^{-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}X^k$$

i.e

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}X^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}X^k.$$

En effectuant le changement d'indice $j = n-k$ dans la somme de gauche, on obtient

$$\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{n-j}X^j = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}X^k.$$

Soit $k \in [\![0,n]\!]$. En considérant de part et d'autre le coefficient en X^k, on a

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

3. D'après les règles de calcul ensembliste, $\varphi \circ \varphi = \mathrm{Id}_{\mathcal{P}(E)}$.

Par conséquent φ est bijective (de bijection réciproque φ).

En notant pour tout entier k,

$$\mathcal{P}_k(E) = \{A \subset E \mid |A| = k\}$$

on a

- par interprétation combinatoire des coefficients binomiaux

$$|\mathcal{P}_k(E)| = \binom{n}{k}$$

$$|\mathcal{P}_{n-k}(E)| = \binom{n}{n-k}$$

- Par le cardinal d'un complémentaire

$$\varphi(\mathcal{P}_k(E)) \subset \mathcal{P}_{n-k}(E)$$

et donc comme $\varphi \circ \varphi = \mathrm{Id}_{\mathcal{P}(E)}$, on a

$$\varphi(\mathcal{P}_k(E)) \subset \mathcal{P}_{n-k}(E)$$

▷ Comme φ est une bijection

$$|\varphi(\mathcal{P}_k(E))| = |\mathcal{P}_k(E)|$$

et donc on a bien

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

4. Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Choisir k éléments parmi n revient à choisir les $n-k$ éléments dans le complémentaire donc

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

[Faire un schéma]

Chapitre 26

Déterminants

Énoncés 931
Indispensables 931
Thème: Autour de l'application déterminant 934
Thème: Déterminants classiques 939
Thème: comatrice 946
Thème: autour de Vandermonde 947
Thème: déterminants et blocs 953
Thème: encore des calculs en vrac 957
Thème: déterminants et arithmétique 960
Thème: déterminants et dénombrement 962
Thème: Wronskien et Cie 963
Indications 965
Solutions 981

Énoncés

Dans tout le TD $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$ (par exemple $\mathbb{K} = \mathbb{C}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{Q}$).

De plus, sauf mention du contraire $n \in \mathbb{N}^*$ est un entier naturel non nul.

Indispensables

Exercice 1 (◔★♣ Det et automorphisme de corps)
Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$.

Montrer que

$$\det\left(\overline{A}\right) = \overline{\det(A)}.$$

Indication p. 965

Exercice 2 (◔★♠ Polynôme caractéristique)
Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

Montrer que l'application $t \mapsto \det(A - tI_n)$ est polynomiale.

Déterminer :

- son degré,
- son coefficient dominant et son coefficient constant,
- son coefficient d'ordre $n-1$.

Indication p. 965

Exercice 3 (◔★♣ Déterminant triangulaire par blocs)
Soient $A \in \mathrm{M}_p(\mathbb{K})$, $B \in \mathrm{M}_q(\mathbb{K})$.

Montrer que

$$\det\left(\begin{pmatrix} A & * \\ 0 & B \end{pmatrix}\right) = \det(A)\det(B).$$

Indication p. 965

Exercice 4 (◔★♣ Déterminant de Vandermonde)
Rappeler et redémontrer l'expression d'un déterminant de Vandermonde.

Indication p. 965

Exercice 5 (◔★♠ Inversibilité et changement de corps)
Soit $\mathbb{L}$ un corps tel que $\mathbb{K} \subset \mathbb{L}$. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

Montrer que

$$A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \Leftrightarrow A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{L}).$$

Indication p. 965

Exercice 6 (◔★ Similitude et changement de corps)

1. Soient $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

On suppose $A + iB \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Montrer qu'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $A + tB \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

2. Soient $M_1, M_2 \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \subset \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$.

On suppose que M_1 et M_2 sont semblables comme matrices de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$.

Montrer que M_1 et M_2 sont semblables comme matrices de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

Indication p. 965

Exercice 7 (◔★ Matrices de rang 1)
Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice telle que $\mathrm{rg}(A) = 1$.

Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\det(A + \lambda I_n) = \lambda^{n-1} \operatorname{tr}(A) + \lambda^n$.

Indication p. 965

Exercice 8 (◔★♣ Groupe spécial linéaire)
On note

$$\mathrm{SL}_n(\mathbb{K}) = \{A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \mid \det(A) = 1\}.$$

Montrer que $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ est un groupe.

Indication p. 965

Exercice 9 (◔★♠ Densité des matrices inversibles: version première année)
Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer qu'à partir d'un certain rang les éléments de la suite $\left(A + \frac{1}{p} I_n\right)_{p \in \mathbb{N}^*}$ sont inversibles.
2. Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$.

   Montrer que
   $$\left(A + \frac{1}{p} I_n\right)_{i,j} \underset{p \to +\infty}{\longrightarrow} (A)_{i,j}.$$
3. Commenter.

Indication p. 965

Exercice 10 (◑★♠ Générateurs de SL_n)
On rappelle que $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ est l'ensemble des matrices de déterminant 1.

Montrer que toute matrice de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ peut s'écrire comme produit de matrices de transvections.

Indication p. 966

Exercice 11 (◔★ Déterminant de matrice antisymétrique)
Montrer que **si** n est impair **alors** toute matrice antisymétrique de taille $n \times n$ est non inversible.

Indication p. 966

Les exercices suivants sont classés par thèmes arbitraires.

Il est par ailleurs essentiel de faire les trois grands classiques suivants

- le rang de la comatrice 45,
- l'utilisation du complément de Schur pour les déterminants par blocs 60,
- l'étude des matrices inversibles sur un anneau commutatif 80.

Thème: Autour de l'application déterminant

Exercice 12 (◑★ Gradient du déterminant)
Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ et $H \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

On pose

$$\begin{aligned}\varphi_H : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}\\ t &\mapsto \det(A+tH)\end{aligned}$$

1. Pourquoi φ_H est-elle dérivable ?
2. On suppose que $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

   Montrer $\varphi_H'(0) = \det(A)\operatorname{tr}(A^{-1}H)$.
3. Montrer que de manière générale,

$$\varphi_H'(0) = \operatorname{tr}\big((\mathrm{Com}(A))^\top H\big)$$

Indication p. 966

Exercice 13 (◔★♠ Polynôme et déterminant: le cas rang quelconque)
Soient $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

Montrer que la fonction $t \mapsto \det(A+tB)$ est polynomiale de degré inférieur ou égal à $\mathrm{rg}(B)$.

Indication p. 966

Exercice 14 (◑★ Dimension de l'ev des formes alternées)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.

Soit $p \in \mathbb{N}$, on note $\Lambda^p(E)$ l'ensemble des formes p-linéaires alternées sur E.

1. Montrer que $\Lambda^p(E)$ est un espace vectoriel.
2. Déterminer $\dim(\Lambda^p(E))$.

Indication p. 967

Exercice 15 (◔★ Déterminant d'une somme ?)
On suppose que $n \geq 2$.

Montrer que pour tout $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, **si** $A \neq O_n$ **alors**

$$\exists B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}), \det(A+B) \neq \det(A) + \det(B).$$

Indication p. 967

Exercice 16 (◔★ Des matrices inversibles partout dans toutes les directions)
Soit $B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ et $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

Montrer que $tA + B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ pour tout $t \in \mathbb{K}$ sauf au plus n éléments.

Indication p. 967

Exercice 17 (◑★ Un lien entre déterminant et trace)
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

Soit $\mathcal{B}$ une base de E.

Montrer que pour toute famille $(x_1, ..., x_n) \in E^n$,

$$\sum_{j=1}^{n} \det_{\mathcal{B}}\big(x_1, ..., x_{j-1}, u\big(x_j\big), x_{j+1}, ..., x_n\big) = \mathrm{tr}(u) \det_{\mathcal{B}}(x_1, ..., x_n).$$

Indication p. 967

Exercice 18 (◔★♠ Dérivée d'une forme multilinéaire)
Soient $C_1, ..., C_n \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$.

On pose

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto \det(C_1(t), ..., C_n(t)) \end{aligned}$$

Montrer que φ est dérivable et que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\varphi'(t) = \sum_{j=1}^{n} \det\big(C_1(t), ..., C_{j-1}(t), C_j'(t), C_{j+1}(t), ..., C_n(t)\big).$$

Indication p. 967

Exercice 19 (◑★ Un cas très particulier de déterminant de somme)
Soient $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

On suppose de plus que $\mathrm{rg}(B) = 1$.

Montrer que

$$\det(A + B) = \det(A) + \mathrm{tr}\big(\mathrm{Com}(A)^\top B\big).$$

Indication p. 967

Exercice 20 (◔★ Déterminant d'une symétrie)
Soit $s \in \mathcal{L}(E)$ une symétrie.

Déterminer $\det(s)$ en fonction des dimensions des espaces caractéristiques.

Indication p. 967

Exercice 21 (◔☆ Déterminant de la transposée)
Déterminer le déterminant de l'application transposée

$$\begin{aligned} \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) &\to \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \\ A &\mapsto A^\top. \end{aligned}$$

Indication p. 967

Exercice 22 (◔☆ Symétrisation et antisymétrisation)
Soient $p \in \mathbb{N}$ et f une forme p-linéaire sur E.

1. Montrer que

$$\begin{aligned} \hat{f} : E^p &\to \mathbb{K} \\ (x_1, ..., x_p) &\mapsto \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} f\left(x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(p)}\right) \end{aligned}$$

est une forme p-linéaire symétrique.

2. Montrer que

$$\begin{aligned} \tilde{f} : E^p &\to \mathbb{K} \\ (x_1, ..., x_p) &\mapsto \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} \varepsilon(\sigma) f\left(x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(p)}\right) \end{aligned}$$

est une forme p-linéaire antisymétrique.

Indication p. 968

Exercice 23 (◑★ Morphismes vers un groupe abélien)
Soit G un groupe **abélien**.

Soit $\varphi : \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \to G$ un morphisme de groupes.

Montrer qu'il existe $\psi : \mathbb{K}^* \to G$ un morphisme de groupes tel que

$$\varphi = \psi \circ \det.$$

Indication p. 968

Exercice 24 (◑★ Multiplicativité et inversibilité)
Soit $f : \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ non constante telle que

$$\forall (A, B) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}), f(AB) = f(A)f(B).$$

Montrer que

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) = \{A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \mid f(A) \neq 0\}.$$

Indication p. 968

Exercice 25 (◕★ D'autres caractérisations du déterminant)
Commencer par traiter l'exercice 24.

1. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ telles que

$$\forall (A, B) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}), f(AB) = f(A)f(B).$$

$$\forall A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}), \mathrm{rg}(A) = 1 \Rightarrow f(I_n + A) = 1 + \mathrm{tr}(A).$$

2. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ telles que

$$\forall (A, B) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}), f(AB) = f(A)f(B).$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, f\left(\begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}\right) = \lambda.$$

Indication p. 968

Exercice 26 (◔★ Le début de l'étude du permanent)
Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

On appelle *permanent* de A le scalaire

$$\mathrm{Perm}(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{j=1}^{n} a_{\sigma(j),j}.$$

1. Montrer que

$$\begin{aligned}(\mathbb{K}^n \times \cdots \times \mathbb{K}^n) &\to \mathbb{K}\\ (C_1, ..., C_n) &\mapsto \mathrm{Perm}(C_1, ..., C_n)\end{aligned}$$

est n-linéaire symétrique.

2. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ et Q une matrice de dilatation ou de transposition.

Exprimer $\mathrm{Perm}(AQ)$ en fonction de $\mathrm{Perm}(A)$ et de Q.

3. Que dire des transvections ?

4. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

Montrer que $\mathrm{Perm}(A^\top) = \mathrm{Perm}(A)$.

5. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

On note pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, A_{ij} la matrice obtenue en supprimant la i-ème ligne et la j-ème colonne de A.

Montrer que

$$\forall j \in [\![1,n]\!], \mathrm{Perm}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\,\mathrm{Perm}\big(A_{ij}\big)$$

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \mathrm{Perm}(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,\mathrm{Perm}\big(A_{ij}\big).$$

Indication p. 968

Exercice 27 (◕☆ Un produit extérieur sans le dire)

1. Soient φ une forme linéaire sur E et f une forme p-linéaire alternée sur E.

Montrer que

$$\begin{aligned}\varphi \wedge f : E^{p+1} &\to \mathbb{K} \\ \big(x_1, ..., x_{p+1}\big) &\mapsto \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^i \varphi(x_i) f\big(x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_{p+1}\big)\end{aligned}$$

est une forme $p+1$-linéaire alternée sur E.

2. Soient f une forme p-linéaire alternée sur E et g une forme q-linéaire alternée sur E.

On note

$$S_{p,q} = \big\{\sigma \in S_{p+q} \mid \sigma(1) < \cdots < \sigma(p) \ \text{ et } \ \sigma(p+1) < \cdots < \sigma(p+q)\big\}.$$

Montrer que

$$\begin{aligned}f \wedge g : E^{p+q} &\to \mathbb{K} \\ \big(x_1, ..., x_{p+q}\big) &\mapsto \sum_{\sigma \in S_{p,q}} \varepsilon(\sigma) f\big(x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(p)}\big) g\big(x_{\sigma(p+1)}, ..., x_{\sigma(p+q)}\big)\end{aligned}$$

est une forme $p+q$-linéaire alternée.

Indication p. 969

Thème: Déterminants classiques

Exercice 28 (◑★ Matrice de Toeplitz tridiagonale)
Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on note

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} b & c & 0 & \cdots & 0 \\ a & b & c & \cdots & 0 \\ 0 & a & b & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & c \\ 0 & \cdots & 0 & a & b \end{vmatrix}$$

1. Déterminer une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 sur $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

2. En déduire une expression explicite de Δ_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Indication p. 969

Exercice 29 (◕★ Liberté de fonctions et évaluations)
Soient Ω un ensemble non vide.

1. Soit $(f_1, ..., f_n, f_{n+1}) \in (\mathcal{F}(\Omega, \mathbb{K}))^{n+1}$, $A = \left(a_{ij}\right)_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ une matrice inversible, et $B \in \mathrm{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ une ligne.

Montrer que

$$\forall x \in \Omega, \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & f_1(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & f_n(x) \\ b_1 & \cdots & b_n & f_{n+1}(x) \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad f_{n+1} \in \mathrm{Vect}(f_1, ..., f_n).$$

2. Soit $(f_1, ..., f_n) \in (\mathcal{F}(\Omega, \mathbb{K}))^n$.

Montrer que

$$(f_1, ..., f_n) \text{ est libre} \quad \Leftrightarrow \quad \exists (x_1, ..., x_n) \in \Omega^n, \begin{vmatrix} f_1(x_1) & f_1(x_2) & \cdots & f_1(x_n) \\ f_2(x_1) & f_2(x_2) & \cdots & f_2(x_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_n(x_1) & f_n(x_2) & \cdots & f_n(x_n) \end{vmatrix} \neq 0.$$

3. Soit $(f_1, ..., f_n) \in (\mathcal{F}(\Omega, \mathbb{K}))^n$. Conclure que

$$\mathrm{rg}(f_1, ..., f_n) = \max_{(x_1,...,x_n)\in\Omega^n} \left(\mathrm{rg}\left(f_i(x_j)\right)_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq n} \right).$$

Indication p. 969

Exercice 30 (◔★ Règle de Sarrus)
Soit

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{K}).$$

1. Montrer que

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23}$$

et faire un schéma.

2. Dans le cas où A est inversible, expliciter les coefficients de l'inverse de A en fonction des coefficients de A.

Indication p. 969

Exercice 31 (◑★ Déterminant circulant)
Soient $(a_0, ..., a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ et

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ a_{n-2} & a_{n-1} & a_0 & \cdots & a_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_0 \end{pmatrix}$$

1. On pose $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$.

Déterminer un polynôme $P \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ tel que $A = P(J)$.

2. On pose $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ et $\Omega \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ définie par,

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!], (\Omega)_{i,j} = \omega^{(i-1)(j-1)}.$$

Montrer que $\Omega \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et calculer $\Omega^{-1} J \Omega$.

3. En déduire $\det(A)$.

Indication p. 969

Exercice 32 (◔★ Déterminant et matrice compagnon)
Soit $P = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k + X^n \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme unitaire de degré n.

On appelle **matrice compagnon de P** la matrice

$$C_P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}).$$

Montrer que

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \det(\lambda I_n - C_P) = P(\lambda).$$

Indication p. 969

Exercice 33 (◔★ Déterminant du produit matriciel)
Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ et $p \in \mathbb{N}^*$.

On considère

$$\begin{aligned} g_A : \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K}) &\to \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ M &\mapsto AM \end{aligned}$$

Déterminer $\det(g_A)$.

Indication p. 969

Exercice 34 (◔☆ Déterminant de la conjugaison)
Soit E de dimension finie et $u \in \mathrm{GL}(E)$.

Calculer le déterminant de

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(E) &\to \mathcal{L}(E) \\ v &\mapsto uvu^{-1}. \end{aligned}$$

Indication p. 969

Exercice 35 (◔★ Matrice antidiagonale)
Soit $(a_1, ..., a_n) \in \mathbb{K}^n$.

Calculer le déterminant.

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & \cdots & a_2 & 0 \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n-1} & \cdots & 0 & 0 \\ a_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Indication p. 969

Exercice 36 (◑★ Matrice antidiagonale: polynôme caractéristique)
Soit $(a_1, ..., a_n) \in \mathbb{K}^n$.

Déterminer selon la valeur de $\lambda \in \mathbb{K}$ la valeur de

$$\det\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & \cdots & a_2 & 0 \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n-1} & \cdots & 0 & 0 \\ a_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} - \lambda I_n\right).$$

Indication p. 970

Exercice 37 (◕★ Grand classique: Résultant)
Soient $P = \sum_{i=0}^{p} a_i X^i$ et $Q = \sum_{j=0}^{q} b_j X^j$ deux polynômes.

On appelle le résultant de P et Q, noté $\mathrm{Res}(P, Q)$ le déterminant

$$\mathrm{Res}(P,Q) = \begin{vmatrix} a_0 & 0 & \cdots & 0 & b_0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & a_0 & \cdots & 0 & b_1 & b_0 & \cdots & 0 \\ a_2 & a_1 & \ddots & 0 & b_2 & b_1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & a_0 & \vdots & \vdots & \ddots & b_0 \\ a_p & a_{p-1} & \cdots & \vdots & b_q & b_{q-1} & \cdots & \vdots \\ 0 & a_p & \ddots & \vdots & 0 & b_q & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & a_{p-1} & \vdots & \vdots & \ddots & b_{q-1} \\ 0 & 0 & \cdots & a_p & 0 & 0 & \cdots & b_q \end{vmatrix}$$

On considère l'application linéaire φ définie par

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{K}_{q-1}[X] \times \mathbb{K}_{p-1}[X] &\to \mathbb{K}_{p+q-1}[X] \\ (U, V) &\mapsto PU + QV \end{aligned}$$

1. Exprimer $\mathrm{Im}(\varphi)$ à l'aide de $P \wedge Q$.
2. Déterminer la matrice de φ dans les bases canoniques.
3. En déduire

$$\mathrm{Res}(P, Q) = 0 \Leftrightarrow (P \wedge Q \neq 1)$$

Indication p. 970

Exercice 38 (◔★ Discriminant d'un polynôme)
Commencer par traiter l'exercice 37.

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$.

1. Montrer que P admet au moins une racine multiple ssi $\text{Res}(P, P') = 0$.
2. Dans les cas $P = aX^2 + bX + c$ et $P = X^3 + pX + q$, donner l'expression explicite de $\text{Res}(P, P')$ en fonction des coefficients de P.
3. Commenter.

Indication p. 970

Exercice 39 (◔★ Autour de la matrice d'Attila I)
Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

Déterminer

$$\begin{vmatrix} 1+\lambda & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+\lambda & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+\lambda \end{vmatrix}.$$

Indication p. 970

Exercice 40 (◑★ Autour de la matrice d'Attila II)
Soit $(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$.

Déterminer

$$\begin{vmatrix} 1+\lambda_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+\lambda_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+\lambda_n \end{vmatrix}.$$

Indication p. 970

Exercice 41 (◑★ Des Huns très bien camouflés ou le déterminant de Hurwitz)
Soient $(a,c) \in \mathbb{K}^2$ et $(b_1,...,b_n) \in \mathbb{K}^n$.

$$A = \begin{pmatrix} b_1 & c & c & \cdots & c \\ a & b_2 & c & \cdots & c \\ a & a & b_3 & \ddots & c \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a & a & a & \cdots & b_n \end{pmatrix}.$$

1. Soit $J = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$.

Montrer que $f : t \mapsto \det(A+tJ)$ est une fonction affine.

2. Déterminer $\det(A)$.

Indication p. 970

Exercice 42 (◔★♠ Déterminant d'une matrice de permutation)
Soit $\sigma \in S_n$.

On note $P_\sigma = \left(\delta_{j=\sigma(i)}\right)_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq n}} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

Déterminer $\det(P_\sigma)$.

Indication p. 970

Exercice 43 (◑★ Déterminant en L)
Soit $(a_1,...,a_n) \in \mathbb{K}^n$.

Déterminer

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_1 & a_1 & \cdots & a_1 & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_2 & \cdots & a_2 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_3 & a_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \end{vmatrix}$$

Indication p. 970

Exercice 44 (◕☆ Matrice anticirculante)
Soit $(a_0, ..., a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$.

On pose

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_0 \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \iddots & \vdots \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} \end{pmatrix}$$

Montrer que $\det(A) = (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} \prod_{\zeta \in \mathbb{U}_n} P(\zeta)$ où $P = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$.

Indication p. 970

Thème: comatrice

Exercice 45 (◔★♠ Rang de la comatrice)
Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Montrer que si $\mathrm{rg}(A) = n$ alors $\mathrm{rg}(\mathrm{Com}(A)) = n$.
2. Montrer que si $\mathrm{rg}(A) \leq n-2$ alors $\mathrm{rg}(\mathrm{Com}(A)) = 0$.
3. Montrer que si $\mathrm{rg}(A) = n-1$ alors $\mathrm{rg}(\mathrm{Com}(A)) = 1$.

Indication p. 971

Exercice 46 (◔★ Comatrice de la comatrice)
Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ avec $n \geq 2$.

Montrer que $\mathrm{Com}(\mathrm{Com}(A)) = \det(A)^{n-2} A$.

Indication p. 971

Exercice 47 (◔☆ Comatrice et transposée)
Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

Montrer que $\mathrm{Com}(A^\top) = \mathrm{Com}(A)^\top$.

Indication p. 971

Exercice 48 (◑★ Comatrice et produit)
Soient $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

Montrer que

$$\mathrm{Com}(AB) = \mathrm{Com}(A)\,\mathrm{Com}(B).$$

Indication p. 971

Exercice 49 (◑☆ Image de la comatrice)
Déterminer l'image de l'application comatrice c'est à dire

$$\{\mathrm{Com}(A), A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})\}.$$

Indication p. 971

Thème: autour de Vandermonde

Exercice 50 (◔★♣ Vandermonde par changement de base)
Soit $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{K}^n$ deux à deux distincts.

1. Montrer que pour toute famille $(P_0, ..., P_{n-1})$ exactement échelonnée et unitaire on a

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} P_0(x_1) & P_1(x_1) & \cdots & P_{n-1}(x_1) \\ P_0(x_2) & P_1(x_2) & \cdots & P_{n-1}(x_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ P_0(x_n) & P_1(x_n) & \cdots & P_{n-1}(x_n) \end{vmatrix}$$

2. En déduire l'expression du déterminant de Vandermonde.

Indication p. 971

Exercice 51 (◔★ Vandermonde par variation d'un coefficient)
Soit $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{K}^n$ deux à deux distincts.

Pour $\lambda \in \mathbb{K}$ on pose

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} & x_1^n \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-1} & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} & x_n^n \\ 1 & \lambda & \cdots & \lambda^{n-1} & \lambda^n \end{vmatrix}$$

1. Montrer que $\lambda \mapsto P(\lambda)$ est une fonction polynomiale de degré n.

   Comme $\mathbb{K}$ est infini on identifie cette fonction à un polynôme P. Quel est son coefficient dominant ?
2. Déterminer n racines distinctes de P.
3. En déduire une nouvelle démonstration de l'expression d'un déterminant de Vandermonde.

Indication p. 972

Exercice 52 (◑★ Vandermonde et coefficient dominant de Lagrange)
Soit $(x_1, ..., x_{n-1}, x_n) \in \mathbb{K}^n$.

On pose V_n la matrice de Vandermonde

$$V_n = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-2} & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & \cdots & x_{n-1}^{n-2} & x_{n-1}^{n-1} \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-2} & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

et V_{n-1} la matrice extraite

$$V_{n-1} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & \cdots & x_{n-1}^{n-2} \end{pmatrix}.$$

1. Que dire de $\det(V_n)$ si les $\left(x_j\right)_{1 \leq j \leq n}$ ne sont pas deux à deux distincts ?

   On suppose désormais qu'ils sont deux à deux distincts.
2. Déterminer la n-ème ligne de $(V_n)^{-1}$.
3. En déduire que

$$\det(V_n) = \prod_{i=1}^{n-1} (x_n - x_i) \det(V_{n-1}).$$

4. En déduire une nouvelle preuve de la valeur des déterminants de Vandermonde.

Indication p. 972

Exercice 53 (◔★ Vandermonde par pivot)
Soit $(x_1, ..., x_{n-1}, x_n) \in \mathbb{K}^n$ deux à deux distincts.

On pose V_n la matrice de Vandermonde

$$V_n = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-2} & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & \cdots & x_{n-1}^{n-2} & x_{n-1}^{n-1} \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-2} & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

1. Montrer que

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-2} & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & \cdots & x_{n-1}^{n-2} & x_{n-1}^{n-1} \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-2} & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 - x_n & \cdots & (x_1 - x_n)x_1^{n-3} & (x_1 - x_n)x_1^{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{n-1} - x_n & \cdots & (x_{n-1} - x_n)x_{n-1}^{n-3} & (x_{n-1} - x_n)x_{n-1}^{n-2} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

2. En déduire une nouvelle preuve du déterminant de Vandermonde.

Indication p. 972

Exercice 54 (◑★ Vandermonde par translation)
Soit $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{K}^n$.

On définit

$$\varphi : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$$
$$t \mapsto \begin{vmatrix} 1 & x_1 + t & \cdots & (x_1 + t)^{n-2} & (x_1 + t)^{n-1} \\ 1 & x_2 + t & \cdots & (x_2 + t)^{n-2} & (x_2 + t)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n + t & \cdots & (x_n + t)^{n-2} & (x_n + t)^{n-1} \end{vmatrix}$$

1. Montrer que φ est dérivable et calculer φ'.
2. En déduire une nouvelle démonstration de l'expression d'un déterminant de Vandermonde.

Indication p. 972

Exercice 55 (◑★ Vandermonde à trou)
Soit $(i,j) \in [\![0, n-1]\!]^2$.

Soient $(\lambda_0, ..., \lambda_{i-1}, \lambda_{i+1}, ..., \lambda_{n-1}) \in \mathbb{K}^{n-1}$.

Déterminer

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda_0 & \cdots & \lambda_0^{j-1} & \lambda_0^{j+1} & \cdots & \lambda_0^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_{i-1} & \cdots & \lambda_{i-1}^{j-1} & \lambda_{i-1}^{j+1} & \cdots & \lambda_{i-1}^{n-1} \\ 1 & \lambda_{i+1} & \cdots & \lambda_{i+1}^{j-1} & \lambda_{i+1}^{j+1} & \cdots & \lambda_{i+1}^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_{n-1} & \cdots & \lambda_{n-1}^{j-1} & \lambda_{n-1}^{j+1} & \cdots & \lambda_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix}$$

Indication p. 972

Exercice 56 (◕★ Déterminant de Cauchy)
Soient $(a_1,...,a_n) \in \mathbb{K}^n$ et $(b_1,...,b_n) \in \mathbb{K}^n$ tels que pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2, a_i + b_j \neq 0$.

On cherche à calculer

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_2+b_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \frac{1}{a_n+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_n+b_n} \end{vmatrix}$$

1. Que dire si les $(a_i)_{1\leq i\leq n}$ ne sont pas deux à deux distincts ou si les $\left(b_j\right)_{1\leq j\leq n}$ ne sont pas deux à deux distincts ? On suppose dans la suite que ces familles sont deux à deux distinctes.

2. Soit $(\lambda_1,...,\lambda_{n-1}) \in \mathbb{K}^{n-1}$ et

$$F_n(X) = \frac{1}{X+a_n} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\lambda_i}{X+a_i}.$$

Montrer que

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_2+b_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{a_{n-1}+b_1} & \frac{1}{a_{n-1}+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}+b_n} \\ F_n(b_1) & F_n(b_2) & \cdots & F_n(b_n) \end{vmatrix}$$

3. On note L_n le polynôme d'interpolation de Lagrange en b_n relativement à $(b_1,...,b_{n-1},b_n)$, c'est à dire

$$L_n = \frac{\prod_{j=1}^{n-1}(X-b_j)}{\prod_{j=1}^{n-1}(b_n-b_j)}.$$

Déterminer la décomposition en éléments simples de

$$\frac{L_n(X)}{\prod_{i=1}^{n}(X+a_i)}.$$

4. Conclure que

$$\Delta_n = \frac{\prod_{i_1<i_2}\left(a_{i_2}-a_{i_1}\right)\prod_{j_1<j_2}\left(b_{j_2}-b_{j_1}\right)}{\prod_{i,j}(a_i+b_j)}.$$

Indication p. 972

Exercice 57 (◕☆ Il y a du Vandermonde derrière)
Soient $(\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{C}^n$ et $(\beta_1, ..., \beta_n) \in \mathbb{C}^n$.

1. Déterminer

$$\det\left(\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_i^{k-1}\beta_j^{n-k}\right)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}\right)$$

2. En déduire

$$\begin{vmatrix} (\alpha_1+\beta_1)^{n-1} & (\alpha_1+\beta_2)^{n-1} & \cdots & (\alpha_1+\beta_n)^{n-1} \\ (\alpha_2+\beta_1)^{n-1} & (\alpha_2+\beta_2)^{n-1} & \cdots & (\alpha_2+\beta_n)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\alpha_n+\beta_1)^{n-1} & (\alpha_n+\beta_2)^{n-1} & \cdots & (\alpha_n+\beta_n)^{n-1} \end{vmatrix} = \left(\prod_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}\right)\prod_{i<j}(\alpha_j-\alpha_i)(\beta_i-\beta_j).$$

Indication p. 973

Exercice 58 (◑☆ Vandermonde puis un produit)
Soit $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{K}^n$.

Déterminer

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-2} & x_2x_3...x_n \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-2} & x_1x_3...x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-2} & x_1x_2...x_{n-1} \end{vmatrix}.$$

Indication p. 973

Exercice 59 (◑☆ Encore des Vandermonde peu intéressants)
Soit $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{K}^n$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note $s_k = \sum_{i=1}^{n} x_i^k$.

1. Déterminer

$$\begin{vmatrix} s_1 & s_2 & \cdots & s_{n-1} & s_n \\ s_2 & s_3 & \cdots & s_n & s_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ s_n & s_{n+1} & \cdots & s_{2n-2} & s_{2n-1} \end{vmatrix}$$

2. Déterminer pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_{n-1} & 1 \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_n & \lambda \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ s_n & s_{n+1} & \cdots & s_{2n-1} & \lambda^n \end{vmatrix}.$$

Indication p. 973

Thème: déterminants et blocs

Exercice 60 (◔★♠ Complément de Schur)
Soient $A \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$, $B \in \mathrm{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $C \in \mathrm{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ et $D \in \mathrm{M}_q(\mathbb{K})$. Montrer que

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & * \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{vmatrix}$$

Indication p. 973

Exercice 61 (◔★ Complément de Schur et calcul de déterminant)
Soient $A \in \mathrm{M}_p(\mathbb{K})$, $B \in \mathrm{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $C \in \mathrm{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ et $D \in \mathrm{M}_q(\mathbb{K})$.

Montrer que

- ▹ Si $\det(A) \neq 0$ alors

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \det(A)\det(D - CA^{-1}B).$$

- ▹ Si $\det(D) \neq 0$ alors

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \det(D)\det(A - BD^{-1}C).$$

Indication p. 973

Exercice 62 (◑★ Blocs et matrices 2x2)
Soient $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Montrer que

$$\det\left(\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}\right) = \det(A+B)\det(A-B).$$

2. Montrer que

$$\det\left(\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}\right) = \det(A+iB)\det(A-iB).$$

Indication p. 973 · Solution p. 981

Exercice 63 (◔★ Blocs 2x2 de même taille et qui commutent)
Soient $A, B, C, D \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

On suppose de plus que A est **inversible** et que A et C **commutent**.

Montrer que

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \det(AD - CB).$$

Indication p. 973

Exercice 64 (◑★ Blocs 2x2 de même taille et qui commutent, bis)
Soient $A, B, C, D \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

On suppose de plus que A et C **commutent**.

Montrer que

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \det(AD - CB).$$

Indication p. 974

Exercice 65 (◑☆ Complément de Schur et inverse par blocs)
Soient $A \in \mathrm{M}_p(\mathbb{K})$, $B \in \mathrm{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $C \in \mathrm{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ et $D \in \mathrm{M}_q(\mathbb{K})$.

On suppose que $\det(A) \neq 0$ et $\det(D - CA^{-1}B) \neq 0$ et on pose $\Delta = (D - CA^{-1}B)$.

Montrer que

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

est inversible et

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1}\big(I_p + B\Delta^{-1}CA^{-1}\big) & -A^{-1}B\Delta^{-1} \\ -\Delta^{-1}CA^{-1} & \Delta^{-1} \end{pmatrix}.$$

Commenter.

Indication p. 974

Exercice 66 (◑★ Identité de Sylvester (pour les déterminants))
Soient $A \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathrm{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.

Montrer que

$$\det(I_n + AB) = \det\big(I_p + BA\big).$$

Indication p. 974

Exercice 67 (◑☆ Un cas particulier de déterminant par blocs)
Soit $A \in \mathrm{M}_{n-1}(\mathbb{K})$, $L \in \mathrm{M}_{1,n-1}(\mathbb{K})$, $C \in \mathrm{M}_{n-1,1}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

Montrer que

$$\begin{vmatrix} \lambda & L \\ C & A \end{vmatrix} = \lambda \det(A) - L\mathrm{Com}(A)^\top C.$$

Indication p. 974

Exercice 68 (◔★ Déterminant et opérations du pivot par blocs)
Soient $A_{11} \in \mathrm{M}_p(\mathbb{K}), A_{12} \in \mathrm{M}_{p,q}(\mathbb{K}), A_{21} \in \mathrm{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ et $A_{22} \in \mathrm{M}_q(\mathbb{K})$.

1. Soit $\Lambda \in \mathrm{M}_p(\mathbb{K})$.

Montrer que

$$\begin{vmatrix} \Lambda A_{11} & \Lambda A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} = \det(\Lambda) \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix}$$

2. Soit $B \in \mathrm{M}_{q,p}(\mathbb{K})$.

Montrer que

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} + BA_{11} & A_{22} + BA_{12} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix}$$

3. Montrer que

$$\begin{vmatrix} A_{21} & A_{22} \\ A_{11} & A_{12} \end{vmatrix} = (-1)^{pq} \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix}$$

Indication p. 974

Exercice 69 (◕☆ Déterminant par blocs qui commutent: cas général)
Soient $\left(A_{ij}\right)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \in \left(\mathrm{M}_p(\mathbb{K})\right)^{[\![1,n]\!]^2}$ des matrices **qui commutent deux à deux**.

On pose $A \in \mathrm{M}_{np}(\mathbb{K})$ la matrice par blocs

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

1. On suppose que $A_{nn} \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$. Montrer que

$$\det(A) = \det(A_{nn}) \det\Big(\left(A_{ij} - A_{in}A_{nn}^{-1}A_{nj}\right)_{(i,j)\in[\![1,n-1]\!]^2}\Big).$$

2. Montrer que

$$\sum_{\sigma\in S_{n-1}} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n-1} \left(A_{i\sigma(i)}A_{nn} - A_{in}A_{n\sigma(i)}\right) = \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} A_{i\sigma(i)}.$$

3. Conclure que

$$\det(A) = \det\left(\sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} A_{i\sigma(i)}\right).$$

Indication p. 975

Exercice 70 (◑☆ Un cas particulier de Cauchy-Binet)
Soient $A = \left(a_{ij}\right)_{\substack{1\leq i\leq 2\\1\leq j\leq p}} \in \mathrm{M}_{2,p}(\mathbb{K})$ et $B = \left(b_{ij}\right)_{\substack{1\leq i\leq p\\1\leq j\leq 2}} \in \mathrm{M}_{p,2}(\mathbb{K})$.

Montrer que

$$\det(AB) = \sum_{1\leq j<k\leq p} \begin{vmatrix} a_{1j} & a_{1k} \\ a_{2j} & a_{2k} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{j1} & b_{j2} \\ b_{k1} & b_{k2} \end{vmatrix}.$$

Indication p. 975

Exercice 71 (◕☆ Cauchy-Binet)
Soient $A \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathrm{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.

Pour $K \subset [\![1,p]\!]$ on note $A_K = (a_{ik})_{\substack{1\leq i\leq n\\k\in K}}$ et $B_K = \left(b_{kj}\right)_{\substack{k\in K\\1\leq j\leq n}}$. Montrer que

$$\det(AB) = \sum_{\substack{K\subset[\![1,p]\!]\\|K|=n}} \det(A_K)\det(B_K).$$

Indication p. 975

Thème: encore des calculs en vrac

Exercice 72 (◔★ Des calculs de déterminants)
Calculer les déterminants des matrices suivantes pour $(a,b,c,d) \in \mathbb{K}^4$

1. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix}$

2. $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ a & 1 & a \\ a^2 & a & 1 \end{vmatrix}$

3. $\begin{vmatrix} a & c & c & b \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ (a+1)^2 & (b+1)^2 & (c+1)^2 & (d+1)^2 \\ (a+2)^2 & (b+2)^2 & (c+2)^2 & (d+2)^2 \\ (a+3)^2 & (b+3)^2 & (c+3)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix}$

Indication p. 975

Exercice 73 (◑☆ Encore des calculs de déterminants)
Calculer les déterminants suivants.

1. Pour $x \in \mathbb{K}$,

$$\begin{vmatrix} 1+x^2 & -x & 0 & \dots & 0 \\ -x & 1+x^2 & -x & \dots & 0 \\ 0 & -x & 1+x^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1+x^2 \end{vmatrix}$$

2.

$$\begin{vmatrix} 1 & n & n & \dots & n \\ n & 2 & n & \dots & n \\ n & n & 3 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & n & \dots & n \end{vmatrix}$$

3. Pour $(a,b,c) \in \mathbb{K}^3$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\begin{vmatrix} \lambda & a & a & \dots & a \\ b & c & 0 & \dots & 0 \\ b & 0 & c & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & 0 & 0 & \dots & c \end{vmatrix}$$

4. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on note $S_p = \sum_{i=1}^{p} i$.

$$\begin{vmatrix} S_1 & S_1 & S_1 & \cdots & S_1 \\ S_1 & S_2 & S_2 & \cdots & S_2 \\ S_1 & S_2 & S_3 & \cdots & S_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_1 & S_2 & S_3 & \cdots & S_n \end{vmatrix}$$

Indication p. 975

Exercice 74 (◑☆ Encore un déterminant avec des coefficients binomiaux)
Déterminer

$$\begin{vmatrix} \binom{n}{0} & \binom{n}{1} & \cdots & \binom{n}{n} \\ \binom{n+1}{0} & \binom{n+1}{1} & \cdots & \binom{n+1}{n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \binom{2n}{0} & \binom{2n}{1} & \cdots & \binom{2n}{n} \end{vmatrix}$$

Indication p. 976

Exercice 75 (◑☆ Un déterminant et des polynômes)
Soit $P \in \mathbb{K}_{n-2}[X]$.

Montrer que

$$\begin{vmatrix} P(1) & P(2) & P(3) & \cdots & P(n) \\ P(2) & P(3) & P(4) & \cdots & P(n+1) \\ P(3) & P(4) & P(5) & \cdots & P(n+2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \iddots & \vdots \\ P(n) & P(n+1) & P(n+2) & \cdots & P(2n-1) \end{vmatrix} = 0.$$

Indication p. 976

Exercice 76 (◔☆ Changement de signe)
Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

On définit B par

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!], (B)_{i,j} = (-1)^{i+j} A_{i,j}.$$

Montrer que

$$\det(B) = \det(A).$$

Indication p. 976

Exercice 77 (◔★ Déterminant et factorisation)
Soient $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ qui **commutent**.

Montrer que $\det(A^2 + B^2) \geq 0$.

Indication p. 976

Exercice 78 (◑★ Déterminant et factorisation II)
Soient $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ qui **commutent**.

1. Soient $a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$ tels que $a_1^2 - 4a_2a_0 < 0$ et $a_2 > 0$.

   Montrer que $\det(a_2A^2 + a_1AB + a_0B^2) \geq 0$.
2. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\det\left(A^{2k+1} + B^{2k+1}\right)$ est du même signe que $\det(A+B)$.

Indication p. 976

Exercice 79 (◑☆ Il paraît que c'est un exercice classique)
Soient $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

On suppose de plus que $\mathrm{rg}(B) = 1$.

Montrer que

$$\det(A+B)\det(A-B) \leq \det(A)^2.$$

Indication p. 977

Thème: déterminants et arithmétique

On rappelle que $\mathrm{M}_n(\mathbb{Z}) \subset \mathrm{M}_n(\mathbb{Q})$; est l'ensemble des matrices à coefficients entiers. Il s'agit d'un sous anneau de $\mathrm{M}_n(\mathbb{Q})$. On note $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}) = (\mathrm{M}_n(\mathbb{Z}))^\times$.

Exercice 80 (◔★♠ Inversibilité dans un anneau)
Montrer que pour tout $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{Z})$,

$$M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}) \Leftrightarrow \det(M) \in \mathbb{Z}^\times.$$

(Où $\mathbb{Z}^\times = \{\pm 1\}$ est le groupe des inversibles de $\mathbb{Z}$).

Proposer une généralisation.

Indication p. 977

Exercice 81 (◑☆ Déterminant, divisibilité et transposée I)
Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier **impair**.

Soit $A \in S_n(\mathbb{Z})$ une matrice symétrique à coefficients entiers. Montrer que si tous les coefficients diagonaux de A sont pairs alors $\det(A)$ est pair.

Indication p. 977

Exercice 82 (◔☆ Déterminant, divisibilité et transposée II)
Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier **impair**.

Soit $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{Z})$.

Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$ des entiers non nuls.

Montrer que $a+b \mid \det(aM + bM^\top)$.

Indication p. 977

Exercice 83 (◔☆ Bézout, déterminant et comatrice)
Soient $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{Z})$.

Montrer que

$$\det(A) \wedge \det(B) = 1 \Rightarrow \exists (U, V) \in (\mathrm{M}_n(\mathbb{Z}))^2, AU + BV = I_n.$$

Indication p. 977

Exercice 84 (◕★ Déterminant de Smith)
On rappelle que φ est la fonction indicatrice d'Euler.

On pose

$$A = (i \wedge j)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}.$$

Montrer que

$$\det(A) = \prod_{k=1}^{n} \varphi(k).$$

Indication p. 977

Exercice 85 (◑☆ Un Vandermonde en arithmétique)
Soient $a_1, ..., a_n \in \mathbb{Z}$ des entiers.

Montrer que

$$\prod_{j=1}^{n-1} j! \mid \prod_{i<j} (a_j - a_i).$$

Indication p. 978

Exercice 86 (◑☆ Les nombres impairs sont non nuls)
Soit n un entier **pair**.

Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{Z})$ telle que pour tout $i, j \in [\![1, n]\!]$, $a_{i,j} = 0$ si $i = j$ et $a_{i,j} = \pm 1$ sinon.

Montrer que A est inversible.

Indication p. 978

Exercice 87 (◕★ Irréductibles des matrices à coefficients entiers)
On dit que $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{Z})$ est «irréductible» ssi

$$\forall B, C \in \mathrm{M}_n(\mathbb{Z}), A = BC \Rightarrow \left(B \in (\mathrm{M}_n(\mathbb{Z}))^\times \text{ ou } C \in (\mathrm{M}_n(\mathbb{Z}))^\times\right).$$

Caractériser les irréductibles de $\mathrm{M}_n(\mathbb{Z})$ en termes de déterminant.

Indication p. 978

Thème: déterminants et dénombrement

Exercice 88 (◕★ Dénombrement de déterminants)
Soit $\mathbb{K}$ un corps fini de cardinal q.

Soit $\alpha \in \mathbb{K}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

Calculer

$$|\{A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \mid \det(A) = \alpha\}|.$$

Indication p. 978 · Solution p. 982

Exercice 89 (◕☆ Déterminant pour le dénombrement)
Soient $n, m \in \mathbb{N}^*$, $a \in \mathbb{N}^*$ et $r_1, ..., r_n \in \mathbb{N}^*$.

1. Calculer

$$\det\left(\begin{pmatrix} r_1 & a & \cdots & a \\ a & r_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & \cdots & a & r_n \end{pmatrix}\right).$$

2. On considère Ω un ensemble de cardinal m et on suppose qu'il existe $D_1, ..., D_n \in \mathcal{P}(\Omega)$ des parties de Ω deux à deux distinctes telles que pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$ si $i \neq j$ alors $\left|D_i \cap D_j\right| = a$. Montrer que $m \geq n$.

Indication p. 978 · Solution p. 983

Exercice 90 (◕★ Où sont les déterminants et le dénombrement ?)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Pour $\sigma \in S_n$ on note $N(\sigma)$ le nombre de points fixes de σ.

Calculer

$$\sum_{\sigma \in S_n} \frac{\varepsilon(\sigma)}{N(\sigma)+1}.$$

Indication p. 979 · Solution p. 985

Exercice 91 (◕★ L'exercice des cailloux)
On dispose de $2n+1$ cailloux de poids $p_1, ..., p_{2n+1}$ vérifiant la propriété suivante: si on retire n'importe quel caillou alors les $2n$ cailloux restants peuvent être séparés en deux groupes de n cailloux de même poids.

Montrer que tous les cailloux ont le même poids.

Indication p. 979

Thème: Wronskien et Cie

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant 0.

Étant donnée une famille de fonctions $(f_1, ..., f_n) \in (\mathcal{D}^n(I, \mathbb{C}))^n$, on définit le *Wronskien* de la famille la fonction $W_n(f_1, ..., f_n) : I \to \mathbb{C}$ définie par

$$\forall t \in I,\ W_n(f_1, ..., f_n)(t) = \begin{vmatrix} f_1(t) & f_2(t) & \cdots & f_{n(t)} \\ f_1'(t) & f_2'(t) & \cdots & f_n'(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(t) & f_2^{(n-1)}(t) & \cdots & f_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}$$

Exercice 92 (◔★ Wronskien et liberté)

1. Soit $(f_1, ..., f_n) \in (\mathcal{D}^n(I, \mathbb{C}))^n$.

   Montrer que **si** $(f_1, ..., f_n)$ est liée **alors** $W_n(f_1, ..., f_n) = 0$.
2. Donner un exemple de fonctions f_1, f_2 telles que $W_2(f_1, f_2) = 0$ et (f_1, f_2) est libre.

Indication p. 979 · Solution p. 986

Exercice 93 (◔★ Wronskien et EDL2H)
Soient $a_0, a_1 \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

Soient $y_1, y_2 \in \mathcal{D}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ deux solutions de l'équation différentielle linéaire d'ordre 2 homogène

$$\forall t \in \mathbb{R}, y''(t) + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = 0.$$

1. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a

$$W_2(y_1, y_2)(t) = W_2(y_1, y_2)(0) \exp\left(-\int_0^t a_1(s)\,\mathrm{d}s\right).$$

2. En déduire que les propositions suivantes sont équivalentes:

(i) (y_1, y_2) est libre,
(ii) $\left(\begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_1'(0) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_2(0) \\ y_2'(0) \end{pmatrix}\right)$ est libre,
(iii) pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\left(\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_1'(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_2(t) \\ y_2'(t) \end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathbb{C}^2$.

Indication p. 979 · Solution p. 988

Exercice 94 (◑☆ Wronskien et EDL, cas général)
Soient $a_0, ..., a_{n-1} \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{C})$.

Soient $y_1, ..., y_n \in \mathcal{D}^n(I, \mathbb{C})$ des solutions de l'équation différentielle linéaire d'ordre n homogène

$$\forall t \in I, y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0(t)y(t) = 0.$$

Montrer que $W_n(y_1, ..., y_n)$ vérifie

$$\forall t \in I,\ W_n(y_1, ..., y_n)(t) = W_n(y_1, ..., y_n)(0) \exp\left(-\int_0^t a_{n-1}(s)\mathrm{d}s\right).$$

Indication p. 979

Exercice 95 (◕☆ Wronskien et multiplication)
Soient $y_1, ..., y_n \in \mathcal{D}^{n-1}(I, \mathbb{C})$ et $g \in \mathcal{D}^{n-1}(I, \mathbb{C})$.

Montrer que

$$\forall t \in I, W_n(gy_1, ..., gy_n)(t) = (g(t))^n W_n(y_1, ..., y_n)(t).$$

Indication p. 980 · Solution p. 989

Indications

Indication 1 · Énoncé p. 931 (Det et automorphisme de corps)
Écrire par exemple la formule explicite du déterminant.

Indication 2 · Énoncé p. 931 (Polynôme caractéristique)
Écrire la formule explicite du déterminant.

Le degré est n et le coefficient dominant $(-1)^n$, le coefficient constant $\det(A)$ et celui d'ordre $n-1$, $(-1)^{n-1}\operatorname{tr}(A)$.

Indication 3 · Énoncé p. 931 (Déterminant triangulaire par blocs)
Au choix:

- ▷ En utilisant la formule
- ▷ Par pivot par blocs
- ▷ Par unicité des formes n-linéaires alternées

Indication 4 · Énoncé p. 931 (Déterminant de Vandermonde)
Cf cours.

Indication 5 · Énoncé p. 932 (Inversibilité et changement de corps)
Deux preuves possibles du sens $\Longleftarrow$: par algorithme du pivot en vérifiant qu'à chaque étape les coefficients sont dans $\mathbb{K}$, ou par déterminant.

Indication 6 · Énoncé p. 932 (Similitude et changement de corps)
Remarquer que la fonction polynomiale $t \mapsto \det(A+tB)$ est non nulle comme polynôme de $\mathbb{R}[X]$ car non nulle comme polynôme de $\mathbb{C}[X]$.

Indication 7 · Énoncé p. 932 (Matrices de rang 1)
Plusieurs méthodes

- ▷ Montrer que A est semblable à $\begin{pmatrix} \operatorname{tr}(A) & 0_{1,n-1} \\ \vdots & 0_{n-1,n-1} \end{pmatrix}$.
- ▷ Travailler sur les lignes et utiliser le caractère alterné.

Indication 8 · Énoncé p. 932 (Groupe spécial linéaire)
Ker(det)

Indication 9 · Énoncé p. 933 (Densité des matrices inversibles: version première année)

1. Cf exercice 2. Comme il s'agit d'un polynôme non nul.
2. Distinguer $i=j$ et $i \neq j$.
3. Ainsi «toute matrice est limite d'une suite de matrices inversibles».

   On remarque que
   - ▷ La notion de «limite de matrices» est ainsi comprise comme une limite de chaque coefficient. On pourrait aussi définir une limite à l'aide de diverses normes matricielles. Vous verrez en deuxième année que comme $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie, toutes ces notions sont équivalentes.

- ▷ Ce résultat s'énonce aussi comme «$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$».
- ▷ Ce résultat est souvent utilisé de la manière suivante: on montre un résultat pour les matrices inversibles, et si les fonctions en jeu sont continues (par exemple polynomiales) alors le résultat est vrai pour toutes les matrices.

  En particulier un résultat très utile dans ce TD est le suivant:

  Pour une fonction $f : \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \to F$ «**continue**» (en particulier polynomiale en les coefficients suffit) on a

$$\boxed{\forall A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), f(A) = 0 \Rightarrow \forall A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}), f(A) = 0}.$$

Indication 10 · Énoncé p. 933 (Générateurs de SL_n)
On peut montrer que toute transposition peut s'écrire comme composée de transvections à un signe $-$ près. Procéder ensuite par pivot.

Plus précisément remarquer que pour $i \neq j$,
- ▷ $L_i \leftarrow L_i + L_j$
- ▷ $L_j \leftarrow L_j - L_i$
- ▷ $L_i \leftarrow L_i + L_j$

revient à effectuer $\big(L_i, L_j\big) \leftarrow \big(L_j, -L_i\big)$.

En déduire que si $A \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$, il existe des matrices de transvections $T_1, ..., T_p$ et $S_1, ..., S_q$ telles que

$$A = T_p \cdots T_1 \begin{pmatrix} 1 & 0_{1,n-1} \\ 0_{n-1,1} & \tilde{A} \end{pmatrix} S_1 \cdots S_q$$

puis conclure par récurrence.

Indication 11 · Énoncé p. 933 (Déterminant de matrice antisymétrique)
Avec A antisymétrique, $\det(A) = (-1)^n \det\big(A^\top\big) = -\det(A)$.

Indication 12 · Énoncé p. 934 (Gradient du déterminant)
1. C'est une fonction polynomiale.
2. Remarquer que pour $t \neq 0$, $\det(A + tH) = t^n \det(A) \det\big(A^{-1}H + \frac{1}{t} I_n\big)$.
3. Au choix développer ou plus simplement utiliser la question précédente et la densité des matrices inversibles (cf exercice 9)

On a en fait montré que pour le produit scalaire canonique sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\nabla \det = \mathrm{Com}$$

Indication 13 · Énoncé p. 934 (Polynôme et déterminant: le cas rang quelconque)
Par exemple se ramener à $B = J_{\mathrm{rg}(B)}$.

Ou bien développer par multilinéarité en annulant quand il y a strictement plus de $\mathrm{rg}(B)$ colonnes de B.

Indication 14 · Énoncé p. 934 (Dimension de l'ev des formes alternées)

1. Montrer qu'il s'agit d'un sev des formes p-linéaires.

2. Soit $(e_1, ..., e_n)$ une base de E.

Montrer qu'une forme p-linéaire alternée φ est entièrement déterminée par les $\varphi\big(e_{i_1}, ..., e_{i_p}\big)$ où $i_1 < \cdots < i_p$.

On obtient alors $\binom{n}{p}$.

Indication 15 · Énoncé p. 934 (Déterminant d'une somme ?)
On peut écrire $A = PJ_rQ$ avec P et Q inversibles (pourquoi ?) et donc pour tout B, $\det(A + B) = \det(P)\det\big(J_r + \tilde{B}\big)\det(Q)$ où $B = P\tilde{B}Q$. Prendre ensuite un $\tilde{B}$ bien choisi.

Indication 16 · Énoncé p. 935 (Des matrices inversibles partout dans toutes les directions)
Considérer $t \mapsto \det\big(A^{-1}B + tI_n\big)$.

Indication 17 · Énoncé p. 935 (Un lien entre déterminant et trace)
Noter φ l'application de E^n dans $\mathbb{K}$ qui à $(x_1, ..., x_n)$ associe $\sum_{j=1}^{n} \det_{\mathcal{B}}\big(x_1, ..., x_{j-1}, u\big(x_j\big), x_{j+1}, ..., x_n\big)$.

Alors

- φ est n-linéaire
- φ est alternée: si $x_{j_1} = x_{j_2}$ dans la somme distinguer les termes $j \notin \{j_1, j_2\}$ nuls par caractère alterné et la somme des deux termes restants nulle par antisymétrie

par conséquent $\varphi = \lambda \det_{\mathcal{B}}$ pour une certaine constante λ (pourquoi ?). Déterminer la constante en évaluant par exemple dans $\mathcal{B}$.

Indication 18 · Énoncé p. 935 (Dérivée d'une forme multilinéaire)
Faire par multilinéarité et DL ou par la formule explicite dans une base.

Indication 19 · Énoncé p. 935 (Un cas très particulier de déterminant de somme)
Plusieurs méthodes:

- remarquer que $t \mapsto \det(A + tB)$ est affine et utiliser l'exercice 12
- se ramener à $B = J_1$
- traiter le cas A inversible, cf exercice 7 puis par densité
- développer par multilinéarité et remarquer que les $\det\big(A_1, ..., B_j, ..., A_n\big)$ donnent $\big(\mathrm{Com}(A)^\top B\big)_{j,j}$ par développement selon la j-ème colonne.

Indication 20 · Énoncé p. 936 (Déterminant d'une symétrie)
Écrire s dans une base adaptée.

Indication 21 · Énoncé p. 936 (Déterminant de la transposée)
Écrire dans une base bien choisie (canonique ou bien adaptée à $S_n(\mathbb{K}) \oplus A_n(\mathbb{K}) = \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$).

Ou bien constater qu'il s'agit d'une symétrie, cf l'exercice 20

Indication 22 · Énoncé p. 936 (Symétrisation et antisymétrisation)
Soit τ une transposition. Remarquer que l'application $S_p \to S_p$ définie par $\sigma \mapsto \sigma\tau$ est bijective et faire un changement d'indice.

Indication 23 · Énoncé p. 936 (Morphismes vers un groupe abélien)
- ▷ φ est constante sur les classes de conjugaison de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ car G est abélien
- ▷ deux transvections sont conjuguées, et comme $\mathbb{K} \neq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ on peut montrer que le déterminant d'une transvection est 1
- ▷ deux dilatations de même rapport sont conjuguées
- ▷ toute matrice est produit de transvections et d'une dilatation (cf exercice 10)

Indication 24 · Énoncé p. 937 (Multiplicativité et inversibilité)
- ▷ Comme pour toute équation fonctionnelle commencer par des cas particuliers: $f(0_n) = 0$, $f(I_n) = 1$, si $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, $f(A) \in \mathbb{K}^\times$.
- ▷ En déduire que le caractère nul ou non est stable par équivalence.
- ▷ Montrer que toute matrice non inversible est équivalente à une matrice nilpotente.
- ▷ Conclure.

Indication 25 · Énoncé p. 937 (D'autres caractérisations du déterminant)
Dans les deux cas det est l'unique solution.

On peut aussi remarquer que $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = I_n + (\lambda - 1)E_{11}$ et que E_{11} est de rang 1. Ainsi on peut utiliser un sens du premier point pour le second et l'autre sens du second point pour le premier.

- ▷ Vérifier que det convient pour le premier point (et donc pour le second).
- ▷ Faire l'exercice 24 pour remarquer tout d'abord que l'image d'une matrice inversible est non nulle, et que l'image d'une matrice non inversible est nulle.
- ▷ Remarquer que, comme les matrices d'opérations élémentaires engendrent $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, il suffit de montrer que f et det coïncident sur ces dernières.
- ▷ Remarquer que f est invariante de similitude.
- ▷ Les dilatations de même rapport étant semblables, c'est ok pour les dilatations.
- ▷ Les transvections de même « positions » étant semblables, on a en particulier qu'une transvection est semblable à son carré. Donc son image par f est 0 ou 1 et par inversibilité n'est pas 0.
- ▷ Se rappeler qu'on peut en fait construire une transposition à l'aide de transvections et de dilatations !

Indication 26 · Énoncé p. 938 (Le début de l'étude du permanent)
Exactement les mêmes preuves qu'en cours sur le déterminant.

Attention néanmoins, les transvections ne conservent pas le permanent !

De plus le permanent n'est a priori pas multiplicatif !

Indication 27 · Énoncé p. 939 (Un produit extérieur sans le dire)
Vérifier les caractères multilinéaires par rédaction automatique.

Pour le caractère alterné prendre deux vecteurs égaux et déterminer les termes non immédiatement nuls. Vérifier que leur somme fait 0.

Indication 28 · Énoncé p. 939 (Matrice de Toeplitz tridiagonale)
Développer selon la première (ou dernière) ligne (ou colonne) et repérer un déterminant par blocs.

Puis résoudre explicitement l'ERL2CCH en calculant « à la main » Δ_1 et Δ_2.

Indication 29 · Énoncé p. 940 (Liberté de fonctions et évaluations)
1. Développer par rapport à la dernière colonne pour obtenir une relation de liaison.
2. Procéder par récurrence, en utilisant la contraposée de la question précédente pour le choix de x_{n+1} dans l'hérédité.
3. Extraire une famille libre maximale.

Indication 30 · Énoncé p. 940 (Règle de Sarrus)
RAS, c'est juste la formule générale pour $n = 3$.

Indication 31 · Énoncé p. 941 (Déterminant circulant)
1. $P = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$.
2. C'est une matrice de Vandermonde. Calculer $J\Omega$ et remarquer que cela revient à multiplier chaque colonne d'indice j de Ω par ω^{j-1}.
3. On a $\Omega^{-1} J\Omega = \mathrm{Diag}(1, \omega, ..., \omega^{n-1})$ d'où $P(\Omega^{-1} J\Omega) = \mathrm{Diag}(P(1), P(\omega), ..., P(\omega^{n-1}))$ et par conséquent comme le déterminant est un invariant de similitude,
$$\det(A) = \prod_{\zeta \in \mathbb{U}_n} P(\zeta).$$

Indication 32 · Énoncé p. 941 (Déterminant et matrice compagnon)
Développer par rapport à la dernière ligne.

Indication 33 · Énoncé p. 942 (Déterminant du produit matriciel)
Écrire la matrice de g_A dans la base canonique de $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ (dans un ordre bien choisi). On obtient une matrice diagonale par blocs dont tous les blocs sont A d'où un déterminant $\det(A)^p$.

Indication 34 · Énoncé p. 942 (Déterminant de la conjugaison)
Faire l'exercice 33 et remarquer qu'il s'agit seulement de la composée de celui-ci et de sa transposée.

Indication 35 · Énoncé p. 942 (Matrice antidiagonale)
Au choix: développer selon une ligne (resp. colonne) ou bien opérer par permutation sur les lignes/colonnes ou bien repérer des blocs 2×2.

Indication 36 · Énoncé p. 943 (Matrice antidiagonale: polynôme caractéristique)
Comme à l'exercice 35, au choix développer ou visualiser une matrice diagonale par blocs 2×2 ou bien pivoter pour $\lambda \neq 0$.

Indication 37 · Énoncé p. 943 (Grand classique: Résultant)
1. Par Bézout il s'agit des multiples de $P \wedge Q$ de degré $\leq p+q-1$.
2. On obtient la matrice dont le déterminant est le résultant.
3. Par Bézout précédent l'application est inversible ssi $P \wedge Q = 1$.

Indication 38 · Énoncé p. 944 (Discriminant d'un polynôme)
1. P admet une racine multiple ssi $P \wedge P' \neq 1$
2. On obtient à un facteur près les fameux $b^2 - 4ac$ et $-4p^3 - 27q^2$
3. Il s'agit donc d'une généralisation de la notion de discriminant d'un polynôme.

Indication 39 · Énoncé p. 944 (Autour de la matrice d'Attila I)
Regarder au choix les exercices 7 ou 40.

Indication 40 · Énoncé p. 944 (Autour de la matrice d'Attila II)
Poser $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ et utiliser la multilinéarité et le caractère alterné pour calculer $\det(C + \lambda_1 E_1, ..., C + \lambda_n E_n)$.

Remarquer que cela n'est qu'un cas particulier des matrices de rang 1.

Indication 41 · Énoncé p. 945 (Des Huns très bien camouflés ou le déterminant de Hurwitz)
En pivotant ou en utilisant une matrice simple semblable à J on obtient que f est une fonction affine.

Dans le cas $a \neq c$ évaluer en $-a$ et $-c$. On obtient finalement

$$\frac{a\prod_{k=1}^{n}(b_k - c) - c\prod_{k=1}^{n}(b_k - a)}{a - c}.$$

Dans le cas $a = c$ se reporter à l'exercice 40 ou bien utiliser la continuité.

Indication 42 · Énoncé p. 945 (Déterminant d'une matrice de permutation)
C'est en effet $\varepsilon(\sigma)$.

Indication 43 · Énoncé p. 945 (Déterminant en L)
Par transvection annuler tous les coefficients de la dernière ligne (ou colonne) sauf celui en (n, n). Développer et faire une récurrence.

Indication 44 · Énoncé p. 946 (Matrice anticirculante)
Commencer par traiter l'exercice 31.

Indication 45 · Énoncé p. 946 (Rang de la comatrice)
Dans chacun des cas commencer par écrire

$$A\mathrm{Com}(A)^\top = \det(A) I_n.$$

1. Si A est inversible, $\mathrm{Com}(A)$ est inversible.
2. Si $\mathrm{rg}(A) \leq n-2$ toutes les sous-matrices $(n-1)\times(n-1)$ extraites sont de rang $< n-1$ donc tous les cofacteurs sont nuls.
3. Si $\mathrm{rg}(A) = n-1$ alors $\mathrm{Com}(A)$ est de rang ≤ 1 et au moins un cofacteur est non nul.

Indication 46 · Énoncé p. 946 (Comatrice de la comatrice)
Dans le cas inversible utiliser le lien entre comatrice et inverse.

Dans le cas non-inversible pour $n \geq 3$ utiliser le rang de la comatrice (exercice 45). (Ou bien utiliser la densité de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$).

Indication 47 · Énoncé p. 946 (Comatrice et transposée)
Juste écrire les coefficients.

Ou bien le faire pour les matrices inversibles et remarquer que $A \mapsto \mathrm{Com}(A^\top) - \mathrm{Com}(A)^\top$ est polynomiale en les coefficients de A.

Indication 48 · Énoncé p. 947 (Comatrice et produit)
Le faire pour les matrices inversibles et remarquer que $\mathrm{Com}(AB) - \mathrm{Com}(A)\,\mathrm{Com}(B)$ est polynomiale en les coefficients de A et B.

Utiliser ensuite la densité.

On remarque qu'on en déduit en particulier que **si deux matrices sont semblables alors leurs comatrices sont semblables**.

Indication 49 · Énoncé p. 947 (Image de la comatrice)
Traiter le cas $n = 1$ séparément.

Il s'agit de l'union des matrices inversibles, des matrices de rang 1 et du singleton de la matrice nulle.

Pour une inclusion il s'agit d'une disjonction de cas sur le rang et de l'exercice 45.

Pour l'autre sens:

- ▷ que dire de $\mathrm{Com}(\lambda\,\mathrm{Com}(A))$ pour A inversible ?
- ▷ Pour le rang 1, remarquer que par similitude il suffit d'obtenir $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$. Pour cela construire des matrices explicites.

Indication 50 · Énoncé p. 947 (Vandermonde par changement de base)

1. Au moins deux méthodes:

- ▷ Faire des transvections sur les colonnes.
- ▷ Faire un changement de base dans $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ entre la base canonique et la base $(P_0, ..., P_{n-1})$ et regarder l'application d'évaluation.

2. Prendre $P_j = \prod_{i \leq j}(X - x_i)$.

Indication 51 · Énoncé p. 948 (Vandermonde par variation d'un coefficient)

1. Développer par rapport à la dernière ligne.

2. Les $(x_1, ..., x_n)$ sont des racines.

3. Un polynôme de degré n est entièrement déterminé par n racines et son coefficient dominant. Procéder ensuite par récurrence sur n.

Indication 52 · Énoncé p. 948 (Vandermonde et coefficient dominant de Lagrange)

1. RAS

2. Les coefficients de $(V_n)^{-1}$ sont les coefficients des polynômes d'interpolation de Lagrange associés dans la base canonique.

En particulier la dernière ligne est constituée des coefficients dominants.

Or le coefficient dominant de L_j est $\frac{1}{\prod_{i \neq j}(x_j - x_i)}$.

3. Comme V_n est inversible $V_n^{-1} = \frac{1}{\det(V_n)}\mathrm{Com}(V_n)^\top$.

Or $\det(V_{n-1}) = (\mathrm{Com}(V_n))_{n,n}$.

4. Conclure par récurrence.

Indication 53 · Énoncé p. 949 (Vandermonde par pivot)

1. Effectuer dans l'ordre: $C_n \leftarrow C_n - x_n C_{n-1}$, $C_{n-1} \leftarrow C_{n-1} - x_n C_{n-2}$, ..., $C_2 \leftarrow C_2 - x_n C_1$.

2. Développer par rapport à la dernière ligne et utiliser la linéarité.

Indication 54 · Énoncé p. 949 (Vandermonde par translation)

1. On obtient une somme de $\det\big(C_1, ..., C_{j-1}, (j-1)C_{j-1}, C_{j+1}, ..., C_n\big)$ et donc 0.

2. Vandermonde est donc invariant par translation. Prendre $t = -x_n$, développer, factoriser chaque ligne et retranslater pour obtenir la récurrence de Vandermonde.

Indication 55 · Énoncé p. 950 (Vandermonde à trou)

Compléter en un déterminant de Vandermonde «complet» avec X au lieu de λ_i.

Interpréter alors le déterminant à calculer comme le j-ième coefficient d'un polynôme de Vandermonde.

Indication 56 · Énoncé p. 951 (Déterminant de Cauchy)

1. Transvections.

2. Les pôles sont simples.

3. Avec F la fraction rationnelle précédente, effectuer des transvections pour obtenir comme dernière ligne $F(b_1)\ F(b_2) \cdots F(b_n)$ qui est $0\ 0 \cdots 0\ 1$. Puis développer et repérer une récurrence.

Alternativement faire de même sur les autres lignes pour se ramener à une matrice triangulaire.

Indication 57 · Énoncé p. 952 (Il y a du Vandermonde derrière)

1. Interpréter la matrice comme le produit de deux matrices de type Vandermonde.

2. Développer par le binôme et se ramener à la question précédente.

Indication 58 · Énoncé p. 952 (Vandermonde puis un produit)

Noter $\sigma_n = x_1 x_2 ... x_n$ et constater que par dilatations sur les lignes on peut se ramener au calcul de

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} & \sigma_n \\ x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} & \sigma_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} & \sigma_n \end{vmatrix}$$

qui à un facteur multiplicatif près est une matrice de Vandermonde.

Indication 59 · Énoncé p. 953 (Encore des Vandermonde peu intéressants)

Noter V_n le déterminant de Vandermonde associé.

1. Par exemple faire le point suivant et évaluer en $\lambda = 0$. On obtient $x_1 \cdots x_n (V_n)^2$.

2. Constater que

$$\begin{pmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_{n-1} & 1 \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_n & \lambda \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ s_n & s_{n+1} & \cdots & s_{2n-1} & \lambda^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n & \lambda \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} & \lambda^{n-1} \\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n & \lambda^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} & 0 \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 0 \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Indication 60 · Énoncé p. 953 (Complément de Schur)

Effectuer la transvection par blocs $L_2 \to L_2 - CA^{-1}L_1$ c'est à dire multiplier à gauche par $\begin{pmatrix} I_p & 0_{p,q} \\ -CA^{-1} & I_q \end{pmatrix}$.

Indication 61 · Énoncé p. 953 (Complément de Schur et calcul de déterminant)

Faire l'exercice 60.

Indication 62 · Énoncé p. 954 (Blocs et matrices 2x2)

1. Effectuer les opérations par blocs (pourquoi est-ce possible ?) $C_1 \leftarrow C_1 + C_2$ puis $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$.

2. De même, $C_1 \leftarrow C_1 + iC_2$ puis $L_2 \leftarrow L_2 - iL_1$.

Solution p. 981

Indication 63 · Énoncé p. 954 (Blocs 2x2 de même taille et qui commutent)

Cf l'exercice 60

Indication 64 · Énoncé p. 954 (Blocs 2x2 de même taille et qui commutent, bis)
Commencer par traiter l'exercice 63 dans le cas où A est inversible.

Puis méditer sur

$$P(t) = \begin{vmatrix} A + tI_n & B \\ C & D \end{vmatrix}.$$

Indication 65 · Énoncé p. 955 (Complément de Schur et inverse par blocs)
Poursuivre le calcul par blocs de l'exercice 60.

On obtient

$$\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ -CA^{-1} & I_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_p & -A^{-1}B \\ 0 & I_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \Delta \end{pmatrix}$$

et constater ensuite que l'inverse d'une transvection par blocs $\begin{pmatrix} I_p & \Lambda \\ 0 & I_q \end{pmatrix}$ est $\begin{pmatrix} I_p & -\Lambda \\ 0 & I_q \end{pmatrix}$ tandis que l'inverse d'une matrice triangulaire par blocs $\begin{pmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{pmatrix}$ est $\begin{pmatrix} D_1^{-1} & 0 \\ 0 & D_2^{-1} \end{pmatrix}$.

On peut commenter que cette formule est peu utilisable en pratique et que dans le cas où $p = q = 1$ on retrouve l'expression de l'inverse d'une matrice 2×2.

Indication 66 · Énoncé p. 955 (Identité de Sylvester (pour les déterminants))
Par exemple faire deux compléments de Schur sur $\begin{pmatrix} I_n & -A \\ B & I_p \end{pmatrix}$

Indication 67 · Énoncé p. 955 (Un cas particulier de déterminant par blocs)
Au choix:

- ▷ Faire le complément de Schur par rapport à $\lambda \neq 0$, puis $\det(A - CL)$ où CL est de rang 1 puis continuité.
- ▷ Faire le complément de Schur par rapport à A dans le cas A inversible puis continuité.

Indication 68 · Énoncé p. 956 (Déterminant et opérations du pivot par blocs)
On peut remarquer qu'effectuer une opération élémentaire par blocs sur les lignes revient à multiplier à gauche par une matrice d'opération élémentaire par bloc.

1. Remarquer que

$$\det\left(\begin{pmatrix} \Lambda & 0_{p,q} \\ 0_{q,p} & I_q \end{pmatrix}\right) = \det(\Lambda)$$

2. Remarquer que

$$\det\left(\begin{pmatrix} I_p & 0_{p,q} \\ B & I_q \end{pmatrix}\right) = 1$$

3. Remarquer que

$$\det\left(\begin{pmatrix} 0_{p,q} & I_p \\ I_q & 0_{q,p} \end{pmatrix}\right) = (-1)^{pq}$$

ou bien sinon qu'il s'agit d'effectuer le cycle $(n\ (n-1)\ \cdots\ 2\ 1)$ sur les lignes, et ce p fois, puis que $(p+q-1)\times p$ a la même parité que pq.

Indication 69 · Énoncé p. 956 (Déterminant par blocs qui commutent: cas général)

1. Effectuer comme pour le complément de Schur des transvections pour annuler les coefficients au-dessus de A_{nn} avec A_{nn} comme pivot.
2. Soit faire un argument abstrait de calcul de déterminant dans un anneau commutatif ou bien séparer les permutations de S_n selon la valeur de $\sigma(n)$.
3. Procéder par récurrence sur n en utilisant les deux questions précédentes (remarquer un usage de densité et plein d'usages de commutativité).

Indication 70 · Énoncé p. 957 (Un cas particulier de Cauchy-Binet)
Cela revient à montrer que

$$\sum_{k=1}^{p} a_{1k}b_{k1}\sum_{l=1}^{p} a_{2l}b_{l2} - \sum_{k=1}^{p} a_{1k}b_{k2}\sum_{l=1}^{p} a_{2l}b_{l1} = \sum_{i<j}\big(a_{1i}a_{2j}-a_{1j}a_{2i}\big)\big(b_{i1}b_{j2}-b_{i2}b_{j1}\big).$$

Et donc un exercice de somme.

Indication 71 · Énoncé p. 957 (Cauchy-Binet)
Utiliser la multilinéarité et le caractère alterné et ne pas hésiter à faire des calculs…

Indication 72 · Énoncé p. 957 (Des calculs de déterminants)
On obtient

1. 0
2. $\left(1-a^2\right)^2$
3. $(a-b)^2(a+b+2c)(a+b-2c)$
4. 0

Indication 73 · Énoncé p. 958 (Encore des calculs de déterminants)

1. Noter Δ_n le déterminant $n\times n$. En développant par rapport à la première colonne

$$\begin{aligned}\Delta_{n+1} &= \begin{vmatrix} 1+x^2 & -x & 0 & \dots & 0\\ -x & 1+x^2 & -x & \dots & 0\\ 0 & -x & 1+x^2 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1+x^2 \end{vmatrix}\\ &= (1+x^2)\begin{vmatrix} 1+x^2 & -x & \dots & 0\\ -x & 1+x^2 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & 1+x^2 \end{vmatrix} + x\begin{vmatrix} -x & 0 & \dots & 0\\ -x & 1+x^2 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & 1+x^2 \end{vmatrix}\\ &= (1+x^2)\Delta_n - x^2\Delta_{n-1}.\end{aligned}$$

   Il s'agit alors d'une ERL2CCH.
2. Par pivot sur les colonnes $(\forall i\in[\![1,n-1]\!], C_i \leftarrow C_i - C_n)$

$$\begin{vmatrix} 1 & n & n & \dots & n \\ n & 2 & n & \dots & n \\ n & n & 3 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & n & \dots & n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-n & 0 & 0 & \dots & n \\ 0 & 2-n & 0 & \dots & n \\ 0 & 0 & 3-n & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n \end{vmatrix}$$
$$= (1-n)(2-n)(3-n)\cdots(n-1-n)n$$
$$= (-1)^{n-1}n!$$

3. Utiliser la formule explicite. Les seules permutations avec un terme non nul sont l'identité et les transpositions $(1i)$ pour $i \in [\![2, n]\!]$. On obtient alors

$$\lambda c^{n-1} - (n-1)abc^{n-2}.$$

Alternativement développer par rapport à la dernière ligne.

4. Par transvections successives sur les colonnes $(C_{i+1} \leftarrow C_{i+1} - C_i)$, on obtient

$$\begin{vmatrix} S_1 & S_1 & S_1 & \cdots & S_1 \\ S_1 & S_2 & S_2 & \cdots & S_2 \\ S_1 & S_2 & S_3 & \cdots & S_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_1 & S_2 & S_3 & \cdots & S_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} S_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ S_1 & S_2-S_1 & 0 & \cdots & 0 \\ S_1 & S_2-S_1 & S_3-S_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_1 & S_2-S_1 & S_3-S_2 & \cdots & S_n-S_{n-1} \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{vmatrix}$$
$$= n!.$$

Indication 74 · Énoncé p. 958 (Encore un déterminant avec des coefficients binomiaux)
Par exemple effectuer pour tout k, $L_k \leftarrow L_k - L_{k+1}$ et en utilisant une relation de Pascal déterminer une relation de récurrence.

Indication 75 · Énoncé p. 959 (Un déterminant et des polynômes)
Cela revient à montrer que la famille des colonnes (ou lignes) est liée.

Montrer que de manière générale $(P(X + (j-1)))_{1 \leq j \leq n}$ est liée (car n polynômes dans $\mathbb{K}_{n-2}[X]$ de dimension $n-1$).

Indication 76 · Énoncé p. 959 (Changement de signe)
Par exemple utiliser la formule explicite.

Indication 77 · Énoncé p. 959 (Déterminant et factorisation)
Comme A et B **commutent**, $A^2 + B^2 = (A + iB)\overline{(A + iB)}$.

Indication 78 · Énoncé p. 959 (Déterminant et factorisation II)
Commencer par traiter l'exercice 77.

1. Avec λ et $\overline{\lambda}$ les racines complexes conjuguées on a $a_2X^2+a_1X+a_0 = a_2(X-\lambda)\big(X-\overline{\lambda}\big)$.

Montrer alors que

$$a_2A^2+a_1AB+a_0B^2 = a_2(A-\lambda B)\overline{(A-\lambda B)}.$$

2. Remarquer que $X^{2k+1}+1$ a pour racines -1 et des racines complexes conjuguées.

D'où $A^{2k+1}+B^{2k+1} = (A+B)\cdots$ avec des termes associés avec leur conjugué dans le $\cdots$.

Indication 79 · Énoncé p. 960 (Il paraît que c'est un exercice classique)
Faire plutôt l'exercice 19.

Indication 80 · Énoncé p. 960 (Inversibilité dans un anneau)
Dans un sens écrire $MM^{-1} = I_n$ puis passer au det.

Dans l'autre sens utiliser la formule de la comatrice.

De manière générale si $A \subset \mathbb{K}$ alors $M \in \mathrm{M}_n(A) \subset \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible dans $\mathrm{M}_n(A)$ ssi $\det(M) \in A^\times$.

Et pour A anneau commutatif intègre on a toujours $A \subset \mathrm{Frac}(A)$.

Indication 81 · Énoncé p. 960 (Déterminant, divisibilité et transposée I)
Utiliser par exemple la formule explicite. Pour toute permutation σ

- ▹ Si σ admet un point fixe alors $\prod_{j=1}^n a_{\sigma(j),j}$ est pair.
- ▹ Si σ n'a pas de point fixe, alors regrouper le terme en σ avec celui en σ^{-1} (pourquoi est-ce possible ?)

Indication 82 · Énoncé p. 960 (Déterminant, divisibilité et transposée II)
Remarquer que $\det\big(M-M^\top\big) = 0$ dans $\mathbb{Z}$ et donc dans $\frac{\mathbb{Z}}{a+b}\mathbb{Z}$.

Remarquer aussi que dans $\frac{\mathbb{Z}}{a+b}\mathbb{Z}$, $b=-a$.

Indication 83 · Énoncé p. 961 (Bézout, déterminant et comatrice)
On rappelle que $A\mathrm{Com}(A)^\top = \det(A)I_n$ et qu'il existe $(u,v)\in\mathbb{Z}^2$ tels que $\det(A)u+\det(B)v=1$.

Remarquer que la réciproque est fausse.

Indication 84 · Énoncé p. 961 (Déterminant de Smith)
Montrer que

$$i\wedge j = \sum_{d\in\mathcal{D}(i)\cap\mathcal{D}(j)} \varphi(d)$$

puis en déduire qu'avec $M = \big(\delta_{i\in\mathcal{D}(j)}\big)$ une matrice d'incidence de la relation de divisibilité on a

$$A = M^\top DM$$

où D est une matrice diagonale bien choisie.

Conclure en remarquant que M est triangulaire.

Indication 85 · Énoncé p. 961 (Un Vandermonde en arithmétique)
Il suffit de montrer que le produit des factorielles divise $V(a_1,...,a_n)$.

Or par opérations du pivot montrer que

$$V(a_1,...,a_n)=\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1(a_1-1) & a_1(a_1-1)(a_1-2) & \cdots & a_1(a_1-1)\cdots(a_1-n+2)\\ 1 & a_2 & a_2(a_2-1) & a_2(a_2-1)(a_2-2) & \cdots & a_2(a_2-1)\cdots(a_2-n+2)\\ 1 & a_3 & a_3(a_3-1) & a_3(a_3-1)(a_3-2) & \cdots & a_3(a_3-1)\cdots(a_3-n+2)\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & a_n & a_n(a_n-1) & a_n(a_n-1)(a_n-2) & \cdots & a_n(a_n-1)\cdots(a_n-n+2) \end{vmatrix}$$

puis conclure en remarquant que (coefficients binomiaux) on a pour tout $j\in[\![1,n-1]\!]$ et $a\in\mathbb{Z}$, $j!$ divise $a(a-1)\cdots(a-j+1)$.

Indication 86 · Énoncé p. 961 (Les nombres impairs sont non nuls)
Montrer que $\det(A)$ est impair.

Pour cela regarder par exemple dans $\frac{\mathbb{Z}}{2}\mathbb{Z}$.

Indication 87 · Énoncé p. 962 (Irréductibles des matrices à coefficients entiers)
Commencer par montrer que les inversibles de $\mathrm{M}_n(\mathbb{Z})$ sont ceux de déterminant dans $\mathbb{Z}^\times=\{-1,+1\}$.

Montrer que si le déterminant est irréductible (i.e premier ou égal à 1) alors la matrice est irréductible.

Pour la réciproque (par contraposée) traiter d'abord le cas triangulaire.

S'y ramener ensuite par des transvections et donc un algorithme d'Euclide.

Indication 88 · Énoncé p. 962 (Dénombrement de déterminants)
Commencer par dénombrer les matrices inversibles.

Pour cela constater que construire une matrice inversible revient à construire successivement les colonnes de manière à ce que chaque colonne ne soit pas dans le sev engendré par les précédentes.

Ensuite montrer que tous les déterminants non nuls sont « équiprobables ».

Solution p. 982

Indication 89 · Énoncé p. 962 (Déterminant pour le dénombrement)

1. Introduire $J=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ et étudier $t\mapsto\det(a+tJ)$.
2. Interpréter la matrice précédente comme une matrice d'adjacence fois sa transposée.

Solution p. 983

Indication 90 · Énoncé p. 963 (Où sont les déterminants et le dénombrement ?)
Interpréter comme la dérivée d'une fonction génératrice.

Et cette fonction génératrice comme un déterminant.

Solution p. 985

Indication 91 · Énoncé p. 963 (L'exercice des cailloux)
Commencer par traduire le problème: pour tout $i \in [\![1, 2n+1]\!]$ il existe a_{ij} des coefficients tq $a_{ii} = 0$, $a_{ij} \in \{-1, 1\}$ la moitié des a_{ij} valent 1 et l'autre moitié valent -1 et pour tout $i \in [\![1, 2n+1]\!]$, $\sum_{j=1}^{2n+1} a_{ij} p_j = 0$.

On obtient une matrice A et il faut montrer que $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_{2n+1} \end{pmatrix}$ sont colinéaires.

Or ils appartiennent tous les deux au noyau de A.

On peut alors s'intéresser au lemme suivant, qui est exactement l'exercice 86: si une matrice $2n \times 2n$ de $\mathrm{M}_{2n}\left(\frac{\mathbb{Z}}{2}\mathbb{Z}\right)$ a une diagonale nulle et tous les autres coefficients non nuls alors elle est inversible.

Ce n'est plus qu'une question de réduction modulaire et de mineurs ensuite.

Indication 92 · Énoncé p. 963 (Wronskien et liberté)
1. La dérivée de 0 est 0.
2. Prendre des fonctions de «supports de variations» bien disjoints.

Solution p. 986

Indication 93 · Énoncé p. 964 (Wronskien et EDL2H)
1. Dériver W.
2. Une exponentielle n'est jamais nulle. Remarquer que si λ_1 et λ_2 font une liaison locale alors on peut dériver $t \mapsto \lambda_1 y_1(t) + \lambda_2 y_2(t)$ pour obtenir une EDO une condition ponctuelle.

Solution p. 988

Indication 94 · Énoncé p. 964 (Wronskien et EDL, cas général)
Écrire pour tout j, $Y_j = \begin{pmatrix} y_j \\ y_j' \\ \vdots \\ y_j^{(n-1)} \end{pmatrix}$ et trouver une fonction matricielle (compagnon) A telle que pour tout j, $Y_j' = AY_j$.

Remarquer que le wronskien est égal à $\det(Y_1 \cdots Y_n)$, dériver une forme multilinéaire pour obtenir $\det(AY_1, Y_2, ..., Y_n) + \cdots + \det(Y_1, Y_2, ..., AY_n)$ et conclure à l'aide de l'exercice 17.

Indication 95 · Énoncé p. 964 (Wronskien et multiplication)
Attention ce n'est pas direct car il y a des dérivées de produit.

Pour traiter ces dérivées de produit on peut utiliser une formule de Leibniz et remarquer que cette formule donne une structure «triangulaire» en nombre de dérivées de g.

Solution p. 989

Solutions

Solution pour l'exercice 62 · Énoncé p. 954 · Indication p. 973 (Blocs et matrices 2x2)

1. En effectuant $C_1 \leftarrow C_1 + C_2$ c'est à dire en termes de produits par blocs,

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ I_n & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A+B & B \\ A+B & A \end{pmatrix}.$$

on obtient

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A+B & B \\ A+B & A \end{vmatrix}.$$

De même en effectuant $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ c'est à dire en termes de produits par blocs,

$$\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -I_n & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A+B & B \\ A+B & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A+B & B \\ 0 & A-B \end{pmatrix},$$

on obtient

$$\begin{vmatrix} A+B & B \\ A+B & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A+B & B \\ 0 & A-B \end{vmatrix}.$$

On a donc bien, comme déterminant triangulaire par blocs,

$$\boxed{\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = \det(A+B)\det(A-B)}.$$

2. En effectuant $C_1 \leftarrow C_1 + iC_2$ c'est à dire en termes de produits par blocs,

$$\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ iI_n & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A-iB & -B \\ iA+B & A \end{pmatrix},$$

on obtient

$$\begin{vmatrix} A & -B \\ B & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A-iB & -B \\ iA+B & A \end{vmatrix}.$$

Puis en effectuant $L_2 \leftarrow L_2 - iL_1$ c'est à dire en termes de produits par blocs,

$$\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -iI_n & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A-iB & -B \\ iA+B & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A-iB & -B \\ 0 & A+iB \end{pmatrix},$$

on obtient

$$\begin{vmatrix} A-iB & -B \\ iA+B & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A-iB & -B \\ 0 & A+iB \end{vmatrix}.$$

On a donc bien, comme déterminant triangulaire par blocs,

$$\boxed{\begin{vmatrix} A & -B \\ B & A \end{vmatrix} = \det(A+iB)\det(A-iB)}.$$

Solution pour l'exercice 88 · Énoncé p. 962 · Indication p. 978 (Dénombrement de déterminants)

▷ **Cardinal de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$**

On remarque tout d'abord que si $F \subset \mathbb{K}^n$ est un sous-espace vectoriel de dimension k, alors comme F est en bijection avec $\mathbb{K}^k$ on a $|F| = q^k$. D'où $|\mathbb{K}^n \setminus F| = q^n - q^k$.

De plus construire une matrice inversible revient à construire une famille libre de n vecteurs de $\mathbb{K}^n$ (la famille de ses colonnes).

Or une famille $(C_1, ..., C_r)$ est libre ssi pour tout $k \in [\![1, r]\!]$ on a $C_k \notin \mathrm{Vect}(C_1, ..., C_{k-1})$ (par récurrence).

On a donc

- ▷ $q^n - q^0$ choix pour C_1, cela revient à choisir un vecteur de $\mathbb{K}^n \setminus \mathrm{Vect}(\varnothing) = \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$,
- ▷ $q^n - q^1$ choix pour C_2, cela revient à choisir un vecteur de $\mathbb{K}^n \setminus \mathrm{Vect}(C_1)$ et comme (C_1) est libre $\dim(C_1) = 1$,
- ▷ $q^n - q^2$ choix pour C_3, cela revient à choisir un vecteur de $\mathbb{K}^n \setminus \mathrm{Vect}(C_1, C_2)$ et comme (C_1, C_2) est libre $\dim(C_1, C_2) = 2$,
- ▷ ...
- ▷ $q^n - q^{n-1}$ choix pour C_n, cela revient à choisir un vecteur de $\mathbb{K}^n \setminus \mathrm{Vect}(C_1, ..., C_{n-1})$ et comme $(C_1, ..., C_{n-1})$ est libre $\dim(C_1, ..., C_{n-1}) = n - 1$.

Au total on a donc

$$|\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})| = (q^n - q^0)(q^n - q^1)\cdots(q^n - q^{n-1})$$

ou encore

$$\boxed{|\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})| = q^{n^2} \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \tfrac{1}{q^k}\right)}.$$

▷ **Cas $\alpha = 0$**

Pour $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ on a $\det(A) = 0$ ssi $A \notin \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

Comme $|\mathrm{M}_n(\mathbb{K})| = q^{n^2}$ (c'est un $\mathbb{K}$-ev de dimension n^2), on a donc

$$\boxed{|\{A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \mid \det(A) = 0\}| = q^{n^2}\left(1 - \prod_{k=1}^{n}\left(1 - \tfrac{1}{q^k}\right)\right)}.$$

▷ **Cas $\alpha \neq 0$**

Notons $\mathcal{D}_\alpha = \{A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \mid \det(A) = \alpha\}$.

Alors pour tout $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{K}^*)^2$ on a $|\mathcal{D}_\alpha| = |\mathcal{D}_\beta|$.

En effet avec

$$D_{\beta\to\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha\beta^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \end{pmatrix}$$

on a $\det\left(D_{\beta\to\alpha}\right) = \alpha\beta^{-1}$ d'où

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\beta &\to \mathcal{D}_\alpha \\ M &\mapsto D_{\beta\to\alpha} M \end{aligned}$$

est bien définie, et bijective car de bijection réciproque $M \mapsto D_{\alpha\to\beta}M$.

Par conséquent (formule des bergers) on a (comme il y a $q-1$ valeurs possibles pour le déterminant)

$$\forall \alpha \in \mathbb{K}^\star, |\mathcal{D}_\alpha| = \frac{1}{q-1}|\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})|$$

c'est à dire pour tout $\alpha \in \mathbb{K}^\star$,

$$\boxed{|\{A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \mid \det(A) = \alpha\}| = q^{n^2}\frac{1}{q-1}\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{q^k}\right)}.$$

Solution pour l'exercice 89 · Énoncé p. 962 · Indication p. 978 (Déterminant pour le dénombrement)

1. Soit $D = \begin{pmatrix} r_1-a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & r_2-a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & r_n-a \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$.

On cherche alors à calculer $\det(D+aJ)$.

▷ **Si $a \notin \{r_1, ..., r_n\}$.**

Alors D est inversible d'inverse $D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r_1-a} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{r_2-a} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{r_n-a} \end{pmatrix}$.

Donc $\det(D+aJ) = \det(D)\det(I+aD^{-1}J)$.

Or $aD^{-1}J = \begin{pmatrix} \frac{a}{r_1-a} & \frac{a}{r_1-a} & \cdots & \frac{a}{r_1-a} \\ \frac{a}{r_2-a} & \frac{a}{r_2-a} & \cdots & \frac{a}{r_2-a} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{a}{r_n-a} & \frac{a}{r_n-a} & \cdots & \frac{a}{r_n-a} \end{pmatrix}$ est de rang 1.

Donc (cf le reste du TD), $\det(I+aD^{-1}J) = 1+\mathrm{tr}(aD^{-1}J) = 1+a\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{r_i-a}$.

Par conséquent

$$\begin{aligned}\det(D+aJ) &= \det(D)\left(1+a\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{r_i-a}\right)\\ &= \prod_{j=1}^{n}(r_j-a)\left(1+a\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{r_i-a}\right)\\ &= \prod_{j=1}^{n}(r_j-a)+a\sum_{i=1}^{n}\prod_{j\neq i}^{n}(r_j-a).\end{aligned}$$

▷ **Cas général.**

On a $a \mapsto \det(D+aJ)$ est polynomiale (en a) car le déterminant est polynomial en les coefficients, et $a \mapsto \prod_{j=1}^{n}(r_j-a)+a\sum_{i=1}^{n}\prod_{j\neq i}^{n}(r_j-a)$ est polynomiale.

Or ces deux fonctions polynomiales coïncident sur $\mathbb{R}\setminus\{r_1,...,r_n\}$ qui est infini et (rigidité) sont donc égales.

D'où

$$\boxed{\det(D+aJ)=\prod_{j=1}^{n}(r_j-a)+a\sum_{i=1}^{n}\prod_{j\neq i}^{n}(r_j-a)}.$$

2. ▷ **Interprétation combinatoire de la matrice**

Notons pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, $r_i=|D_i|$.

On a alors pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, $r_i\geq a$.

De plus il existe au plus un $i\in[\![1,n]\!]$ tel que $r_i=a$. En effet par l'absurde, si $i\neq j$ vérifient $r_i=r_j=a$ alors $\left|D_i\cap D_j\right|=a=|D_i|=\left|D_j\right|$ et donc $D_i=D_j$ ce qui contredit l'hypothèse que les D_i sont deux à deux distincts.

Ainsi,

$$\underbrace{\prod_{j=1}^{n}(r_j-a)}_{\geq 0}+a\sum_{i=1}^{n}\underbrace{\prod_{j\neq i}^{n}(r_j-a)}_{\substack{\geq 0\\ \text{et au moins un } \neq 0}}>0.$$

Soit $A\in \mathrm{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ définie par $A_{i,j}=\delta_{j\in D_i}$.

Soit $M=AA^\top\in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

Alors pour tout $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$ on a

$$\begin{aligned}(M)_{ij}&=\sum_{k=1}^{m}A_{ik}A_{jk}\\&=\sum_{k=1}^{m}\delta_{k\in D_i}\delta_{k\in D_j}\\&=\sum_{k=1}^{m}\delta_{k\in D_i\cap D_j}\\&=\left|D_i\cap D_j\right|\\&=\begin{cases}a & \text{si } i\neq j\\ r_i & \text{si } i=j\end{cases}\end{aligned}$$

Par le calcul de déterminant précédent on a

$$\det(M)>0$$

comme somme de produits de termes strictement positifs.

Par conséquent M est inversible i.e $\mathrm{rg}(M)=n$.

Or

$$\mathrm{rg}(M)\leq \mathrm{rg}(A)\leq m.$$

Donc

$$\boxed{n\leq m}.$$

Solution pour l'exercice 90 · Énoncé p. 963 · Indication p. 979 (Où sont les déterminants et le dénombrement ?)

▷ **On se ramène à une fonction génératrice**

Définissons

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma) x^{N(\sigma)}. \end{aligned}$$

(En fait on pourrait même définir $P = \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma) X^{N(\sigma)} \in \mathbb{R}[X]$.)

Alors f est continue (fonction polynomiale) et

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x &= \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma) \int_0^1 x^{N(\sigma)}\,\mathrm{d}x \\ &= \sum_{\sigma\in S_n} \frac{\varepsilon(\sigma)}{N(\sigma)+1}. \end{aligned}$$

On cherche donc à calculer une expression plus simple de f.

(De manière générale, en combinatoire, pour calculer des sommes de la forme $\sum k a_k$ ou $\sum \frac{1}{k+1} a_k$ on introduit souvent la fonction génératrice $x \mapsto \sum a_k x^k$.)

▷ **La fonction génératrice est un déterminant**

Posons, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\Delta_n(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & x \end{vmatrix}$$

alors par formule explicite du déterminant,

$$\Delta_n(x) = \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$$

où $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_{i,j} = 1$ si $i \neq j$ et x si $i = j$.

D'où pour tout $\sigma \in S_n$, $\prod_{i=1}^n a_{i,\sigma(i)} = x^{N(\sigma)} \times 1^{n-N(\sigma)}$.

Donc

$$f(x) = \Delta_n(x).$$

▷ **Calcul du déterminant**

En notant

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

on a $\Delta_n(x) = \det((x-1)I_n + J)$.

Or J est de rang 1 (toutes les colonnes sont colinéaires et non nulles) et de trace $n \neq 0$.

Donc (résultat classique, à refaire si nécessaire),

$$J \sim \begin{pmatrix} n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc $(x-1)I_n + J \sim \begin{pmatrix} x-1+n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x-1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x-1 \end{pmatrix}$ et par conséquent (le déterminant est un invariant de similitude et déterminant d'une matrice diagonale),

$$\Delta_n(x) = ((x-1)+n)(x-1)^{n-1}.$$

▷ **Conclusion**

On a donc

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \Delta_n(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 ((x-1)+n)(x-1)^{n-1}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 (x-1)^n\,\mathrm{d}x + n\int_0^1 (x-1)^{n-1}\,\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{(x-1)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 + n\left[\frac{(x-1)^n}{n}\right]_0^1 \\ &= \frac{0-(-1)^{n+1}}{n+1} + n \times \frac{0-(-1)^n}{n} \\ &= (-1)^{n+1}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \end{aligned}$$

c'est à dire

$$\boxed{\sum_{\sigma \in S_n} \frac{\varepsilon(\sigma)}{N(\sigma)+1} = (-1)^{n+1}\frac{n}{n+1}}.$$

Solution pour l'exercice 92 · Énoncé p. 963 · Indication p. 979 (Wronskien et liberté)

1. {Supposons que $(f_1, ..., f_n)$ est liée.}

Soient $(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$ non tous nuls tels que

$$\forall t \in I, \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f_j(t) = 0.$$

Alors comme les fonctions sont dérivables $n-1$ fois, on a

$$\forall i \in [\![0, n-1]\!], \forall t \in I, \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f_j^{(i)}(t) = 0.$$

On a donc

$$\forall t \in I, \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \begin{pmatrix} f_j(t) \\ f_j'(t) \\ \vdots \\ f_j^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent pour tout $t \in I$ les colonnes de la matrice

$$\begin{pmatrix} f_1(t) & f_2(t) & \cdots & f_n(t) \\ f_1'(t) & f_2'(t) & \cdots & f_n'(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(t) & f_2^{(n-1)}(t) & \cdots & f_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$$

sont liées et donc le déterminant de cette matrice est nul.

On a donc bien

$$\boxed{\forall t \in I, W_n(f_1, ..., f_n)(t) = 0}.$$

2. Soit χ une fonction dérivable valant 0 sur $]-\infty, 0[$ et non nulle sur $]0, +\infty[$.

Par exemple $\chi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

Cf TD de dérivabilité pour montrer même le caractère $\mathcal{C}^\infty$ de χ.

On définit alors $f_1, f_2 \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ par

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, f_1(t) &= \chi(t) \\ f_2(t) &= \chi(-t). \end{aligned}$$

▷ **Liberté**

Soient $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2$ tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \lambda_1 f_1(t) + \lambda_2 f_2(t) = 0.$$

En particulier comme par exemple $\chi(-1) = 0$ et $\chi(1) \neq 0$ on a

▷ En évaluant en 1,

$$\lambda_1 \chi(1) + \lambda_2 \chi(-1) = 0$$

d'où

$$\lambda_1 = 0.$$

▷ En évaluant en -1,

$$\lambda_1 \chi(-1) + \lambda_2 \chi(1) = 0$$

d'où

$$\lambda_2 = 0.$$

Donc $\boxed{(f_1, f_2) \text{ est libre}}$.

▷ **Wronskien nul**

On remarque que par continuité de χ' on a pour tout $t \leq 0$, $\chi(t) = 0$ et $\chi'(t) = 0$.

Soit $t \in \mathbb{R}$.

▷ Si $t \leq 0$ alors

$$\begin{aligned} W_2(f_1, f_2)(t) &= \begin{vmatrix} \chi(t) & \chi(-t) \\ \chi'(t) & -\chi'(-t) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 0 & \chi(-t) \\ 0 & -\chi'(-t) \end{vmatrix} \\ &= 0. \end{aligned}$$

▷ Si $t > 0$ alors

$$\begin{aligned} W_2(f_1, f_2)(t) &= \begin{vmatrix} \chi(t) & \chi(-t) \\ \chi'(t) & -\chi'(-t) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \chi(t) & 0 \\ \chi'(t) & 0 \end{vmatrix} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Dans tous les cas on a donc

$$\boxed{W_2(f_1, f_2)(t) = 0}.$$

Remarque: on pourrait même généraliser avec plus de fonctions. En prenant n segments disjoints $[a_i, b_i]$ et n fonctions à supports $[a_i, b_i]$, par exemple $t \mapsto \chi(t - a_i)\chi(b_i - t)$, on obtiendrait n fonctions linéairement indépendantes de Wronskien nul.

Solution pour l'exercice 93 · Énoncé p. 964 · Indication p. 979 (Wronskien et EDL2H)

1. Comme $y_1, y_2, y_1', y_2' \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, par somme et produit on a $W_2(y_1, y_2) \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et de plus

$$\begin{aligned} W_2(y_1, y_2)' &= (y_1 y_2' - y_2 y_1')' \\ &= y_1' y_2' + y_1 y_2'' - (y_2' y_1' + y_2 y_1'') \\ &= y_1 y_2'' - y_2 y_1'' \\ &= y_1(-a_1 y_2' - a_0 y_2) - y_2(-a_1 y_1' - a_0 y_1) \\ &= -a_1(y_1 y_2' - y_2 y_1') - a_0(y_1 y_2 - y_2 y_1) \\ &= -a_1 W_2(y_1, y_2) \end{aligned}$$

Par conséquent $W_2(y_1, y_2)$ est solution de l'équation différentielle

$$w' = -a_1 w$$

et donc (équation différentielle linéaire d'ordre 1 homogène) on a

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, W_2(y_1, y_2)(t) = W_2(y_1, y_2)(0) \exp\Big(-\int_0^t a_1(s)\,\mathrm{d}s\Big)}.$$

2. La proposition (ii) se réécrit $W_2(y_1, y_2)(0) \neq 0$ et la (iii) se réécrit $\forall t \in \mathbb{R}, W_2(y_1, y_2)(t) \neq 0$.

Par la formule précédente, comme pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\exp\left(-\int_0^t a_1(s)\,\mathrm{d}s\right) \neq 0$, on a donc $\boxed{(ii) \Leftrightarrow (iii)}$.

On a déjà vu que **si** (y_1, y_2) est liée **alors** pour tout $t \in \mathbb{R}$, $W_2(y_1, y_2)(t) = 0$ donc par contraposée $\boxed{(ii) \Rightarrow (i)}$.

Montrons $(i) \Rightarrow (ii)$ par contraposée.

Supposons que $W_2(y_1, y_2)(0) = 0$.

Alors il existe $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ non tous les deux nuls tels que

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_1'(0) \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} y_2(0) \\ y_2'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Posons $z = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$.

Alors on a

$$\begin{pmatrix} z(0) \\ z'(0) \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_1'(0) \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} y_2(0) \\ y_2'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Et de plus par principe de superposition, z est solution de l'équation différentielle linéaire d'ordre 2 homogène

$$\forall t \in \mathbb{R}, z''(t) + a_1(t)z'(t) + a_0(t)z(t) = 0.$$

Donc (cf cours d'équations différentielles) z est la solution de l'équation différentielle linéaire d'ordre 2 homogène ci-dessus vérifiant les conditions initiales $z(0) = 0$ et $z'(0) = 0$ et donc $z = 0_{\mathbb{R}\to\mathbb{C}}$.

Donc la famille (y_1, y_2) est liée.

Par contraposée on a donc bien montré que

$$\boxed{(i) \Rightarrow (ii)}.$$

Solution pour l'exercice 95 · Énoncé p. 964 · Indication p. 980 (Wronskien et multiplication)
Soit $t \in I$.

Par formule de Leibniz on a pour tout $j \in [\![1, n]\!]$ et tout $i \in [\![0, n-1]\!]$,

$$\left(gy_j\right)^{(i)} = \sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k} y_j^{(k)} g^{(i-k)}.$$

En terme matriciels cette égalité s'écrit

$$\forall (i,j) \in [\![1, n]\!] \left(gy_j\right)^{(i-1)}(t) = \sum_{k=0}^{i-1} \left(\binom{i-1}{k}\right) \times \left(g^{(i-1-k)}(t) y_j^{(k)}(t)\right)$$

ce qui peut se représenter

$$\begin{pmatrix} g(t) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ g'(t) & g(t) & 0 & \cdots & 0 \\ g''(t) & 2g'(t) & g(t) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \binom{n-1}{0} g^{(n-1)}(t) & \binom{n-1}{1} g^{(n-2)}(t) & \binom{n-1}{2} g^{(n-3)}(t) & \cdots & g(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1^{(0)}(t) & y_2^{(0)}(t) & \cdots & y_n^{(0)}(t) \\ y_1^{(1)}(t) & y_2^{(1)}(t) & \cdots & y_n^{(1)}(t) \\ y_1^{(2)}(t) & y_2^{(2)}(t) & \cdots & y_n^{(2)}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(t) & y_2^{(n-1)}(t) & \cdots & y_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (gy_1)^{(0)}(t) & (gy_2)^{(0)}(t) & \cdots & (gy_n)^{(0)}(t) \\ (gy_1)^{(1)}(t) & (gy_2)^{(1)}(t) & \cdots & (gy_n)^{(1)}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (gy_1)^{(n-1)}(t) & (gy_2)^{(n-1)}(t) & \cdots & (gy_n)^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$$

Par passage au déterminant, déterminant d'un produit et déterminant d'une matrice diagonale on en déduit

$$\boxed{W_n(gy_1, ..., gy_n)(t) = (g(t))^n W_n(y_1, ..., y_n)(t)}.$$

Remarque: il y avait de nombreuses méthodes pour utiliser la formule de Leibniz, une fois montré que pour tout $t \in I$ et pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$ on a

$$\begin{pmatrix} (gy_1)^{(i)}(t) \\ (gy_2)^{(i)}(t) \\ \vdots \\ (gy_n)^{(i)}(t) \end{pmatrix} = \sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k} g^{(i-k)}(t) \begin{pmatrix} y_1^{(k)}(t) \\ y_2^{(k)}(t) \\ \vdots \\ y_n^{(k)}(t) \end{pmatrix}$$

on peut par exemple:

- ▷ Utiliser le caractère multilinéaire alterné du déterminant,
- ▷ Utiliser des opérations du pivot.

Par exemple voici une variante utilisant le pivot:

On a par la formule de Leibniz

$$W_n(gy_1, ..., gy_n) = \begin{vmatrix} g(t)y_1(t) & g(t)y_2(t) & \cdots & g(t)y_n(t) \\ g'(t)y_1(t) + g(t)y_1'(t) & g'(t)y_2(t) + g(t)y_2'(t) & \cdots & g'(t)y_n(t) + g(t)y_n'(t) \\ g''(t)y_1(t) + 2g'(t)y_1'(t) + g(t)y_1''(t) & g''(t)y_2(t) + 2g'(t)y_2'(t) + g(t)y_2''(t) & \cdots & g''(t)y_n(t) + 2g'(t)y_n'(t) + g(t)y_n''(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} g^{(k)}(t) y_1^{(n-1-k)}(t) & \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} g^{(k)}(t) y_2^{(n-1-k)}(t) & \cdots & \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} g^{(k)}(t) y_n^{(n-1-k)}(t) \end{vmatrix}$$

par dilatation de la première ligne on a donc

$$W_n(gy_1, ..., gy_n) = g(t) \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) & \cdots & y_n(t) \\ g'(t)y_1(t) + g(t)y_1'(t) & g'(t)y_2(t) + g(t)y_2'(t) & \cdots & g'(t)y_n(t) + g(t)y_n'(t) \\ g''(t)y_1(t) + 2g'(t)y_1'(t) + g(t)y_1''(t) & g''(t)y_2(t) + 2g'(t)y_2'(t) + g(t)y_2''(t) & \cdots & g''(t)y_n(t) + 2g'(t)y_n'(t) + g(t)y_n''(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} g^{(k)}(t) y_1^{(n-1-k)}(t) & \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} g^{(k)}(t) y_2^{(n-1-k)}(t) & \cdots & \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} g^{(k)}(t) y_n^{(n-1-k)}(t) \end{vmatrix}$$

en effectuant pour tout $i \in [\![2, n]\!]$ la transvection

$$L_i \leftarrow L_i - g^{(i-1)}(t) L_1$$

on en déduit que

$$W_n(gy_1, ..., gy_n) = g(t) \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) & \cdots & y_n(t) \\ g(t)y_1'(t) & g(t)y_2'(t) & \cdots & g(t)y_n'(t) \\ 2g'(t)y_1'(t) + g(t)y_1''(t) & 2g'(t)y_2'(t) + g(t)y_2''(t) & \cdots & 2g'(t)y_n'(t) + g(t)y_n''(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-1}{k} g^{(k)}(t) y_1^{(n-1-k)}(t) & \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-1}{k} g^{(k)}(t) y_2^{(n-1-k)}(t) & \cdots & \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-1}{k} g^{(k)}(t) y_n^{(n-1-k)}(t) \end{vmatrix}$$

puis de nouveau par dilatation

$$W_n(gy_1,...,gy_n)=(g(t))^2\begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) & \cdots & y_n(t)\\ y_1'(t) & y_2'(t) & \cdots & y_n'(t)\\ 2g'(t)y_1'(t)+g(t)y_1''(t) & 2g'(t)y_2'(t)+g(t)y_2''(t) & \cdots & 2g'(t)y_n'(t)+g(t)y_n''(t)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-1}{k}g^{(k)}(t)y_1^{(n-1-k)}(t) & \sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-1}{k}g^{(k)}(t)y_2^{(n-1-k)}(t) & \cdots & \sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-1}{k}g^{(k)}(t)y_n^{(n-1-k)}(t)\end{vmatrix}$$

on continue de même en effectuant pour tout $i\in[\![3,n]\!]$ la transvection

$$L_i\leftarrow L_i-\binom{i-1}{1}g^{(i-2)}(t)L_2$$

et de manière générale en effectuant pour tout k entre 1 et n une dilatation sur la k-ième ligne puis les transvections pour tout $i\in[\![k+1,n]\!]$ de la forme $L_i\leftarrow L_i-\binom{i-1}{k-1}g^{(i-k)}(t)L_k$ on en déduit que

$$\boxed{W_n(gy_1,...,gy_n)=(g(t))^n\begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) & \cdots & y_n(t)\\ y_1'(t) & y_2'(t) & \cdots & y_n'(t)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ y_1^{(n-1)}(t) & y_2^{(n-1)}(t) & \cdots & y_n^{(n-1)}(t)\end{vmatrix}}$$

Chapitre 27

Séries

Énoncés 993
Indispensables 993
Thème: Nature par développement asymptotique 997
Thème: Comparaison séries-intégrales 999
Thème: Autour des critères 1000
Thème: Autour des séries alternées 1002
Thème: Calculs de sommes 1004
Thème: Produits de Cauchy 1005
Thème: Inégalités et encadrement 1006
Thème: Transformations et moyennes 1008
Indications 1010
Solutions 1017

Énoncés

Indispensables

Exercice 1 (◔★ Espaces ℓ^p)
Soit $p \in [1, +\infty[$. On pose

$$\ell^p(\mathbb{C}) = \left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid \sum |u_n|^p \text{ CV}\right\}$$

1. Montrer que $\ell^p(\mathbb{C})$ est un espace vectoriel.
2. Montrer que si $p \leq q$ alors $\ell^p(\mathbb{C}) \subset \ell^q(\mathbb{C})$.

Indication p. 1010

Exercice 2 (◔★ Espace ℓ^2)
Pour $u, v \in \ell^2(\mathbb{R})$ (cf exercice 1) on pose

$$\langle u, v\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n.$$

Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bien défini et est un produit scalaire sur $\ell^2(\mathbb{R})$.

Indication p. 1010

Exercice 3 (◔★ Développements asymptotiques en plus du cahier de calcul)
Déterminer la nature des séries suivantes

- $\sum_n \left(1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)$
- $\sum_n \left(\sqrt{n^2+1} - n\right)$
- $\sum_n \ln(\text{th}(n))$
- $\sum_n n\left(\sin\left(\frac{1}{n}\right) - \tan\left(\frac{1}{n}\right)\right)$

Indication p. 1010

Exercice 4 (◔★♠ Série harmonique)
Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

1. Montrer à l'aide d'une comparaison série-intégrale que

$$H_n = \ln(n) + O_{n\to+\infty}(1).$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose

$$u_n = H_n - \ln(n).$$

1. Montrer que

$$u_{n+1} - u_n = O_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

2. En déduire qu'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que

$$H_n = \ln(n) + \gamma + o_{n\to+\infty}(1)$$

Indication p. 1010 · Solution p. 1017

Exercice 5 (◔★ Et les produits)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ une suite strictement positive.

Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose

$$P_n = \prod_{k=0}^{n} u_k.$$

On suppose de plus qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell.$$

1. Montrer que si $\ell > 1$ alors $P_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
2. Montrer que si $\ell < 1$ alors $P_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

On suppose désormais que $\ell = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $v_n = u_n - 1$ c'est à dire

$$u_n = 1 + v_n$$

1. Montrer que **si** v_n est de signe constant **alors** $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ssi $\sum v_n$ converge.

Indication p. 1010

Exercice 6 (◔★♠ Séries de Bertrand)
Déterminer les $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$\sum \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta}$$

converge.

Indication p. 1010 · Solution p. 1018

Exercice 7 (◔★ Critère de d'Alembert)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$.

On suppose qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell.$$

1. Montrer que si $\ell > 1$ alors $\sum u_n$ diverge.
2. Montrer que si $\ell < 1$ alors $\sum u_n$ converge.
3. Que peut-on dire dans le cas $\ell = 1$?

Indication p. 1010 · Solution p. 1020

Exercice 8 (◔★ Critère de Cauchy)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$.

On suppose qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$(u_n)^{\frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell.$$

1. Montrer que si $\ell > 1$ alors $\sum u_n$ diverge.
2. Montrer que si $\ell < 1$ alors $\sum u_n$ converge.
3. Que peut-on dire dans le cas $\ell = 1$?

Indication p. 1010 · Solution p. 1021

Exercice 9 (◑★ Critère de Raabe-Duhamel)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$.

On suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)$$

1. Montrer que si $\alpha < 1$ alors $\sum u_n$ diverge.
2. Montrer que si $\alpha > 1$ alors $\sum u_n$ converge.
3. Que dire si $\alpha = 1$?

Indication p. 1011 · Solution p. 1021

Exercice 10 (◔★♠ Transformée d'Abel)
Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites complexes. Pour $n \in \mathbb{N}$ on note $B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} a_k b_k = a_n B_n - \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) B_k.$$

Commenter.

Exercice 11 (◑★ Critère d'Abel)
Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{C})^{\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On suppose que
(i) $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$,
(ii) $\sum_n (a_{n+1} - a_n)$ converge **absolument**,
(iii) la suite des sommes partielles $\left(\sum_{k=0}^{n} b_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

Montrer que $\sum a_n b_n$ converge.

Montrer que si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est décroissante et tend vers 0 alors l'hypothèse (ii) est vérifiée.

Commenter.

Indication p. 1011

Thème: Nature par développement asymptotique

Exercice 12 (◔★ Ce n'est pas une série de Riemann)

1. Déterminer la nature de

$$\sum_n \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}.$$

2. Déterminer la nature de

$$\sum_n \frac{1}{n^{1+\frac{2\ln(\ln(n))}{\ln(n)}}}.$$

Indication p. 1011 · Solution p. 1024

Exercice 13 (◔★ Développement asymptotique et paramètres)
Déterminer les $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$ tels que

$$\sum \left(a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n} + c\sqrt{n-1}\right)$$

converge.

Indication p. 1011 · Solution p. 1024

Exercice 14 (◑★ Un développement asymptotique d'une suite récurrente)
On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par récurrence par

$$u_0 > 1$$
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + \ln(u_n).$$

Déterminer la nature de

$$\sum_n \frac{1}{u_n}.$$

Indication p. 1011

Exercice 15 (◑★ Un exercice de suite récurrente peu camouflé)
Soit $\alpha > 0$.

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 \in]0,1[$$
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n - (u_n)^\alpha.$$

Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et déterminer la nature de $\sum_n u_n$ selon la valeur de α.

Indication p. 1011

Exercice 16 (◔★ Encore des discussions de paramètres)
Déterminer selon $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ la nature de

$$\sum \frac{\ln(1+n^\alpha)}{n^\beta}.$$

Indication p. 1012 · Solution p. 1025

Exercice 17 (◑☆ Super-Bertrand)
Soit $N \in \mathbb{N}$.

Déterminer les $(\alpha_0,...,\alpha_N) \in \mathbb{R}^{N+1}$ tels que

$$\sum \frac{1}{n^{\alpha_0}(\ln(n))^{\alpha_1}(\ln(\ln(n)))^{\alpha_2}\cdots\left(\underbrace{\ln(\ln(\cdots\ln),N\ \text{ fois})(n)}\right)^{\alpha_N}}$$

converge.

Indication p. 1012

Thème: Comparaison séries-intégrales

Exercice 18 (◔★ Équivalent de ζ en 1)
Pour $s > 1$ on pose

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}.$$

1. Justifier la bonne définition de ζ.
2. Montrer que

$$\zeta(s) \underset{s\to 1^+}{\sim} \frac{1}{s-1}.$$

Indication p. 1012 · Solution p. 1026

Exercice 19 (◔★ Un développement asymptotique parmi d'autres)
Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k} = \frac{1}{2}\ln(n)^2 + C + o_{n\to+\infty}(1).$$

Indication p. 1012 · Solution p. 1027

Exercice 20 (◑☆ Suite sur puissance de somme partielle)
Soit $(u_n) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^{\mathbb{N}}$ une suite strictement positive.

Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

1. On suppose que $\sum u_n$ converge. Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $\sum \frac{u_n}{S_n^\alpha}$ converge.
2. On suppose désormais que $\sum u_n$ diverge.
- ▷ Montrer que pour tout $\alpha > 1$, $\sum \frac{u_n}{S_n^\alpha}$ converge.
- ▷ Montrer que pour tout $\alpha \leq 1$, $\sum \frac{u_n}{S_n^\alpha}$ diverge.

Indication p. 1012 · Solution p. 1029

Thème: Autour des critères

Exercice 21 (◔★ Un cas particulier de Raabe-Duhamel)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$.

On suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + O_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

1. Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{C}{n^\alpha}$.
2. En déduire une CNS sur α pour la convergence de $\sum u_n$.

Indication p. 1012 · Solution p. 1030

Exercice 22 (◑★ Condensation de Cauchy)
Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$ une suite **décroissante** de réels positifs.

Montrer que les séries

$$\sum_k u_k \text{ et } \sum_k 2^k u_{2^k}$$

sont de même nature.

Indication p. 1012 · Solution p. 1031

Exercice 23 (◑☆ Un conséquence très partielle)

1. Donner un exemple de suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ positive telle que
$$\sum_n u_n \text{ converge et } \neg\left(u_n = o_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ positive et **décroissante**.
Montrer que
$$\sum_n u_n \text{ converge } \Rightarrow u_n = o_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\right).$$

Indication p. 1013

Exercice 24 (◕☆ Une récurrence)
Soient $0 < a < b$ deux réels.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = 1$$
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{n+a}{n+b} u_n.$$

1. Montrer que $\sum u_n$ converge ssi $a < b + 1$.
2. Déterminer dans ce cas la somme de $\sum u_n$.

Indication p. 1013

Exercice 25 (◔☆ Encore un peu de marge et Riemann)
Soit $\alpha > 0$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ telle que $u_n \sim \alpha \ln(n)$.

Montrer que la série

$$\sum_n e^{-u_n}$$

- converge si $\alpha > 1$,
- diverge si $\alpha \leq 1$.

Indication p. 1013

Thème: Autour des séries alternées

Exercice 26 (◔★ Un calcul de somme par découpe détaillé)
Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

et

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}.$$

1. Montrer que
- ▷ $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge,
- ▷ $H_n = \ln(n) + \gamma + o_{n\to+\infty}(1)$.

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_{2n} = H_{2n} - H_n.$$

3. En déduire que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln(2).$$

Indication p. 1013 · Solution p. 1032

Exercice 27 (◑☆ Trois méthodes pour adapter un classique)
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose

$$u_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \not\equiv 0 \pmod{47} \\ -46 & \text{si } n \equiv 0 \pmod{47} \end{cases}.$$

1. Montrer que

$$\sum_{n} \frac{u_n}{n}$$

converge.

2. Déterminer sa somme.

Indication p. 1013

Exercice 28 (◔★ Séries pas vraiment alternées)
Déterminer les $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n n^\beta}$$

converge.

Indication p. 1013 · Solution p. 1034

Exercice 29 (◔★ Encore des séries pas vraiment alternées)
Déterminer selon la valeur de $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ la nature de

$$\sum_n \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$$

Indication p. 1013 · Solution p. 1035

Exercice 30 (◔☆ Juste Abel)
Déterminer la nature de

$$\sum_n \frac{e^{in\theta}}{n}.$$

Indication p. 1014

Exercice 31 (◔☆ Un alternement)
Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \begin{cases} \frac{a}{\sqrt{n}} & \text{si } n \text{ pair} \\ \frac{b}{\sqrt{n}} & \text{si } n \text{ impair.} \end{cases}$$

Déterminer les $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\sum u_n$ converge.

Indication p. 1014 · Solution p. 1036

Exercice 32 (◑☆ Un regroupement)
Déterminer la nature de la série

$$\sum_n \frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{n}.$$

Indication p. 1014

Thème: Calculs de sommes

Exercice 33 (◑★ Un calcul de somme)
Déterminer

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}\ln(k)}{k}.$$

Indication p. 1014 · Solution p. 1036

Exercice 34 (◔★ Développement asymptotique)
Déterminer un développement asymptotique de

$$\sum_{k=1}^{n} k^{\frac{1}{k}}.$$

Indication p. 1014 · Solution p. 1037

Exercice 35 (◑☆ Un calcul de somme explicite)
Soit $p \geq 2$ un entier.

Montrer que

$$\sum_{n\geq p} \frac{1}{\binom{n}{p}}$$

est convergente et déterminer sa somme.

Indication p. 1014

Thème: Produits de Cauchy

Exercice 36 (◔☆ Attention à la CVA pour Cauchy)
Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose

$$a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$
$$b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}.$$

ainsi que

$$c_n = \sum_{k=1}^{n-1} a_k b_{n-k}.$$

1. Montrer que les séries $\sum_n a_n$ et $\sum_n b_n$ convergent.
2. Montrer que $\sum_n c_n$ diverge.

Indication p. 1014

Exercice 37 (◕☆ Théorème de Mertens)
Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites complexes telles que

- ▹ la série $\sum_n a_n$ converge **absolument**,
- ▹ la série $\sum_n b_n$ converge.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Montrer que la série $\sum_n c_n$ converge et que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} c_k = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k\right)\left(\sum_{k=0}^{+\infty} b_k\right).$$

Indication p. 1014

Thème: Inégalités et encadrement

Exercice 38 (◔☆ Réarrangement et séries divergentes)
Soit $\sigma \in S(\mathbb{N})$ une permutation de $\mathbb{N}$.

Montrer que

$$\sum_n \frac{\sigma(n)}{n^2}$$

diverge.

Indication p. 1015

Exercice 39 (◔★ Il y a toujours plus petit)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite positive telle que $\sum u_n$ diverge.

Montrer qu'il existe $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite positive telle que $v_n = o_{n\to+\infty}(u_n)$ et $\sum v_n$ diverge.

Indication p. 1015

Exercice 40 (◔☆ Un vers deux)
Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs tq

$$\forall k \in \mathbb{N}, u_{2k} + u_{2k+1} \geq u_k.$$

Montrer que

$$\sum_k u_k$$

diverge.

Indication p. 1015 · Solution p. 1038

Exercice 41 (◑☆ Carré sur le suivant)
Soit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs tendant vers 0.

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x_k^2}{x_{k+1}} \in [4x_0, +\infty]$$

Indication p. 1015 · Solution p. 1039

Exercice 42 (◉☆ Inégalité de Carleman)
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs.

Montrer que

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\prod_{k=0}^{n}a_k\right)^{\frac{1}{n+1}}\leq e\sum_{n=0}^{+\infty}a_n.$$

Indication p. 1015 · Solution p. 1039

Exercice 43 (◕★ Un peu d'arithmétique et de combinatoire)
Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on note le n-ième nombre premier p_n.

On suppose par l'absurde que la série

$$\sum_n\frac{1}{p_n}$$

converge.

1. Montrer qu'il existe $m\in\mathbb{N}$ tel que

$$\sum_{k=m}^{+\infty}\frac{1}{p_k}<\frac{1}{2}.$$

On fixe dans la suite un tel $m\in\mathbb{N}$ et on note pour tout $N\in\mathbb{N}$,

$$G(N)=|\{n\in[\![1,N]\!]\mid\exists k\geq m,p_k\mid n\}|$$

1. Montrer que

$$G(N)\leq\frac{N}{2}.$$

2. Montrer que

$$N-G(N)\leq\left(\frac{\ln(N)}{\ln(2)}+1\right)^m$$

3. Conclure.

Indication p. 1015

Thème: Transformations et moyennes

Exercice 44 (◔★ Gendarmes et séries)
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites réelles (non nécessairement positives).

On suppose que

$$\forall n \in \mathbb{N}, g_n \leq u_n \leq d_n.$$

Montrer que **si** $\sum g_n$ et $\sum d_n$ convergent **alors** $\sum u_n$ converge.

Indication p. 1015

Exercice 45 (◔★ C'est exactement Césàro)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

Montrer si la série

$$\sum_n u_n$$

converge alors la suite $\left(\sum_{k=0}^n \left(1-\frac{k}{n}\right)u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^n \left(1-\frac{k}{n}\right)u_k = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k.$$

Indication p. 1015

Exercice 46 (◑☆ Triangularité et équivalent dans le cas convergent)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

On suppose que

$$\sum_n u_n$$

converge absolument.

Montrer que

$$\sum_n \left(\frac{\sum_{k=0}^n k u_k}{n^2}\right)$$

converge.

Indication p. 1016

Exercice 47 (◔☆ Petite transformation)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite positive.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{u_n}{u_n+1}$.

Montrer que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Indication p. 1016

Exercice 48 (◕☆ Si pas de CVA tout est possible)
Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe une suite $\sigma \in S(\mathbb{N})$ une permutation de $\mathbb{N}$ telle que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{\sigma(k)}}{\sigma(k)} = x.$$

Indication p. 1016

Exercice 49 (◔★ Un exemple de développement asymptotique)
Déterminer la nature de

$$\sum_n \sin\Big(\big(1+\sqrt{2}\big)^n \pi\Big).$$

Indication p. 1016 · Solution p. 1041

Indications

Indication 1 · Énoncé p. 993 (Espaces ℓ^p)
1. C'est un sev de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, pour le montrer utiliser par exemple l'inégalité de Minkowski.
2. Utiliser que en particulier $u_n \to 0$. On remarque qu'une telle propriété serait fausse dans le cas L^p.

Indication 2 · Énoncé p. 993 (Espace ℓ^2)
Le point important est la bonne définition. Par IAG $|u_n v_n| \leq \frac{1}{2}(|u_n|^2 + |v_n|^2)$.

Indication 3 · Énoncé p. 993 (Développements asymptotiques en plus du cahier de calcul)
Faire un DL.

Indication 4 · Énoncé p. 994 (Série harmonique)
1. RAS
2. DL
3. Relier $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à $\sum(u_{n+1} - u_n)$.

Solution p. 1017

Indication 5 · Énoncé p. 994 (Et les produits)
ln

Indication 6 · Énoncé p. 995 (Séries de Bertrand)
Pour $\alpha \neq 1$ comparer $\frac{1}{n^{\alpha}\ln(n)^{\beta}}$ et $\frac{1}{n^{\frac{1+\alpha}{2}}}$. Pour $\alpha = 1$ effectuer une comparaison série-intégrale.

Solution p. 1018

Indication 7 · Énoncé p. 995 (Critère de d'Alembert)
1. Au choix conclure par divergence grossière ou comparer avec une série géométrique de raison $q \in]1, \ell[$. (Par exemple $q = \frac{\ell+1}{2}$).
2. Comparer avec une série géométrique de raison $q \in]\ell, 1[$. (Par exemple $q = \frac{\ell+1}{2}$).
3. On ne peut rien dire, par exemple séries de Riemann.

Solution p. 1020

Indication 8 · Énoncé p. 995 (Critère de Cauchy)
1. Au choix conclure par divergence grossière ou comparer avec une série géométrique de raison $q \in]1, \ell[$. (Par exemple $q = \frac{\ell+1}{2}$).
2. Comparer avec une série géométrique de raison $q \in]\ell, 1[$. (Par exemple $q = \frac{\ell+1}{2}$).
3. On ne peut rien dire, par exemple séries de Riemann.

Solution p. 1021

Indication 9 · Énoncé p. 996 (Critère de Raabe-Duhamel)

1. Soit $\beta \in]\alpha, 1[$ (par exemple $\frac{\alpha+1}{2}$). Comparer $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à $\left(\frac{1}{n^\beta}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Soit $\beta \in]1, \alpha[$ (par exemple $\frac{\alpha+1}{2}$). Comparer $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à $\left(\frac{1}{n^\beta}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. On ne peut rien dire, par exemple séries de Bertrand.

Solution p. 1021

Indication 11 · Énoncé p. 996 (Critère d'Abel)
Pour démontrer le critère d'Abel utiliser … une transformée d'Abel ! (exercice 10).

Remarquer ensuite que $a_n B_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (tend vers 0 fois bornée), et que

$$\sum_{k=0}^{n-1} |\ (a_{k+1} - a_k)B_k| \leq \|B\|_\infty \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{|a_{k+1} - a_k|}.$$

Indication 12 · Énoncé p. 997 (Ce n'est pas une série de Riemann)
Faire un équivalent simple.

Solution p. 1024

Indication 13 · Énoncé p. 997 (Développement asymptotique et paramètres)
Effectuer un développement asymptotique de en $O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$ est suffisant pour conclure.

Solution p. 1024

Indication 14 · Énoncé p. 997 (Un développement asymptotique d'une suite récurrente)
Soit utiliser en adaptant la méthode vue en TD sur les DA pour obtenir un développement asymptotique de u_n en $n\ln(n)$.

Soit faire un bootstrap pour obtenir $u_n = O(n\ln(n))$.

Conclure par Bertrand.

Indication 15 · Énoncé p. 998 (Un exercice de suite récurrente peu camouflé)
Pour montrer la bonne définition puis que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ faire une étude de suite récurrente 100% automatique (intervalle stable, monotonie, etc.).

Puis encore une étude de suite récurrente classique pour obtenir un équivalent, étudier

$$\frac{(u_n)^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{(u_{n+1})^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

puis Cesàro.

Indication 16 · Énoncé p. 998 (Encore des discussions de paramètres)
Si $\alpha > 0$, Bertrand.

Si $\alpha = 0$, Riemann.

Si $\alpha < 0$, Riemann.

Solution p. 1025

Indication 17 · Énoncé p. 998 (Super-Bertrand)
Commencer par traiter l'exercice 6.

Indication 18 · Énoncé p. 999 (Équivalent de ζ en 1)
Encadrer par comparaison série-intégrale.

Solution p. 1026

Indication 19 · Énoncé p. 999 (Un développement asymptotique parmi d'autres)
Faire exactement comme l'exercice 4

Solution p. 1027

Indication 20 · Énoncé p. 999 (Suite sur puissance de somme partielle)

1. Équivalent.
2. Commencer par traiter le cas intégral, c'est à dire étudier $\int_0^x \frac{f(t)}{F(x)^\alpha}\,\mathrm{d}t$ (où $F' = f$) quand $x \to +\infty$.

   Puis essayer de répliquer la preuve en étudiant $\frac{S_n - S_{n-1}}{S_n^\alpha}$ et l'équivalent intégral.

Solution p. 1029

Indication 21 · Énoncé p. 1000 (Un cas particulier de Raabe-Duhamel)

1. Remarquer que $\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) = -\frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ d'où $\sum\left((\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)) + \alpha\frac{1}{n}\right)$ converge. Utiliser ensuite une somme télescopique et le fait que $H_n = \ln(n) + \gamma + o_{n\to+\infty}(1)$.
2. Séries de Riemann.

Solution p. 1030

Indication 22 · Énoncé p. 1000 (Condensation de Cauchy)
Remarquer que pour tout k,

$$2^k u_{2^{k+1}} \leq \sum_{i=2^k}^{2^{k+1}-1} u_i \leq 2^k u_{2^k}.$$

Solution p. 1031

Indication 23 · Énoncé p. 1000 (Un conséquence très partielle)

1. Par exemple faire des paquets grands de valeurs petites.
2. Par critère de condensation de Cauchy, cf exercice 22, ou équivalent on a $2^k u_{2^k} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ puis monotonie.

Indication 24 · Énoncé p. 1001 (Une récurrence)

1. Étudier $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et utiliser l'exercice 9.
2. Poser $S_n^0 = \sum_{k=0}^n u_k$ et $S_n^1 = \sum_{k=0}^n k u_k$. Puis déterminer une relation de récurrence sur $\binom{S_n^0}{S_n^1}$.

Indication 25 · Énoncé p. 1001 (Encore un peu de marge et Riemann)
Prendre β entre 1 et α et comparer à Riemann.

Indication 26 · Énoncé p. 1002 (Un calcul de somme par découpe détaillé)

1. Classique.
2. $\sum_k (-1)^{k-1} a_k = 2\sum_{k \text{ pair}} a_k - \sum_k a_k$
3. Faire le dev asymptotique, passer à la limite car tout converge.

Solution p. 1032

Indication 27 · Énoncé p. 1002 (Trois méthodes pour adapter un classique)
Il y a au moins trois méthodes:

- ▹ Utiliser le critère de d'Abel, cf exercice 11.
- ▹ Regrouper par paquets de 47, faire un DL et trouver un équivalent en constante sur n^2.
- ▹ Faire intervenir des bouts de séries harmoniques, cf 26, on remarque que cette méthode donne aussi la somme.

Indication 28 · Énoncé p. 1003 (Séries pas vraiment alternées)

- ▹ Pour $\beta > \alpha$, déterminer un équivalent positif.
- ▹ Pour $\alpha > \beta$, l'équivalent n'est pas positif. Effectuer un développement de la forme alterné + positif.

Solution p. 1034

Indication 29 · Énoncé p. 1003 (Encore des séries pas vraiment alternées)
Faire un développement asymptotique à un ordre suffisant pour avoir un signe.

Solution p. 1035

Indication 30 · Énoncé p. 1003 (Juste Abel)
Si $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$ alors Abel.

Indication 31 · Énoncé p. 1003 (Un alternement)
On peut commencer par traiter les cas $(a,b) = (1,1)$ et $(a,b) = (1,-1)$.

Constater ensuite que les suites 2-périodiques forment un espace vectoriel de dimension 2.

Solution p. 1036

Indication 32 · Énoncé p. 1004 (Un regroupement)
Regrouper les termes par paquets de la forme $[\![k^2, (k+1)^2[\![$.

Indication 33 · Énoncé p. 1004 (Un calcul de somme)
S'inspirer de l'exercice 26.

Solution p. 1036

Indication 34 · Énoncé p. 1004 (Développement asymptotique)
Faire un équivalent de $\exp\left(\frac{\ln(k)}{k}\right)$.

Solution p. 1037

Indication 35 · Énoncé p. 1004 (Un calcul de somme explicite)
La convergence est immédiate.

Pour la somme, il faut se ramener à une somme télescopique. On peut étudier une fraction rationnelle ou bien sinon étudier $\frac{1}{\binom{n-1}{p-1}} - \frac{1}{\binom{n}{p-1}}$. On obtient $\frac{p}{p-1}$.

Indication 36 · Énoncé p. 1005 (Attention à la CVA pour Cauchy)

1. CSSA
2. Montrer que pour tout n et $k \in [\![1, n-1]\!]$, $\frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{n-k}} \geq \frac{2}{n}$ et en déduire une divergence grossière.

Indication 37 · Énoncé p. 1005 (Théorème de Mertens)
Effectuer une transformée d'Abel pour faire apparaître les sommes partielles de b et faire une preuve « à la Cesàro ».

Indication 38 · Énoncé p. 1006 (Réarrangement et séries divergentes)
Par exemple adapter la série harmonique ou tout simplement une inégalité de réordonnement sur les sommes partielles.

Indication 39 · Énoncé p. 1006 (Il y a toujours plus petit)
Considérer par exemple, en s'inspirant des intégrales, $v_n = \frac{u_n}{\sum_{k=0}^{n} u_k}$.

Indication 40 · Énoncé p. 1006 (Un vers deux)
Regrouper entre deux puissance de deux.

Solution p. 1038

Indication 41 · Énoncé p. 1006 (Carré sur le suivant)
Par IAG, $\frac{x_k^2}{x_{k+1}} \geq 4(x_k - x_{k+1})$.

Solution p. 1039

Indication 42 · Énoncé p. 1007 (Inégalité de Carleman)
On pourra utiliser l'IAG avec des poids $\frac{(k+1)^k}{k^{k-1}}$.

Alternativement, faire l'IAG sur $(k+1)a_k$.

Solution p. 1039

Indication 43 · Énoncé p. 1007 (Un peu d'arithmétique et de combinatoire)

1. Le reste d'une série convergente tend vers 0.
2. Remarquer que
$$G(N) \leq \sum_{k \geq m} \left\lfloor \frac{N}{p_k} \right\rfloor.$$
3. On a $N - G(N)$ est le nombre d'entiers produits uniquement des p_k pour $k < m$.

   Remarquer que choisir un tel entier revient à choisir les valuations p_k-adiques qui sont plus petites que $\frac{\ln(N)}{\ln(p_k)}$. Cf arithmétique/combinatoire.
4. Absurde.

Indication 44 · Énoncé p. 1008 (Gendarmes et séries)
On a $0 \leq d_n - u_n \leq d_n - g_n$.

Indication 45 · Énoncé p. 1008 (C'est exactement Césàro)
Remarquer que $\left(\sum_{k=0}^{n}\left(1 - \frac{k}{n}\right)u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est rien d'autre que la moyenne de Césàro des sommes partielles.

Indication 46 · Énoncé p. 1008 (Triangularité et équivalent dans le cas convergent)
Faire une interversion de sommes sur une somme partielle et à l'aide par exemple d'une comparaison série/intégrale, montrer que, à k fixé, $\sum_{n=k}^{N} \frac{1}{n^2}$ est au pire en $\frac{1}{k}$.

Indication 47 · Énoncé p. 1009 (Petite transformation)
Remarquer que

- ▷ les deux suites positives et bien définies,
- ▷ pour tout n, $u_n = \frac{v_n}{1-v_n}$ (inversion d'homographie),
- ▷ si $\sum u_n$ converge alors en particulier $u_n \to 0$,
- ▷ si $u_n \to 0$ alors $v_n \sim u_n$.

Indication 48 · Énoncé p. 1009 (Si pas de CVA tout est possible)
Pour $x \in \mathbb{R}$, l'idée est de prendre les termes pairs (donc positifs) das l'ordre tant que la somme partielle est inférieure à x et les termes impairs (donc négatifs) dans l'ordre tant que la somme partielle est supérieure à x.

Il reste à montrer que cela donne bien une bijection de $\mathbb{N}$ et à vérifier la limite.

On remarque que l'on peut adapter la preuve pour une limite infinie (en « bougeant » le réel cible) et même obtenir des comportements plus complexes.

Indication 49 · Énoncé p. 1009 (Un exemple de développement asymptotique)
Calculer

$$\sum_n \sin\left(\left(1-\sqrt{2}\right)^n \pi\right).$$

Solution p. 1041

Solutions

Solution pour l'exercice 4 · Énoncé p. 994 · Indication p. 1010 (Série harmonique)

1. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

D'où pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\forall t \in [k, k+1], \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}$$

donc par croissance de l'intégrale, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leq \frac{1}{k}$$

et donc pour tout $k \geq 2$,

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leq \frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t.$$

En sommant on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_1^n \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{n} \leq H_n \leq \frac{1}{1} + \int_1^n \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$$

c'est à dire, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{n} \leq H_n - \ln(n) \leq 1$$

et en particulier

$$\boxed{H_n - \ln(n) = O_{n\to+\infty}(1)}.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a par Développement Limité

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= (H_{n+1} - H_n) - (\ln(n+1) - \ln(n)) \\
&= \frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \\
&= \frac{1}{n}\frac{1}{1+\frac{1}{n}} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \\
&= \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n} + o_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)\right) - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2}\frac{1}{n^2} + o_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\
&= -\frac{1}{2}\frac{1}{n^2} + o_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)
\end{aligned}$$

et en particulier

$$\boxed{u_{n+1} - u_n = O_{n\to+\infty}\left(\tfrac{1}{n^2}\right)}.$$

3. comme $2 > 1$ on a $\sum_n \frac{1}{n^2}$ converge (série de Riemann). D'où (comparaison de séries à termes positifs), $\sum_n (u_{n+1} - u_n)$ CVA et donc $\sum_n (u_{n+1} - u_n)$ CV (en fait on avait même un signe par l'équivalence $u_{n+1} - u_n$ par les calculs de la question précédente).

Donc (série télescopique) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

En notant γ sa limite on a donc bien

$$\boxed{H_n = \ln(n) + \gamma + o_{n\to+\infty}(1)}.$$

Solution pour l'exercice 6 · Énoncé p. 995 · Indication p. 1010 (Séries de Bertrand)
On procède par disjonction de cas.

▷ Si $\alpha < 1$.

Posons $\tilde{\alpha} = \frac{1+\alpha}{2}$.

Alors

$$\alpha < \tilde{\alpha} < 1.$$

Par croissances comparées, $n^\alpha \ln(n)^\beta = o_{n\to+\infty}(n^{\tilde{\alpha}})$ et donc

$$\frac{1}{n^{\tilde{\alpha}}} = o_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta}\right)$$

Or comme $\tilde{\alpha} < 1$, la série $\sum \frac{1}{n^{\tilde{\alpha}}}$ diverge (série de Riemann).

Par comparaison de séries à termes positifs, $\boxed{\sum \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta} \text{ diverge.}}$

▷ Si $\alpha > 1$.

Posons $\tilde{\alpha} = \frac{1+\alpha}{2}$.

Alors

$$1 < \tilde{\alpha} < \alpha.$$

Par croissances comparées, $n^{\tilde{\alpha}} = o_{n\to+\infty}(n^\alpha \ln(n)^\beta)$ et donc

$$\frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta} = o_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^{\tilde{\alpha}}}\right)$$

Or comme $\tilde{\alpha} > 1$, la série $\sum \frac{1}{n^{\tilde{\alpha}}}$ converge (série de Riemann).

Par comparaison de séries à termes positifs, $\boxed{\sum \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta} \text{ converge.}}$

▷ Si $\alpha = 1$

Soit $f_\beta :]1,+\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x\ln(x)^\beta}$.

Alors f_β est dérivable, pour tout $x > 1$, $f'_\beta(x) = \frac{x\beta\frac{1}{x}\ln(x)^{\beta-1} - \ln(x)^\beta}{(x\ln(x)^\beta)^2} = \frac{\ln(x)^{\beta-1}(\beta - \ln(x))}{(x\ln(x)^\beta)^2}$ et donc f_β est décroissante à partir d'un certain rang A (plus précisément à partir de e^β).

Par comparaison série intégrale pour tout $n \geq A$,

[Comparaison série intégrale à rédiger si nécessaire]

$$\int_A^n \frac{1}{t(\ln t)^\beta}\mathrm{d}t + \frac{1}{n(\ln n)^\beta} \leq \sum_{k=A}^n \frac{1}{k(\ln k)^\beta} \leq \frac{1}{A(\ln A)^\beta} + \int_A^n \frac{1}{t(\ln t)^\beta}\mathrm{d}t.$$

▷ **Calcul de l'intégrale**

Si $\beta \neq 1$ alors

$$\int_A^n \frac{1}{t(\ln t)^\beta}\mathrm{d}t = \int_A^n \ln'(t)(\ln t)^{-\beta}\mathrm{d}t = \left[\frac{(\ln t)^{1-\beta}}{1-\beta}\right]_A^n = \frac{(\ln n)^{1-\beta}}{1-\beta} - \frac{(\ln A)^{1-\beta}}{1-\beta}$$

et si $\beta = 1$ alors

$$\int_A^n \frac{1}{t\ln(t)}\,\mathrm{d}t = \int_A^n \ln'(t)\ln(t)^{-1}\,\mathrm{d}t = [\ln(\ln(t))]_A^n = \ln(\ln(n)) - \ln(\ln(A)).$$

▷ **Si $\beta = 1$**

Alors comme pour tout $n \geq A$,

$$\ln(\ln(n)) - \ln(\ln(A)) + \frac{1}{n\ln(n)} \leq \sum_{k=A}^{n} \frac{1}{k\ln(k)}$$

et que $\ln(\ln(n)) - \ln(\ln(A)) + \frac{1}{n\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$,

par comparaison (la nature ne dépendant pas d'un nombre fini de termes), $\boxed{\sum \frac{1}{n\ln(n)} \text{ diverge.}}$

▷ **Si $\beta < 1$**

Alors comme pour tout $n \geq A$,

$$\frac{\ln(n)^{1-\beta}}{1-\beta} - \frac{\ln(A)^{1-\beta}}{1-\beta} + \frac{1}{n\ln(n)^\beta} \leq \sum_{k=A}^{n} \frac{1}{k\ln(k)^\beta}$$

et que, comme $1-\beta > 0$, $\frac{\ln(n)^{1-\beta}}{1-\beta} - \frac{\ln(A)^{1-\beta}}{1-\beta} + \frac{1}{n\ln(n)^\beta} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$

par comparaison (la nature ne dépendant pas d'un nombre fini de termes), $\boxed{\sum \frac{1}{n\ln(n)^\beta} \text{ diverge.}}$

Remarque: il suffirait de traiter le cas $\beta = 1$ pour conclure à la divergence dans le cas $\beta < 1$. Mais ici la comparaison série/intégrale permet même d'avoir un équivalent en $\frac{1}{1-\beta}\ln(n)^{1-\beta}$ en $+\infty$.

▷ **Si $\beta > 1$**

Alors comme pour tout $n \geq A$,

$$\sum_{k=A}^{n} \frac{1}{k\ln(k)^\beta} \leq \frac{1}{A\ln(A)^\beta} + \frac{\ln(n)^{1-\beta}}{1-\beta} - \frac{\ln(A)^{1-\beta}}{1-\beta}$$

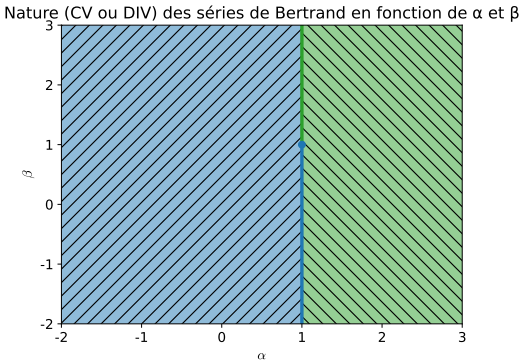
et que, comme $1-\beta < 0$, $\frac{\ln(n)^{1-\beta}}{1-\beta}$ tend vers 0 en $+\infty$ et en particulier est majoré.

Donc en tant que série à termes positifs et bornée, $\sum_{n\geq A} \frac{1}{n\ln(n)^\beta}$ converge, et donc (la nature ne dépend pas d'un nombre fini de termes), $\boxed{\sum \frac{1}{n\ln(n)^\beta} \text{ converge.}}$

▷ Conclusion

- ▷ Si $\alpha < 1$ alors DIV.
- ▷ Si $\alpha > 1$ alors CV.
- ▷ Si $\alpha = 1$ alors
  - ▷ Si $\beta < 1$ alors DIV.
  - ▷ Si $\beta > 1$ alors CV.
  - ▷ Si $\beta = 1$ alors DIV.

Ce qui est résumé par le schéma à droite.



Solution pour l'exercice 7 · Énoncé p. 995 · Indication p. 1010 (Critère de d'Alembert)

1. Supposons $\ell > 1$.

Soit $q = \frac{\ell+1}{2}$. Alors

$$1 < q < \ell.$$

D'où APCR $\frac{u_{n+1}}{u_n} > q$.

Soit n_0 un tel rang.

Alors par produit d'inégalités positives, pour tout $n \geq n_0$,

$$\prod_{k=n_0}^{n-1} \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq \prod_{k=n_0}^{n-1} q$$

c'est à dire (produit télescopique)

$$u_n \geq u_{n_0} q^{n-n_0}.$$

Comme $q > 1$ la série $\boxed{\sum u_n \text{ diverge grossièrement}}$.

2. Supposons $\ell < 1$.

Soit $q = \frac{\ell+1}{2}$. Alors

$$\ell < q < 1.$$

D'où APCR $\frac{u_{n+1}}{u_n} < q$.

Soit n_0 un tel rang.

Alors par produit d'inégalités positives, pour tout $n \geq n_0$,

$$\prod_{k=n_0}^{n-1} \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \prod_{k=n_0}^{n-1} q$$

c'est à dire (produit télescopique)

$$0 < u_n \leq u_{n_0} q^{n-n_0}.$$

Comme $q < 1$, la série $\sum_n q^n$ converge et donc par comparaison de séries à termes positifs, $\boxed{\sum u_n \text{ converge.}}$

3. Si $\ell = 1$ on ne peut $\boxed{\text{a priori pas conclure}}$ sur la nature de la série.

Par exemple pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, avec $u_n = \frac{1}{(n+1)^\alpha}$ on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ mais la nature de la série $\sum u_n$ dépend de α (est divergente si $\alpha \leq 1$ et convergente si $\alpha > 1$).

Solution pour l'exercice 8 · Énoncé p. 995 · Indication p. 1010 (Critère de Cauchy)

1. Supposons $\ell > 1$.

Soit $q = \frac{\ell+1}{2}$. Alors

$$1 < q < \ell.$$

D'où APCR $(u_n)^{\frac{1}{n}} > q$.

Soit n_0 un tel rang.

Alors pour tout $n \geq n_0$,

$$u_n > q^n.$$

Comme $q > 1$ la série $\boxed{\sum u_n \text{ diverge grossièrement}}$.

2. Supposons $\ell < 1$.

Soit $q = \frac{\ell+1}{2}$. Alors

$$\ell < q < 1.$$

D'où APCR $(u_n)^{\frac{1}{n}} < q$.

Soit n_0 un tel rang.

Alors pour tout $n \geq n_0$,

$$0 < u_n \leq q^n.$$

Comme $q < 1$, la série $\sum_n q^n$ converge et donc par comparaison de séries à termes positifs, $\boxed{\sum u_n \text{ converge.}}$

3. Si $\ell = 1$ on ne peut $\boxed{\text{a priori pas conclure}}$ sur la nature de la série.

Par exemple pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, avec $u_n = \frac{1}{(n+1)^\alpha}$ on a $(u_n)^{\frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ mais la nature de la série $\sum u_n$ dépend de α (est divergente si $\alpha \leq 1$ et convergente si $\alpha > 1$).

Remarque: le critère de Cauchy implique le critère de d'Alembert.

En effet **si** $\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, **alors** $\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(\ell)$, d'où par Cesàro et somme télescopique $\frac{1}{n}\ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(\ell)$ d'où $(u_n)^{\frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

Par conséquent en notant le critère de d'Alembert $\mathcal{H}_A \to \mathcal{C}$ et celui de Cauchy $\mathcal{H}_C \to \mathcal{C}$, on a $\mathcal{H}_A \Rightarrow \mathcal{H}_C$.

D'où $(\mathcal{H}_C \Rightarrow \mathcal{C}) \Rightarrow (\mathcal{H}_A \Rightarrow \mathcal{C})$.

Solution pour l'exercice 9 · Énoncé p. 996 · Indication p. 1011 (Critère de Raabe-Duhamel)

1. Supposons $\alpha < 1$.

Soit $\beta = \frac{\alpha+1}{2}$.

Alors

$$\alpha < \beta < 1.$$

On a

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) &= \ln\left(1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\ &= -\frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$

d'où $n\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\alpha > -\beta$.

En particulier il existe un rang n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$,

$$\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) \geq -\frac{\beta}{n}$$

et donc pour tout $n \geq n_0$,

$$\sum_{k=n_0}^{n-1} (\ln(u_{k+1}) - \ln(u_k)) \geq -\beta \sum_{k=n_0}^{n-1} \frac{1}{k}$$

c'est à dire en notant $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la série harmonique, pour tout $n \geq n_0$,

$$\ln(u_n) \geq \left(\ln\left(u_{n_0}\right) + \beta H_{n_0-1}\right) - \beta H_{n-1}$$

Or $H_n = \ln(n) + O_{n\to+\infty}(1)$ et donc il existe une constante K_{n_0} tq pour tout $n \geq n_0$, $H_{n-1} \leq \ln(n) + K_{n_0}$.

Par conséquent il existe $C_{n_0} \in \mathbb{R}$ tq

$$\forall n \geq n_0, \ln(u_n) \geq -\beta\ln(n) + C_0$$

d'où (croissance de l'exponentielle),

$$\forall n \geq n_0, u_n \geq \frac{1}{n^\beta} e^{C_0}.$$

Comme $\beta < 1$, la série $\sum \frac{1}{n^\beta}$ diverge (série de Riemann), par comparaison de séries à termes positifs, $\boxed{\sum u_n \text{ diverge.}}$

2. Supposons $\alpha > 1$.

Soit $\beta = \frac{\alpha+1}{2}$.

Alors

$$1 < \beta < \alpha.$$

On a (on refait ici le même calcul que précédemment mais ce n'est pas nécessaire)

$$\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \ln\left(1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$
$$= -\frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

d'où $n\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\alpha < -\beta$.

En particulier il existe un rang n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$,

$$\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) \leq -\frac{\beta}{n}$$

et donc pour tout $n \geq n_0$,

$$\sum_{k=n_0}^{n-1} (\ln(u_{k+1}) - \ln(u_k)) \leq -\beta \sum_{k=n_0}^{n-1} \frac{1}{k}$$

c'est à dire en notant $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la série harmonique, pour tout $n \geq n_0$,

$$\ln(u_n) \leq \left(\ln\left(u_{n_0}\right) + \beta H_{n_0-1}\right) - \beta H_{n-1}$$

Or $H_n = \ln(n) + O_{n\to+\infty}(1)$ et donc il existe une constante K_{n_0} tq pour tout $n \geq n_0$, $H_{n-1} \geq \ln(n) + K_{n_0}$.

Par conséquent il existe $C_{n_0} \in \mathbb{R}$ tq

$$\forall n \geq n_0, \ln(u_n) \leq -\beta\ln(n) + C_0$$

d'où (croissance de l'exponentielle),

$$\forall n \geq n_0, 0 \leq u_n \leq \frac{1}{n^\beta} e^{C_0}.$$

Comme $\beta > 1$, la série $\sum \frac{1}{n^\beta}$ converge (série de Riemann), par comparaison de séries à termes positifs, $\boxed{\sum u_n \text{ converge}}$.

3. Si $\alpha = 1$ on ne peut $\boxed{\text{a priori pas conclure}}$ sur la nature de la série.

Par exemple pour tout $\beta \in \mathbb{R}$, avec pour tout n,

$$u_n = \frac{1}{n\ln(n)^\beta}$$

on a

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{n}{n+1}\left(\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)}\right)^{-\beta}\\ &= \left(1-\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left(1+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)}\right)^{-\beta}\\ &= \left(1-\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left(1+\frac{1}{n\ln(n)}+o\left(\frac{1}{n\ln(n)}\right)\right)^{-\beta}\\ &= 1-\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$

et la nature de la série $\sum \frac{1}{n\ln(n)^\beta}$ dépend de β (divergente si $\beta \leq 1$ et convergente si $\beta > 1$, cf exercice 6).

Solution pour l'exercice 12 · Énoncé p. 997 · Indication p. 1011 (Ce n'est pas une série de Riemann)

1. Pour n au voisinage de $+\infty$ on a

$$n^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{\ln(n)}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

et donc

$$\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}} \sim \frac{1}{n}$$

d'où par théorème de comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$ $\boxed{\text{diverge}}$.

2. Pour n au voisinage de $+\infty$ on a

$$n^{\frac{2\ln(\ln(n))}{\ln(n)}} = e^{\frac{2\ln(\ln(n))}{\ln(n)}\ln(n)} = e^{2\ln(\ln(n))} = \ln(n)^2$$

et par conséquent

$$\frac{1}{n^{1+\frac{2\ln(\ln(n))}{\ln(n)}}} = \frac{1}{n\ln(n)^2}.$$

Il s'agit donc d'une série de Bertrand (cf exercice 6) et par comparaison série/intégrale, comme $2 > 1$, la série $\boxed{\text{converge}}$.

Solution pour l'exercice 13 · Énoncé p. 997 · Indication p. 1011 (Développement asymptotique et paramètres)
Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n} + c\sqrt{n-1}$$

On a le développement limité pour n au voisinage de $+\infty$,

$$\begin{aligned} u_n &= \sqrt{n}\left(a\sqrt{1+\frac{1}{n}}+b+c\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)\\ &= \sqrt{n}\left(a+\frac{a}{2n}-\frac{a}{8n^2}+b+c-\frac{c}{2n}-\frac{c}{8n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\\ &= (a+b+c)\sqrt{n}+\frac{a-c}{2}\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{a+c}{8}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}+o_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right). \end{aligned}$$

Par conséquent:

- Si $a+b+c\neq 0$ alors on a l'équivalent $u_n\sim(a+b+c)\sqrt{n}$ et donc la série diverge grossièrement.
- Si $a+b+c=0$ et $a-c\neq 0$, alors on a l'équivalent $u_n\sim\frac{a-c}{2}\frac{1}{\sqrt{n}}$. Or la série $\sum\frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge et $a-c$ est de signe constant. Par théorème de comparaison de séries à termes positifs, la série diverge.
- Si $a+b+c=0$ et $a-c=0$ alors on a l'équivalent $u_n\sim-\frac{a+c}{8}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$. Or la série $\sum\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ converge et $a+c$ est de signe constant. Par théorème de comparaison de séries à termes positifs, la série converge.

On conclut que la série converge ssi $a+b+c=0$ et $a-c=0$.

En résolvant le système on obtient que la série CV ssi

$$\boxed{\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\in\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}\right)}$$

Solution pour l'exercice 16 · Énoncé p. 998 · Indication p. 1012 (Encore des discussions de paramètres)

- **Si $\alpha<0$**

  Alors, comme $n^\alpha\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$, on a

  $$\ln(1+n^\alpha)=n^\alpha+o(n^\alpha)$$

  et donc

  $$\frac{\ln(1+n^\alpha)}{n^\beta}=\frac{1}{n^{\beta-\alpha}}+o\left(\frac{1}{n^{\beta-\alpha}}\right).$$

  Comme pour tout $n\geq 1$, $\frac{1}{n^{\beta-\alpha}}\geq 0$, par comparaison de séries à termes positifs, $\sum\frac{\ln(1+n^\alpha)}{n^\beta}$ et $\sum\frac{1}{n^{\beta-\alpha}}$ sont de même nature.

  Par séries de Riemann, la série converge ssi $\beta-\alpha>1$.

- **Si $\alpha=0$**

  Alors pour tout n, $\frac{\ln(1+n^\alpha)}{n^\beta}=\frac{\ln(2)}{n^\beta}$ et par séries de Riemann, la série converge ssi $\beta>1$.

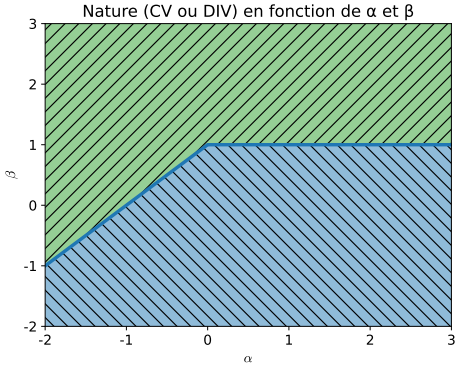
- **Si $\alpha>0$**

  Alors comme $n^\alpha\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty$, on a

  $$\frac{\ln(1+n^\alpha)}{n^\beta}=\frac{\ln(n^\alpha)+\ln(1+n^{-\alpha})}{n^\beta}=\alpha\frac{\ln(n)}{n^\beta}+o\left(\frac{\ln(n)}{n^\beta}\right).$$

Comme pour tout $n \geq 1$, $\frac{\ln(n)}{n^\beta} \geq 0$, par comparaison de séries à termes positifs, $\sum \frac{\ln(1+n^\alpha)}{n^\beta}$ et $\sum \frac{\ln(n)}{n^\beta}$ sont de même nature.

Par séries de Bertrand (cf exercice 6), la série converge ssi $\beta > 1$.



En conclusion:

- Pour $\alpha < 0$,
  - si $\beta - \alpha > 1$ alors la série converge,
  - si $\beta - \alpha \leq 1$ alors la série diverge.
- Pour $\alpha = 0$,
  - si $\beta > 1$ alors la série converge,
  - si $\beta \leq 1$ alors la série diverge.
- Pour $\alpha > 0$,
  - si $\beta > 1$ alors la série converge,
  - si $\beta \leq 1$ alors la série diverge.

Solution pour l'exercice 18 · Énoncé p. 999 · Indication p. 1012 (Équivalent de ζ en 1)

1. Pour $s > 1$ la série $\sum \frac{1}{n^s}$ converge comme série de Riemann.

2. Soit $s > 1$.

$$f_s :]1, +\infty[\to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{1}{x^s}$$

est strictement décroissante (car de dérivée $x \mapsto -\frac{s}{x^{s+1}}$ strictement négative).

Soit $k \geq 1$. On a

$$\forall t \in [k, k+1], \frac{1}{(k+1)^s} \leq \frac{1}{t^s} \leq \frac{1}{k^s}$$

d'où par croissance de l'intégrale

$$1 \times \frac{1}{(k+1)^s} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t^s}\,\mathrm{d}t \leq 1 \times \frac{1}{k^s}$$

et donc pour tout $k \geq 2$,

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{t^s}\,\mathrm{d}t \leq \frac{1}{k^s} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^s}\,\mathrm{d}t.$$

En sommant et par relation de Chasles on obtient pour tout $n \geq 2$,

$$\int_1^n \frac{1}{t^s}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{n^s} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^s} \leq \frac{1}{1^s} + \int_1^n \frac{1}{t^s}\,\mathrm{d}t.$$

Et finalement ($s \neq 1$),

$$\frac{n^{1-s}}{1-s} - \frac{1}{1-s} + \frac{1}{n^s} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^s} \leq 1 + \frac{n^{1-s}}{1-s} - \frac{1}{1-s}.$$

Lorsque $n \to +\infty$, comme $1-s<0$ on a

$$\frac{n^{1-s}}{1-s} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

comme $s>0$, $\frac{1}{n^s} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et par définition $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^s} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \zeta(s)$.

Par Passage à la Limite des Inégalités Larges on a donc

$$\frac{1}{s-1} \leq \zeta(s) \leq 1 + \frac{1}{s-1}$$

et ce pour tout $s>1$.

En particulier, par encadrement, on a

$$\boxed{\zeta(s) \underset{s\to1^+}{\sim} \frac{1}{s-1}}.$$

Solution pour l'exercice 19 · Énoncé p. 999 · Indication p. 1012 (Un développement asymptotique parmi d'autres)
Remarque: le plan pour ce genre de problématique est souvent le suivant:

- Une comparaison série intégrale permet d'obtenir un $O(1)$,
- pour obtenir les termes suivants (jusqu'au $\text{cste} + o(1)$), on utilise une méthode de bootstrap en écrivant à chaque étape une suite comme une série télescopique pour utiliser un théorème de comparaison.
- **Comparaison série/intégrale**

  Soit

  $$\begin{aligned} f :]1,+\infty[&\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{\ln(x)}{x} \end{aligned}$$

  alors f est dérivable de dérivée,

  $$\forall x>1, f'(x) = \frac{1-\ln(x)}{x^2}.$$

  D'où le tableau de variations suivant,

x	1	e^1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
f		$\nearrow$	$\searrow$

par conséquent, pour tout $k \geq 3$,

$$\forall x \in [k, k+1], f(k+1) \leq f(x) \leq f(k).$$

D'où, par croissance de l'intégrale, pour tout $k \geq 3$,

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x \leq f(k)$$

et donc pour tout $k \geq 4$,

$$\int_k^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x \leq f(k) \leq \int_{k-1}^{k} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

D'où pour tout $n \geq 3$,

$$f(n) + \int_3^n f(x)\,\mathrm{d}x \leq \sum_{k=3}^{n} f(k) \leq \int_3^n f(x)\,\mathrm{d}x + f(3).$$

Comme $\sum_{k=3}^n f(k) = \int_3^n f(x)\,\mathrm{d}x + O(1)$.

Or (primitive de $u' \times u$), pour tout $n \geq 3$,

$$\int_3^n \frac{1}{x}\ln(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(\ln(n)^2 - \ln(3)^2).$$

Et donc finalement

$$\boxed{\sum_{k=1}^n \frac{\ln(k)}{k} = \tfrac{1}{2}\ln(n)^2 + O_{n\to+\infty}(1)}.$$

▷ **Convergence de l'écart par somme télescopique**

Posons pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k} - \frac{1}{2}\ln(n)^2.$$

On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, en utilisant les DL_2 tronqués $\ln(1+h) = h + O_{h\to 0}(h^2)$, $(1+h)^2 = 1 + 2h + O_{h\to 0}(h^2)$,

$$\begin{aligned}
u_n - u_{n-1} &= \frac{\ln(n)}{n} - \frac{1}{2}\ln(n)^2 + \frac{1}{2}\ln(n-1)^2 \\
&= \frac{\ln(n)}{n} - \frac{1}{2}\ln(n)^2 + \frac{1}{2}\left(\ln(n) + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right)^2 \\
&= \frac{\ln(n)}{n} - \frac{1}{2}\ln(n)^2 + \frac{1}{2}\left(\ln(n) + \left(-\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right)^2 \\
&= \frac{\ln(n)}{n} - \frac{1}{2}\ln(n)^2 + \frac{1}{2}\ln(n)^2\left(1 - \frac{1}{n\ln(n)} + O\left(\frac{1}{n^2\ln(n)}\right)\right)^2 \\
&= \frac{\ln(n)}{n} - \frac{1}{2}\ln(n)^2 + \frac{1}{2}\ln(n)^2 - \frac{1}{2}\ln(n)^2 \times 2\frac{1}{n\ln(n)} + O\left(\frac{\ln(n)}{n^2}\right) \\
&= O\left(\frac{\ln(n)}{n^2}\right).
\end{aligned}$$

Et comme $\frac{\ln(n)}{n^2} = O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$, on en déduit, par comparaison de séries à termes positifs, que la série $\sum(u_n - u_{n-1})$ converge absolument, donc converge.

Par série télescopique on a donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge c'est à dire il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k} = \frac{1}{2}\ln(n)^2 + C + o_{n\to+\infty}(1)}.$$

Solution pour l'exercice 20 · Énoncé p. 999 · Indication p. 1012 (Suite sur puissance de somme partielle)

1. Notons $S = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \lim_{n\to+\infty} S_n$, bien défini (et strictement positif) par convergence de la série.

Alors on a

$$\frac{u_n}{S_n^\alpha} \sim \frac{u_n}{S^\alpha}.$$

Par comparaison de séries à termes positifs, comme $\sum u_n$ on en déduit $\boxed{\sum \frac{u_n}{S_n^\alpha} \text{ converge}}$.

2. Dans le cas intégral on a $\int_0^x \frac{f(t)}{F(x)^\alpha}\,\mathrm{d}t$ se calcule explicitement en $\left[\frac{F(x)^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_0^x$ si $\alpha \neq 1$ et en $[\ln(F(x))]_0^x$ si $\alpha = 1$. D'où on déduit la nature.

- Si $\alpha \leq 0$, comme APCR $S_n \geq 1$, APCR $\frac{u_n}{S_n^\alpha} \geq u_n$ et comme $\sum u_n$ diverge, par comparaison de séries à termes positifs, on en déduit que $\sum \frac{u_n}{S_n^\alpha}$ diverge.
- Si $\alpha > 1$

  La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante comme série de terme général positif.

  $]0,+\infty[\to \mathbb{R}^+$

  De plus $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ est décroissante.

  Soit $n \geq 2$, on a donc

$$\forall t \in [S_{n-1}, S_n], \frac{1}{S_n^\alpha} \leq \frac{1}{t^\alpha} \leq \frac{1}{S_{n-1}^\alpha}$$

d'où par croissance de l'intégrale (et $S_n - S_{n-1} = u_n$),

$$\frac{u_n}{S_n^\alpha} \leq \int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \leq \frac{u_n}{S_{n-1}^\alpha}.$$

D'où par sommation, pour tout $n \geq 2$,

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{u_k}{S_k^\alpha} \leq \int_{S_1}^{S_n} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{u_k}{S_{k-1}^\alpha}.$$

En particulier comme $1-\alpha < 0$,

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{u_k}{S_k^\alpha} \leq \frac{S_n^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{S_1^{1-\alpha}}{1-\alpha} \leq \frac{S_1^{1-\alpha}}{\alpha - 1}$$

Les sommes partielles sont donc majorées, et comme la série est à termes positifs, elle **converge**.

▷ Si $\alpha = 1$.

Si $\frac{u_n}{S_n} \to .\neg 0$ alors la série $\sum \frac{u_n}{S_n}$ diverge grossièrement.

Si $\frac{u_n}{S_n} \to 0$ alors, pour n au voisinage de l'infini

$$\begin{aligned}\ln(S_n) - \ln(S_{n-1}) &= \ln(S_n) - \ln(S_n - u_n)\\ &= -\ln\left(1 - \frac{u_n}{S_n}\right)\\ &\sim \frac{u_n}{S_n}\end{aligned}$$

par comparaison de séries à termes positifs $\sum \ln(S_n) - \ln(S_{n-1})$ et $\sum \frac{u_n}{S_n}$ sont de même nature.

Or $\sum \ln(S_n) - \ln(S_{n-1})$ diverge en tant que série télescopique d'une suite divergente.

D'où $\sum \frac{u_n}{S_n}$ diverge.

▷ Si $\alpha < 1$, alors comme pour tout n,

$$\frac{u_n}{S_n} \leq \frac{u_n}{S_n^\alpha}$$

par comparaison de séries à termes positifs, on en déduit que $\sum \frac{u_n}{S_n^\alpha}$ diverge.

On a donc bien montré que, dans le cas $\sum u_n$ diverge, $\boxed{\text{pour tout } \alpha > 1,\ \sum \frac{u_n}{S_n^\alpha}}$ converge et $\boxed{\text{pour tout } \alpha \leq 1,\ \sum \frac{u_n}{S_n^\alpha} \text{ diverge}}$.

Solution pour l'exercice 21 · Énoncé p. 1000 · Indication p. 1012 (Un cas particulier de Raabe-Duhamel)

1. On a, comme $\ln(1+h) = h + O(h \to 0)(h^2)$, pour n au voisinage de $+\infty$,

$$\ln(u_{n+1})-\ln(u_n)=\ln\Big(1-\frac{\alpha}{n}+O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\Big)$$
$$=-\frac{\alpha}{n}+O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)$$

d'où

$$\Big((\ln(u_{n+1})-\ln(u_n))-\Big(-\frac{\alpha}{n}\Big)\Big)=\underset{n\to+\infty}{O}\Big(\frac{1}{n^2}\Big)$$

d'où par comparaison de séries à termes positifs $\sum_n|(\ln(u_{n+1})-\ln(u_n))-(-\frac{\alpha}{n})|$ converge, d'où $\sum_n\big((\ln(u_{n+1})-\ln(u_n))-(-\frac{\alpha}{n})\big)$ converge absolument donc converge.

Il existe donc $\ell\in\mathbb{R}$ tel que

$$\sum_{k=1}^{n}(\ln(u_{k+1})-\ln(u_k))+\alpha\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\ell+o_{n\to+\infty}(1).$$

Or on sait (cf exercice 4) qu'il existe $\gamma\in\mathbb{R}$ tel que $H_n=\ln(n)+\gamma+o_{n\to+\infty}(1)$.

Par conséquent (somme télescopique) il existe $\kappa\in\mathbb{R}$ tel que

$$\ln(u_n)=-\alpha\ln(n)+\kappa+o_{n\to+\infty}(1)$$

Comme $e^{1+o(1)}=1+o(1)$ on en déduit

$$u_n=\frac{e^{\kappa}}{n^{\alpha}}(1+o(1))$$

c'est à dire

$$\boxed{u_n\sim\tfrac{C}{n^{\alpha}}}$$

où $C=e^{\kappa}$.

2. Comme $\big(\frac{C}{n^{\alpha}}\big)$ est de signe strictement constant par théorème de comparaison de séries à termes positifs, on en déduit que $\sum_n u_n$ et $\sum_n\frac{C}{n^{\alpha}}$ sont de même nature.

Par séries de Riemann on en déduit que la série $\boxed{\text{converge si } \alpha>1 \text{ et diverge si } \alpha\leq 1}$.

Solution pour l'exercice 22 · Énoncé p. 1000 · Indication p. 1012 (Condensation de Cauchy)
Soit $k\in\mathbb{N}$.

Par décroissance de $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$, on a

$$\forall i\in[\![2^k,2^{k+1}-1]\!],u_{2^{k+1}}\leq u_i\leq u_{2^k}$$

et donc par somme (comme $2^{k+1}-1-2^k+1=2^k$),

$$2^k u_{2^{k+1}}\leq\sum_{i=2^k}^{2^{k+1}-1}u_i\leq 2^k u_{2^k}.$$

D'où pour tout $N\in\mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{N-1} 2^k u_{2^{k+1}} \leq \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{i=2^k}^{2^{k+1}-1} u_i \leq \sum_{k=0}^{N-1} 2^k u_{2^k}$$

c'est à dire (Chasles)

$$\sum_{k=0}^{N-1} 2^k u_{2^{k+1}} \leq \sum_{i=1}^{2^N-1} u_i \leq \sum_{k=0}^{N-1} 2^k u_{2^k}$$

ou encore

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} 2^k u_{2^k} \leq \sum_{i=1}^{2^N-1} u_i \leq \sum_{k=0}^{N-1} 2^k u_{2^k}$$

▷ Si $\sum_k 2^k u_{2^k}$ diverge

Alors comme $\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} 2^k u_{2^k} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ (série divergente à termes positifs) par comparaison on a $\sum_{i=1}^{2^N-1} u_i \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Et en particulier $\sum_k u_k$ diverge.

▷ Si $\sum_k 2^k u_{2^k}$ converge

Alors en particulier il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $N \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{N-1} 2^k u_{2^k} \leq M$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $n < 2^N - 1$ (par exemple $N = \lceil \log_2(n+1) \rceil$).

Alors comme tous les termes sont positifs,

$$\sum_{i=1}^{n} u_i \leq \sum_{i=1}^{2^N-1} u_i \leq \sum_{k=0}^{N-1} 2^k u_{2^k} \leq M.$$

Par conséquent les sommes partielles sont majorées et comme la série est à termes positifs, elle converge.

On a donc bien montré que les séries $\boxed{\sum_k u_k \text{ et } \sum_k 2^k u_{2^k} \text{ sont de même nature}}$.

Solution pour l'exercice 26 · Énoncé p. 1002 · Indication p. 1013 (Un calcul de somme par découpe détaillé)

1. Critère Spécial des Séries Alternées et cf exercice 4. [À rédiger].

2. Soit $n \in \mathbb{N}$.

On a

$$\begin{aligned} S_{2n} &= \sum_{k\in[\![1,2n]\!]} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \\ &= \sum_{\substack{k\in[\![1,2n]\!]\\ k \text{ impair}}} \frac{1}{k} - \sum_{\substack{k\in[\![1,2n]\!]\\ k \text{ pair}}} \frac{1}{k} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} H_{2n} &= \sum_{k\in[\![1,2n]\!]} \frac{1}{k} \\ &= \sum_{\substack{k\in[\![1,2n]\!]\\ k \text{ impair}}} \frac{1}{k} + \sum_{\substack{k\in[\![1,2n]\!]\\ k \text{ pair}}} \frac{1}{k}. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$2\sum_{\substack{k\in[\![1,2n]\!]\\ k \text{ pair}}} \frac{1}{k} = H_{2n} - S_{2n}$$

et comme

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{k\in[\![1,2n]\!]\\ k \text{ pair}}} \frac{1}{k} &= \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2j} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \end{aligned}$$

on en déduit

$$S_{2n} = H_{2n} - 2\frac{1}{2}H_n$$

i.e

$$\boxed{S_{2n} = H_{2n} - H_n}$$

3. Par conséquent pour n au voisinage de $+\infty$,

$$S_{2n} = \big(\ln(2n) + \gamma + o_{n\to+\infty}(1)\big) - \big(\ln(n) + \gamma + o_{n\to+\infty}(1)\big)$$

d'où $(\ln(2n) = \ln(2) + \ln(n))$,

$$S_{2n} = \ln(2) + o_{n\to+\infty}(1).$$

De plus (comme $\frac{1}{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$)

$$S_{2n+1} = S_{2n} + \frac{1}{2n+1} = \ln(2) + o_{n\to+\infty}(1).$$

Par conséquent, les termes extraits pairs et impairs étant convergents et de même limite on en déduit que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} S_n = \ln(2)}.$$

Solution pour l'exercice 28 · Énoncé p. 1003 · Indication p. 1013 (Séries pas vraiment alternées)
On remarque que si $\alpha = \beta$, la série n'est pas définie.

- Si $0 \geq \alpha > \beta$ alors $\frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n n^\beta} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ d'où une divergence grossière.
- Si $0 \geq \beta > \alpha$ alors $\frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n n^\beta} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^\beta}$ d'où une divergence grossière.
- Si $\beta > \alpha$ et $\beta \geq 0$ alors $\frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n n^\beta} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^\beta}$ d'où, par comparaison de séries à termes positifs, convergence si $\beta > 1$ et divergence si $\beta \leq 1$.
- Si $\beta < \alpha$ et $\alpha > 0$ alors on a le développement limité

$$\begin{aligned}\frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n n^\beta} &= \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\frac{1}{1 + (-1)^n n^{\beta-\alpha}} \\ &= \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\big(1 - (-1)^n n^{\beta-\alpha} + o_{n\to+\infty}\big(n^{\beta-\alpha}\big)\big) \\ &= \frac{(-1)^n}{n^\alpha} - \frac{1}{n^{2\alpha-\beta}} + o_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^{2\alpha-\beta}}\right).\end{aligned}$$

En posant pour tout n, $v_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n n^\beta} - \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ on obtient

Comme $\alpha > 0$, par critère spécial des séries alternées, $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge.

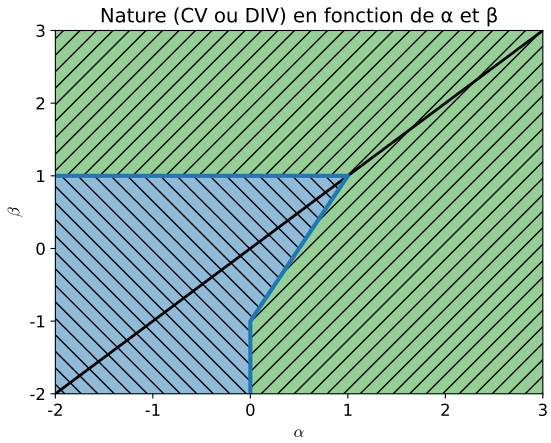
Par conséquent $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n n^\beta}$ est de même nature que $\sum v_n$.

(La somme de deux séries CV est CV et d'une série CV et d'une série DIV est DIV).

Or

$$v_n \sim -\frac{1}{n^{2\alpha-\beta}}.$$

Par comparaison de séries à termes de signe constant, la série $\sum v_n$ converge si et seulement si $2\alpha - \beta > 1$.



En conclusion:

- Pour $\beta > \alpha$,
  - si $\beta > 1$ alors la série converge
  - si $\beta \leq 1$ alors la série diverge.
- Pour $\alpha > \beta$,
  - si $\alpha \leq 0$ alors la série diverge,
  - si $\alpha > 0$ et $2\alpha - \beta > 1$ alors la série converge.
  - si $\alpha > 0$ et $2\alpha - \beta \leq 1$ alors la série diverge.

Ce qui est résumé par le schéma à droite.

Solution pour l'exercice 29 · Énoncé p. 1003 · Indication p. 1013 (Encore des séries pas vraiment alternées)
Comme $\alpha > 0$ on a $\frac{(-1)^n}{n^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

D'où par $\mathrm{DL}_2(0)$ de ln

$$\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right) = \frac{(-1)^n}{n^\alpha} - \frac{1}{2}\frac{1}{n^{2\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right)$$

Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right) - \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ c'est à dire

$$\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right) = \frac{(-1)^n}{n^\alpha} + v_n.$$

Comme $\alpha > 0$, $\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et tend vers 0. Par critère spécial des séries alternées, $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge.

Par conséquent, $\sum v_n$ est de même nature que $\sum \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$.

Or on a vu que $v_n \sim \frac{1}{2}\frac{1}{n^{2\alpha}}$ (qui est positif).

Donc par séries de Riemann et comparaison de série à termes positifs, la série $\boxed{\text{converge si } \alpha > \frac{1}{2} \text{ et diverge si } \alpha \leq \frac{1}{2}}$.

Solution pour l'exercice 31 · Énoncé p. 1003 · Indication p. 1014 (Un alternement)

▷ **Cas $(a,b) = (1,1)$**

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Par séries de Riemann ($\frac{1}{2} < 1$) la série diverge.

▷ **Cas $(a,b) = (1,-1)$**

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

Comme $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et tend vers 0, par critère spécial des séries alternées, la série converge.

▷ **Cas général**

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$u_n = \left(\frac{a+b}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{n}} + \left(\frac{a-b}{2}\right)\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}.$$

(À méditer pourquoi).

Par conséquent comme $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge $\sum_n u_n$ est de même nature que $\sum_n \frac{a+b}{2}\frac{1}{\sqrt{n}}$.

Donc $\boxed{\text{si } a+b=0 \text{ alors la série converge, sinon la série diverge}}$.

Solution pour l'exercice 33 · Énoncé p. 1004 · Indication p. 1014 (Un calcul de somme)
Posons pour $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}\ln(k)}{k}$$

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k}$$

On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_{2n} = \sum_{\substack{k\in[\![1,2n]\!]\\ k \text{ impair}}} \frac{\ln(k)}{k} - \sum_{\substack{k\in[\![1,2n]\!]\\ k \text{ pair}}} \frac{\ln(k)}{k}$$

$$T_{2n} = \sum_{\substack{k\in[\![1,2n]\!]\\ k \text{ impair}}} \frac{\ln(k)}{k} + \sum_{\substack{k\in[\![1,2n]\!]\\ k \text{ pair}}} \frac{\ln(k)}{k}$$

D'où

$$S_{2n} = T_{2n} - \sum_{\substack{k\in[\![1,2n]\!]\\ k \text{ pair}}} \frac{\ln(k)}{k}$$

et comme

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{k\in[\![1,2n]\!]\\ k \text{ pair}}} \frac{\ln(k)}{k} &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\ln(2j)}{2j}\\ &= \frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\ln(2)}{j} + \sum_{j=1}^{n}\frac{\ln(j)}{j}\right)\end{aligned}$$

on en déduit

$$S_{2n} = T_{2n} - \ln(2)H_n - T_n.$$

Or on a (exercices 4 et 19), il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ (constante d'Euler) et $C \in \mathbb{R}$ tels que

$$\begin{aligned}H_n &= \ln(n) + \gamma + o_{n\to+\infty}(1)\\ T_n &= \frac{1}{2}\ln(n)^2 + C + o_{n\to+\infty}(1)\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}S_{2n} &= \frac{1}{2}\ln(2n)^2 - \ln(2)\ln(n) - \gamma\ln(2) - \frac{1}{2}\ln(n)^2 + o_{n\to+\infty}(1)\\ &= \frac{1}{2}\ln(2)^2 + \frac{1}{2}\ln(n)^2 + \frac{2}{2}\ln(2)\ln(n) - \ln(2)\ln(n) - \gamma\ln(2) - \frac{1}{2}\ln(n)^2 + o_{n\to+\infty}(1)\\ &= \frac{1}{2}\ln(2)^2 - \gamma\ln(2) + o_{n\to+\infty}(1).\end{aligned}$$

Comme de plus $S_{2n+1} - S_{2n} = \frac{\ln(2n+1)}{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on en déduit que

$$\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}\ln(k)}{k} = \frac{1}{2}\ln(2)^2 - \gamma\ln(2)}.$$

Solution pour l'exercice 34 · Énoncé p. 1004 · Indication p. 1014 (Développement asymptotique)
On a,

$$\begin{aligned}k^{\frac{1}{k}} &= e^{\frac{\ln(k)}{k}}\\ &= 1 + \frac{\ln(k)}{k} + \frac{1}{2}\left(\frac{\ln(k)}{k}\right)^2 + o\left(\left(\frac{\ln(k)}{k}\right)^2\right)\\ &= 1 + \frac{\ln(k)}{k} + O\left(\frac{\ln(k)^2}{k^2}\right).\end{aligned}$$

Remarque: l'idée est souvent d'effectuer un DL du terme général, jusqu'au premier terme dont la série converge absolument.

▹ En particulier $k^{\frac{1}{k}} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, d'où par théorème de Cesàro,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k^{\frac{1}{k}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

c'est à dire

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} k^{\frac{1}{k}} = n + o_{n\to+\infty}(n)}.$$

▷ En posant pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $v_k = k^{\frac{1}{k}} - 1$, c'est à dire

$$k^{\frac{1}{k}} = 1 + v_k$$

on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k^{\frac{1}{k}} &= \sum_{k=1}^{n}(1+v_k)\\ &= n + \sum_{k=1}^{n} v_k.\end{aligned}$$

On cherche donc un développement asymptotique de $\sum_{k=1}^{n} v_k$.

On a

$$v_k = \frac{\ln(k)}{k} + O\left(\frac{\ln(k)^2}{k^2}\right)$$

Comme $\frac{\ln(k)^2}{k^2} = O\left(\frac{1}{k^{\frac{3}{2}}}\right)$, et que $\frac{3}{2} > 1$, la série $\sum \frac{\ln(k)^2}{k^2}$ converge et par comparaison $\sum_k \left(v_k - \frac{\ln(k)}{k}\right)$ converge absolument donc converge.

Par conséquent il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tq

$$\sum_{k=1}^{n} v_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k} + \ell + o_{n\to+\infty}(1).$$

Or (cf exercice 19) il existe une constante C telle que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k} = \frac{1}{2}\ln(n)^2 + C + o_{n\to+\infty}(1).$$

On conclut donc qu'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} k^{\frac{1}{k}} = n + \tfrac{1}{2}\ln(n)^2 + \gamma + o_{n\to+\infty}(1)}.$$

Solution pour l'exercice 40 · Énoncé p. 1006 · Indication p. 1015 (Un vers deux)
Pour $n \in \mathbb{N}$, posons

$$T_n = \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} u_k.$$

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$T_{n+1} = \sum_{k=2^{n+1}}^{2^{n+2}-1} u_k = \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} (u_{2k} + u_{2k+1}) \geq \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} u_k = T_n.$$

La suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante.

Comme $T_0 > 0$, on a en particulier, pour tout $n \geq \mathbb{N}$, $T_n \geq T_0 > 0$.

D'où en particulier (divergence grossière)

$$\sum_{k=0}^{N} T_k \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

c'est à dire (regroupement par paquets)

$$\sum_{k=0}^{2^{N+1}-1} u_k \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Et donc en particulier $\boxed{\text{la série diverge}}$.

Solution pour l'exercice 41 · Énoncé p. 1006 · Indication p. 1015 (Carré sur le suivant)
On a,

$$\forall k \in \mathbb{N}, (x_k - 2x_{k+1})^2 \geq 0$$

par conséquent pour tout k,

$$x_k^2 - 4x_k x_{k+1} + 4x_{k+1}^2 \geq 0$$

i.e comme $x_{k+1} > 0$,

$$\frac{x_k^2}{x_{k+1}} \geq 4(x_k - x_{k+1})$$

en sommant pour tout $n \in \mathbb{N}$, par somme télescopique

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{x_k^2}{x_{k+1}} \geq 4(x_0 - x_{n+1})$$

et comme $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ on obtient bien par passage à la limite des inégalités larges

$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x_k^2}{x_{k+1}} \geq 4x_0}.$$

Solution pour l'exercice 42 · Énoncé p. 1007 · Indication p. 1015 (Inégalité de Carleman)
Soit $n \in \mathbb{N}$. Par inégalité arithmético-géométrique, on a

$$\begin{aligned}\left(\prod_{k=0}^{n} a_k\right)^{\frac{1}{n+1}} &= \left(\prod_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}(k+1)a_k\right)^{\frac{1}{n+1}} \\ &= \frac{1}{(n+1)!^{\frac{1}{n+1}}}\left(\prod_{k=0}^{n}(k+1)a_k\right)^{\frac{1}{n+1}} \\ &\leq \frac{1}{(n+1)!^{\frac{1}{n+1}}}\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(k+1)a_k.\end{aligned}$$

Il s'agit donc de majorer $\frac{1}{(n+1)!^{\frac{1}{n+1}}}$, autrement dit de minorer $(n+1)!$. On va montrer que

$$(n+1)! \geq \left(\frac{n+2}{e^1}\right)^{n+1}.$$

Par inégalité de convexité de ln on a pour tout $k \geq 1$, $\left(1+\frac{1}{k}\right)^k < e^1$.

On en déduit, pour tout $k \geq 1$,

$$\frac{(k+1)^{k+1}}{k^k} = (k+1)\left(1+\frac{1}{k}\right)^k < e^1(k+1).$$

En effectuant le produit pour k allant de 1 à $n+1$, par télescopage, on trouve

$$\begin{aligned}(n+2)^{n+2} &= \prod_{k=1}^{n+1}\frac{(k+1)^{k+1}}{k^k} \\ &< \prod_{k=1}^{n+1} e^1(k+1) = e^{n+1}(n+2)!.\end{aligned}$$

En divisant par $n+2$, on obtient $(n+2)^{n+1} < e^{n+1}(n+1)!$, c'est à dire

$$(n+1)! > \frac{(n+2)^{n+1}}{e^{n+1}} = \left(\frac{n+2}{e^1}\right)^{n+1}.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}\frac{1}{(n+1)!^{\frac{1}{n+1}}} &= \exp\left(-\frac{1}{n+1}\ln((n+1)!)\right) \\ &\leq \exp(-\ln(n+2)+1) \\ &= \frac{e^1}{n+2}.\end{aligned}$$

Ainsi, finalement,

$$\left(\prod_{k=0}^{n} a_k\right)^{\frac{1}{n+1}} \leq \frac{e^1}{(n+1)(n+2)}\sum_{k=0}^{n}(k+1)a_k.$$

Ainsi pour tout $N \in \mathbb{N}$, par somme double,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N}\left(\prod_{k=0}^{n}a_k\right)^{\frac{1}{n+1}} &\leq \sum_{n=0}^{N}\frac{e^1}{(n+1)(n+2)}\sum_{k=0}^{n}(k+1)a_k\\ &= e^1\sum_{k=0}^{N}(k+1)a_k\sum_{n=k}^{N}\frac{1}{(n+1)(n+2)}\\ &\leq e^1\sum_{k=0}^{N}(k+1)a_k\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}\\ &= e^1\sum_{k=0}^{N}(k+1)a_k\frac{1}{k+1}\\ &= e^1\sum_{k=0}^{N}a_k\\ &\leq e^1\sum_{k=0}^{+\infty}a_k.\end{aligned}$$

Par conséquent (série à termes positifs), la série est convergente et

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\prod_{k=0}^{n}a_k\right)^{\frac{1}{n+1}} \leq e\sum_{n=0}^{+\infty}a_n}.$$

Solution pour l'exercice 49 · Énoncé p. 1009 · Indication p. 1016 (Un exemple de développement asymptotique)
On a pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$\left(1+\sqrt{2}\right)^n+\left(1-\sqrt{2}\right)^n\in 2\mathbb{Z}$$

(par exemple en remarquant que c'est 2 fois la partie entière dans $\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$, ou en développant par binôme, $\left(1+\sqrt{2}\right)^n+\left(1-\sqrt{2}\right)^n = 2\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}\binom{n}{2k}2^k+0$, ou par récurrence linéaire d'ordre 2).

Avec pour $n\in\mathbb{N}$ avec $k_n\in\mathbb{Z}$ tel que

$$\left(1+\sqrt{2}\right)^n+\left(1-\sqrt{2}\right)^n = 2k_n$$

on obtient

$$\sin\left(\left(1+\sqrt{2}\right)^n\pi\right)=\sin\left((2k_n)\pi-\left(1-\sqrt{2}\right)^n\pi\right)=-\sin\left(\left(1-\sqrt{2}\right)^n\pi\right).$$

De plus comme $|1-\sqrt{2}|<1$, on a

$$\left(1-\sqrt{2}\right)^n\pi\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$$

et donc

$$|\sin\left(\left(1-\sqrt{2}\right)^n\pi\right)|\sim|\left(1-\sqrt{2}\right)^n\pi|.$$

Par conséquent

$$|\sin\Big(\big(1+\sqrt{2}\big)^n\pi\Big)| \sim |\pi\big(1-\sqrt{2}\big)|^n.$$

Par théorème de comparaison de séries à termes positifs, $\sum \sin\Big(\big(1+\sqrt{2}\big)^n\pi\Big)$ et $\sum \big(1-\sqrt{2}\big)^n$ ont même nature.

Or $|1-\sqrt{2}|<1$ donc $\sum|\big(1-\sqrt{2}\big)^n|$ converge.

Donc $\sum \sin\Big(\big(1+\sqrt{2}\big)^n\pi\Big)$ converge absolument et par conséquent $\boxed{\text{la série converge}}$.

Chapitre 28

Espaces Euclidiens

Énoncés 1044
Lien avec les matrices 1044
Matrices symétriques et orthogonales 1045
Exemples de produits scalaires 1047
Matrices de Gram 1050
Polynômes orthogonaux 1051
Un zeste de dualité 1054
De la norme au produit scalaire 1056
Inégalités, optimisation et un peu de ~~chimie~~ géométrie 1058
Indications 1060
Solutions 1066

Énoncés

Dans tout le TD, E est un $\mathbb{R}$-ev muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

De plus, sauf mention du contraire, $[a, b]$ est un segment non réduit à un point.

Lien avec les matrices

Exercice 1 (◔★♠ Introduction aux matrices symétriques positives)

1. On dit qu'une matrice $A \in S_n(\mathbb{R})$ est symétrique positive ssi

$$\forall X \in \mathbb{R}^n, X^\top AX \geq 0.$$

On note $S_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques positives.

Montrer que $S_n^+(\mathbb{R})$ est stable par somme et par multiplication par un scalaire positif.

2. On dit qu'une matrice $A \in S_n(\mathbb{R})$ est symétrique définie positive ssi

$$\forall X \in \mathbb{R}^n, X^\top AX \geq 0 \text{ et } X^\top AX = 0 \Leftrightarrow X = 0.$$

On note $S_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques définies positives.

Montrer que $S_n^{++}(\mathbb{R})$ est stable par somme et par multiplication par un scalaire strictement positif.

Indication p. 1060

Exercice 2 (◔★ Matrice d'une forme bilinéaire dans une base)

Soit b une forme bilinéaire (quelconque) sur E et $\mathcal{B}$ une base de E de cardinal n.

1. Montrer qu'il existe une et unique matrice $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ telle que pour tous $(x, y) \in E^2$, en notant $X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$ et $Y = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(y)$,

$$b(x, y) = X^\top AY.$$

2. Montrer que b est symétrique ssi A est symétrique.

3. Montrer que b est symétrique positive ssi A est symétrique et positive (au sens de l'exercice 1).

4. Montrer que b est symétrique définie positive ssi A est symétrique définie positive (au sens de l'exercice 1).

Indication p. 1060

Exercice 3 (◔★ Orthogonalité et symétrie)

On munit $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique.

Montrer que $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires orthogonaux.

Indication p. 1060

Matrices symétriques et orthogonales

Exercice 4 (◔★ Caractérisation de $O_n(\mathbb{R})$)
On munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire canonique.

Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes

1. Les colonnes de A forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$,
2. $A^\top A = I_n$,
3. $\forall X \in \mathbb{R}^n, \|AX\| = \|X\|$,
4. $\forall X, Y \in \mathbb{R}^n, \langle AX, AY\rangle = \langle X, Y\rangle$.

On appelle groupe orthogonal, noté $O_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices vérifiant ces propriétés.

Indication p. 1060

Exercice 5 (◔★ Groupe orthogonal)
Montrer que $O_n(\mathbb{R})$, défini à l'exercice 4, est un groupe pour la multiplication matricielle.

Indication p. 1060

Exercice 6 (◑★ Décomposition QR)
Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ inversible.

Montrer qu'il existe $Q \in O_n(\mathbb{R})$ et $R \in T_n^+(\mathbb{R})$ tels que

$$A = QR.$$

Indication p. 1060

Exercice 7 (◕★ Inégalité de Hadamard)
Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ de colonnes $(C_1, ..., C_n)$.

Montrer que

$$|\det(A)| \leq \prod_{i=1}^{n} \|C_i\|.$$

Indication p. 1060

Exercice 8 (◔★ Introduction aux matrices de Housholder)
Soit $u \in \mathbb{R}^n$ un vecteur non nul.

On pose

$$H_u = I_n - 2\frac{uu^\top}{\|u\|^2}.$$

Montrer que H_u est une symétrie orthogonale par rapport à un sev que l'on précisera.

Indication p. 1060

Exercice 9 (◔★ Caractérisation de la symétrie et de l'antisymétrie)
Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que

$$A \in S_n(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \forall X, Y \in \mathbb{R}^n, \langle AX, Y\rangle = \langle X, AY\rangle.$$

2. Montrer que

$$A \in A_n(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \forall X, Y \in \mathbb{R}^n, \langle AX, Y\rangle = -\langle X, AY\rangle.$$

3. Montrer que

$$A \in A_n(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \forall X \in \mathbb{R}^n, \langle X, AX\rangle = 0.$$

Indication p. 1060

Exercice 10 (◔★ Image et noyau de $A^\top A$)
Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

Montrer que

$$\mathrm{Ker}(A^\top A) = \mathrm{Ker}(A)$$
$$\mathrm{Im}(A^\top A) = \mathrm{Im}(A^\top).\, \mathrm{rg}(A^\top A) = \mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^\top).$$

Indication p. 1061

Exemples de produits scalaires

Exercice 11 (◔★ Exemples de produits scalaires à poids)

1. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $(\omega_1, ..., \omega_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$. Pour $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$ on pose

$$\langle X, Y \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \omega_k.$$

Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

2. Soit $\omega \in \mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{R}_+^*)$.

Pour $f, g \in \mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{R})$ on pose

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t) g(t) \omega(t) \, \mathrm{d}t.$$

Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{R})$.

3. Soit $(\omega_k)_{k \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$.

Pour $P = \sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$ et $Q = \sum_{k=0}^{\infty} b_k X^k \in \mathbb{R}[X]$ on pose

$$\langle P, Q \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} a_k b_k \omega_k.$$

Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bien défini et est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

4. Soit $\omega \in \mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{R}_+)$ tq $\omega \neq 0$.

Pour $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ on pose

$$\langle P, Q \rangle = \int_a^b P(t) Q(t) \omega(t) \, \mathrm{d}t.$$

Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

Indication p. 1061

Exercice 12 (◔★ Encore des exemples de produits scalaires)

1. Soit $E = \mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R})$.

Pour $f,g \in E$ on pose

$$\langle f,g\rangle = \int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b f'(t)g'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Montrer que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est un produit scalaire sur E.

2. Soit $E = \left\{ f \in \mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R}) \mid \int_a^b f = 0 \right\}$.

Pour $f,g \in E$ on pose

$$\langle f,g\rangle = \int_a^b f'(t)g'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Montrer que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est un produit scalaire sur E.

Indication p. 1061

Exercice 13 (◔★ Espace ℓ^2)

Soit

$$E = \left\{ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \sum_n |u_n|^2 \text{ converge} \right\}.$$

Montrer que E est un espace vectoriel et que

$$\left\langle (u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \right\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} u_n v_n$$

défini un produit scalaire sur E.

Indication p. 1061

Exercice 14 (◑☆ Pourquoi est-ce positif)

Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$.

Pour $f,g \in E$ on pose

$$\langle f,g\rangle = f(0)g(1) + f(1)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Montrer que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est un produit scalaire sur E.

Indication p. 1061

Exercice 15 (◔☆ Pondération décroissante)
Soit E l'ensemble des suites réelles bornées.

Pour $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$ on pose

$$\left\langle (u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \right\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} u_n v_n \frac{1}{2^n}.$$

Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E.

Indication p. 1061

Exercice 16 (◔☆ Moyenne pondérées et fonctions continues)
Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$.

À quelle condition sur $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [0,1]^{\mathbb{N}}$ a-t-on

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E &\to \mathbb{R} \\ (f, g) &\mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} f(a_n) g(a_n) \end{aligned}$$

est un produit scalaire sur E ?

Indication p. 1061

Exercice 17 (◔☆ Un cas particulier de C-S)
Soit $(\omega_k)_{k\in[\![1,n]\!]} \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ une famille de n réels strictement positifs.

Pour $x, y \in \mathbb{R}^n$ on pose

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \omega_k.$$

Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$,

$$\|x\|^2 \|y\|^2 - \langle x, y \rangle^2 = \sum_{i<j} \left(x_i y_j - x_j y_i\right)^2 \omega_i \omega_j.$$

Indication p. 1061

Matrices de Gram

Exercice 18 (◔★ Introduction aux matrices de Gram)
Soit $(f_1, ..., f_n) \in E^n$. On appelle *matrice de Gram* associée à la famille la matrice

$$G(f_1, ..., f_n) = \left(\langle f_i, f_j \rangle\right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}.$$

1. Soient $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. Exprimer $X^\top G(f_1, ..., f_n) Y$ à l'aide d'un produit scalaire.
2. Montrer que $G(f_1, ..., f_n) \in S_n^+(\mathbb{R})$.
3. Que dire de la matrice de Gram dans le cas où $(f_1, ..., f_n)$ est orthogonale ? orthonormée ?

Indication p. 1061

Exercice 19 (◔★♠ Matrice de Gram et matrices de la famille dans une BON)
Soit $(f_1, ..., f_n) \in E^n$. On pose (cf exercice 18)

$$G(f_1, ..., f_n) = \left(\langle f_i, f_j \rangle\right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}.$$

Montrer que pour toute BON $\mathcal{B}$ de E en posant

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f_1, ..., f_n)$$

on a

$$G(f_1, ..., f_n) = A^\top A.$$

Indication p. 1062

Exercice 20 (◑★ Matrice de Gram et rang)
Soit $(f_1, ..., f_n) \in E^n$. On pose (cf exercice 18)

$$G(f_1, ..., f_n) = \left(\langle f_i, f_j \rangle\right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}.$$

Montrer que

$$\mathrm{rg}(G(f_1, ..., f_n)) = \mathrm{rg}(f_1, ..., f_n).$$

Indication p. 1062

Exercice 21 (◑★ Déterminant de Gram)
Soit $(f_1, ..., f_n) \in E^n$. On pose (cf exercice 18)

$$G(f_1, ..., f_n) = \left(\langle f_i, f_j \rangle\right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}.$$

Montrer que

$$\det(G(f_1, ..., f_n)) \geq 0.$$

Dans quel cas y-a-t-il égalité ?

Indication p. 1062

Exercice 22 (◑☆ Déterminant de Gram et distance)
Soit $(f_1, ..., f_n) \in E^n$ une famille libre de E et $x \in E$. On utilise les notations de l'exercice 18.

Montrer que

$$d(x, \mathrm{Vect}(f_1, ..., f_n))^2 = \frac{\det(G(f_1, ..., f_n, x))}{\det(G(f_1, ..., f_n))}.$$

Indication p. 1062

Exercice 23 (◔☆ Une version rigolote de C-S)
Soient $x, y \in E$.

Montrer que

$$\begin{vmatrix} \langle x, x \rangle & \langle x, y \rangle \\ \langle y, x \rangle & \langle y, y \rangle \end{vmatrix} \geq 0.$$

Indication p. 1062

Polynômes orthogonaux

Exercice 24 (◔★ Lagrange sous le prisme orthogonal)
Soient $x_0, ..., x_n \in \mathbb{R}$.

Pour $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$ on pose

$$\langle P, Q \rangle = \sum_{k=0}^{n} P(x_k) Q(x_k).$$

Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$ et proposer une base orthogonale.

Indication p. 1062

Exercice 25 (◔★♠ Existence de polynômes orthogonaux)
Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

1. Montrer qu'il existe une base orthonormale échelonnée.
2. Montrer qu'il existe une base orthogonale unitaire échelonnée.

Indication p. 1062

Exercice 26 (◔★ Orthogonalité et caractère scindé)
Soit $\omega \in \mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{R}_+^*)$.

Pour $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ on pose

$$\langle P, Q \rangle = \int_a^b P(t)Q(t)\omega(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$ et

$$P \in (\mathbb{R}_n[X])^\perp.$$

   Montrer que P admet au moins n racines dans $[a,b]$.
3. On considère une famille orthogonale échelonnée (cf exercice 25).

   Montrer que tous les polynômes sont scindés à racines simples et que les racines sont distinctes.

Indication p. 1062

Exercice 27 (◑★ Orthogonalité et relation de récurrence)
Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

On suppose de plus que pour tous $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ on a

$$\langle XP, Q \rangle = \langle P, XQ \rangle.$$

Remarque: c'est en particulier le cas si le produit scalaire s'écrit $\langle P, Q \rangle = \int_a^b P(t)Q(t)\omega(t)\,\mathrm{d}t$ avec $\omega \in \mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{R}_+^*)$.

On considère $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une famille orthonormale échelonnée de $\mathbb{R}[X]$ (cf exercice 25).

On fixe $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer qu'il existe $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ tels que
$$P_{n+2} - (a_n X + b_n)P_{n+1} \in \mathbb{R}_n[X].$$
2. Montrer que
$$P_{n+2} - (a_n X + b_n)P_{n+1} \in (\mathbb{R}_{n-1}[X])^\perp.$$
3. En déduire qu'il existe $c_n \in \mathbb{R}$ tel que
$$P_{n+2} = (a_n X + b_n)P_{n+1} + c_n P_n.$$

Indication p. 1063

Exercice 28 (◕☆ Formule de Christoffel-Darboux)
Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$ tel que pour tous $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ on a

$$\langle XP, Q \rangle = \langle P, XQ \rangle.$$

On considère $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une famille orthonormale échelonnée de $\mathbb{R}[X]$ (cf exercice 25) et on note pour tout $k \in \mathbb{N}$, α_k le coefficient dominant de X^k.

1. Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x, y \in \mathbb{R}$ on a
$$\sum_{k=0}^{n} P_k(x)P_k(y) = \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}} \frac{P_{n+1}(x)P_n(y) - P_n(x)P_{n+1}(y)}{x - y}.$$
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\sum_{k=0}^{n} P_k(x)^2 = \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}} (P'_{n+1}(x)P_n(x) - P'_n(x)P_{n+1}(x)).$$

Indication p. 1063

Exercice 29 (◕☆ Entralecement de racines)
On considère un produit scalaire comme à l'exercice 26.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $x_1 < \cdots < x_{n+1}$ les racines de P_{n+1} et $y_1 < \cdots < y_n$ les racines de P_n.

Montrer que

$$x_1 < y_1 < x_2 < y_2 < \cdots < x_n < y_n < x_{n+1}.$$

Indication p. 1063

Exercice 30 (◑★ Une famille bien connue de polynômes en lien avec les cosinus)
Pour $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ on pose

$$\langle P, Q\rangle = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} P(\cos(\theta))Q(\cos(\theta))\,\mathrm{d}\theta.$$

1. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Déterminer l'orthonormalisé de Gram-Schmidt pour ce produit scalaire de la base canonique $\left(X^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$.

Indication p. 1063

Un zeste de dualité

Exercice 31 (◑★ Vers les formes linéaires continues)
Soit E un espace préhilbertien.

On considère

$$\begin{aligned}\iota : E &\to E^* \\ a &\mapsto (x \mapsto \langle a, x\rangle)\end{aligned}$$

1. Montrer que ι est une application linéaire injective.
2. Soit $\varphi \in \mathrm{Im}(\iota)$.

   Montrer que

   $$\exists C \in \mathbb{R}_+, \forall x \in E, |\varphi(x)| \leq C\ \|x\| \tag{1}$$

3. On suppose que E n'est pas de dimension finie. Montrer que $\mathrm{Im}(\iota) \neq E$.

Remarque: d'après le théorème de Riesz si E est un espace de Hilbert *alors l'image de ι est l'ensemble des formes linéaires vérifiant la condition (1)*

Indication p. 1063

Exercice 32 (◔★ Théorème de représentation de Riesz en dimension finie)
Soit E un espace euclidien.

Montrer que

$$\begin{aligned}\iota : E &\to E^* \\ a &\mapsto (x \mapsto \langle a, x\rangle)\end{aligned}$$

est un isomorphisme.

Indication p. 1063

Exercice 33 (◔★ Vers Fourier)
Soit $T > 0$, $\omega = \frac{2\pi}{T}$ et E l'espace des fonctions continues de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ et T-périodiques.

Pour $f, g \in E$ on pose

$$\langle f, g\rangle = \frac{2}{T}\int_0^{\top} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que $\langle f, g\rangle$ est un produit scalaire sur E.
2. On note $c_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $c_k = (t \mapsto \cos(k\omega t))$, $s_k = (t \mapsto \sin(k\omega t))$.

   Montrer que la famille $\left(c_0, (c_k)_{k\in\mathbb{N}^*}, (s_k)_{k\in\mathbb{N}^*}\right)$ est une famille orthonormale.

Indication p. 1063

Exercice 34 (◔★ Un peu de dualité tordue)
Soit $(f_1, ..., f_p) \in E^p$ une famille libre de vecteurs de E.

Montrer qu'il existe $(f_1^*, ..., f_p^*) \in E^p$ telle que

$$\forall (i, j) \in [\![1, p]\!]^2, \langle f_i^*, f_j\rangle = \delta_{ij}.$$

Indication p. 1064

Exercice 35 (◔★ Orthogonal et somme/intersection, le cas quelconque)
Soit E un espace pré-hilbertien. Soient F et G deux sevs de E.

Montrer que

1. $(F^\perp)^\perp \supset F$
2. $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$
3. $(F \cap G)^\perp \supset F^\perp + G^\perp$
4. **Bonus** Pour chaque inclusion donner un exemple où elle est stricte.

Indication p. 1064

Exercice 36 (◔★ Orthogonal et opérations, le cas de la dimension finie)
Soit E un espace euclidien. Soient F et G deux sevs de E.

Montrer que
1. $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$
2. $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$

Indication p. 1064

Exercice 37 (◑★ Des contre-exemples explicites)
Soit $E = \mathcal{C}^0([-1,1],\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire canonique.

1. On pose $F = \{f \in E \mid f(0) = 0\}$.

   Montrer que $F^\perp = \{0\}$.
2. Montrer qu'il n'existe pas de $g \in E$ tel que
$$\forall f \in E, \langle f, g\rangle = f(0).$$

Indication p. 1064

Exercice 38 (◔★ Adjoint, image et noyau (version matricielle))
Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

Montrer que
$$\mathrm{Ker}(A)^\perp = \mathrm{Im}(A^\top)$$
$$\mathrm{Im}(A)^\perp = \mathrm{Ker}(A^\top).$$

Indication p. 1064

De la norme au produit scalaire

Exercice 39 (◔★♣ Polarisation)
Soit E un espace pré-hilbertien.

Montrer que pour tous $x, y \in E$,
$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2)$$
$$= \frac{1}{2}(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2).$$

Indication p. 1064

Exercice 40 (◑★ L'identité du parallélogramme est essentielle)

1. Soit E un espace pré-hilbertien. Montrer que pour tous $x, y \in E$,

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

2. Soit E un espace vectoriel muni d'une norme N c'est à dire d'une application $N : E \to \mathbb{R}_+$ telle que

- ▷ $\forall x \in E, N(x) \geq 0$ avec égalité ssi $x = 0$,
- ▷ $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, N(\lambda x) = |\lambda|\ N(x)$,
- ▷ $\forall x, y \in E, N(x+y) \leq N(x) + N(y)$.

Montrer qu'il existe un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur E tel que pour tout $x \in E$, $N(x) = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ si et seulement si pour tous $x, y \in E$,

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Indication p. 1064

Exercice 41 (◔★ Projecteur orthogonal et norme)
Soit E un espace pré-hilbertien et $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur.

Montrer que p est un projecteur orthogonal si et seulement si pour tout $x \in E$, $\|px\| \leq \|x\|$.

Indication p. 1064

Exercice 42 (◔☆ Projecteur orthogonal light)
Soit E un espace pré-hilbertien et $x, y \in E$.

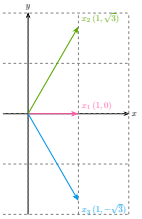
Montrer que

$$\langle x, y \rangle = 0 \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, \|x\|^2 \leq \|x + ty\|^2.$$

Indication p. 1065

Inégalités, optimisation et un peu de ~~chimie~~ géométrie

Exercice 43 (◔★ Pas de réciproque à Pythagore pour $n > 2$)



Déterminer trois vecteurs $u_1, u_2, u_3 \in \mathbb{R}^2$ non deux à deux orthogonaux et tels que

$$\|u_1 + u_2 + u_3\|^2 = \|u_1\|^2 + \|u_2\|^2 + \|u_3\|^2.$$

Indication p. 1065

Exercice 44 (◔★ La norme subordonnée à la norme 2 est majorée par la norme de Frobenius)
Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

Montrer que pour tout $X \in \mathbb{R}^n$,

$$\|AX\|_2^2 \leq \mathrm{tr}(A^\top A)\|X\|_2^2.$$

Indication p. 1065 · Solution p. 1066

Exercice 45 (◑☆ Régression linéaire)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $(y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$.

Déterminer le minimum de

$$(a, b) \mapsto \sum_{i=1}^{n} (y_i - (ax_i + b))^2.$$

Indication p. 1065

Exercice 46 (◔☆ VSEPR et molécules trigonales)
Soient u_1, u_2, u_3 trois vecteurs de E tels que pour tous $i, j \in [\![1, 3]\!]$

$$\langle u_i, u_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ -\frac{1}{2} & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Montrer que $\mathrm{rg}(u_1, u_2, u_3) = 2$.

Indication p. 1065

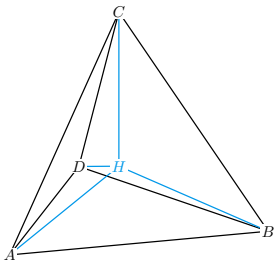
Exercice 47 (◑★ Famille obtusangle maximale)
On dit qu'une famille de vecteurs $(u_i)_{i\in[\![1,p]\!]}$ de E est *obtusangle* si pour tous i, j distincts, $\langle u_i, u_j\rangle < 0$.

Soit E un espace euclidien de dimension n et $(u_1, ..., u_p)$ une famille obtusangle de E.

Montrer que $p \leq n+1$.

Indication p. 1065

Exercice 48 (◔☆ L'angle magique)



On considère un tétraèdre régulier de centre H et de sommets A, B, C et D.

Déterminer la valeur de l'angle $\widehat{AHB}$.

Indication p. 1065

Indications

Indication 1 · Énoncé p. 1044 (Introduction aux matrices symétriques positives)
RAS.

Indication 2 · Énoncé p. 1044 (Matrice d'une forme bilinéaire dans une base)

1. Procéder par analyse-synthèse. On obtient $A = \big(b(e_i, e_j)\big)_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq n}}$ où $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$.
2. Dans un sens remarquer que pour tous i et j, $b(e_i, e_j) = b(e_j, e_i)$. Dans l'autre que $Y^\top AX = \left(X^\top A^\top Y\right)^\top$.
3. Juste écrire la définition.
4. Juste écrire la définition.

Indication 3 · Énoncé p. 1044 (Orthogonalité et symétrie)
Remarquer que $\operatorname{tr}(AS) = \operatorname{tr}(S^\top A^\top)$ et que $\operatorname{tr}(-SA) = -\operatorname{tr}(AS)$.

Indication 4 · Énoncé p. 1045 (Caractérisation de $O_n(\mathbb{R})$)
RAS si ce n'est se rappeler de la polarisation et que $\langle E_i, BE_j\rangle = B_{ij}$.

Indication 5 · Énoncé p. 1045 (Groupe orthogonal)
Les caractérisations en $A^\top A$, en norme ou produit scalaire conviennent toutes.

Indication 6 · Énoncé p. 1045 (Décomposition QR)
Gram-Schmidt sur les colonnes de A.

Indication 7 · Énoncé p. 1045 (Inégalité de Hadamard)
Plusieurs options:

- ▷ Par décomposition QR, $|\det A| = |\det Q|\,|\det R| = \prod_{i=1}^n |R_{ii}|$.

  Il reste à étudier les R_{ii}. Mais avec $Q = (U_1 \cdots U_n)$, on a (cf G-S), $R_{ii} = \langle C_i, U_i\rangle$ puis C-S.
- ▷ Avec $S = A^\top A$ on a $S_{ii} = \|C_i\|^2$ et $|\det A|^2 = \det S$.

  Ensuite par exemple par récurrence sur n en écrivant

$$S = \begin{pmatrix} S_{11} & C^\top \\ C & \tilde{S} \end{pmatrix}$$

  et un complément de Schur.

Indication 8 · Énoncé p. 1046 (Introduction aux matrices de Housholder)
C'est la symétrie orthogonale par rapport à $\{u\}^\perp$.

Indication 9 · Énoncé p. 1046 (Caractérisation de la symétrie et de l'antisymétrie)

1. Montrer que $\langle E_i, ME_j\rangle = (M)_{ij}$.
2. Idem.
3. Sur la diagonale E_i. En dehors $E_i + E_j$.

Indication 10 · Énoncé p. 1046 (Image et noyau de $A^\top A$)
Une inclusion est immédiate.

Remarquer que $AX = 0$ ssi $\|AX\|^2 = 0$ et conclure par dimension.

Indication 11 · Énoncé p. 1047 (Exemples de produits scalaires à poids)
Dans chacun des cas le caractère bilinéaire symétrique positif est immédiat. Reste le côté défini positif.

1. Une somme de termes positifs est nul ssi tous les termes sont nuls et pour tout k, comme $\omega_k \neq 0$, on a $\omega_k x_k^2 = 0 \Rightarrow x_k = 0$.
2. Ne pas oublier la positivité et la continuité de ωf^2 pour mq $\omega f^2 = 0$. Comme ω ne s'annule jamais conclure.
3. Les sommes sont finies. Pour P et Q fixés se ramener au premier point avec un n bien choisi.
4. Attention ici ω peut s'annuler mais n'est pas identiquement nul. Montrer que P^2 s'annule sur tout intervalle où ω est strictement positif et qu'un tel intervalle non trivial existe. Conclure en utilisant que P est un polynôme.

Indication 12 · Énoncé p. 1048 (Encore des exemples de produits scalaires)

1. Immédiat.
2. Pour le caractère défini, montrer que si $f \in E$ vérifie $f' = 0$ alors $f = 0$.

Indication 13 · Énoncé p. 1048 (Espace ℓ^2)
Cf TD séries.

Indication 14 · Énoncé p. 1048 (Pourquoi est-ce positif)
Le point important est le caractère (défini) positif.

Utiliser C-S pour majorer $f(0)g(1) + f(1)g(0)$.

Indication 15 · Énoncé p. 1049 (Pondération décroissante)
Vérifier que c'est bien défini et attention à la positivité.

Indication 16 · Énoncé p. 1049 (Moyenne pondérées et fonctions continues)
Ok pour le caractère bien défini (pq ?),bilinéaire symétrique et positif. Pour le caractère défini montrer que cela est équivalent à la densité de $\{a_n, n \in \mathbb{N}\}$ dans $[0,1]$.

Indication 17 · Énoncé p. 1049 (Un cas particulier de C-S)
Cela revient à montrer que

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \omega_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2 \omega_k\right) = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \omega_k\right)^2 + \sum_{i<j} \left(x_i y_j - x_j y_i\right)^2 \omega_i \omega_j.$$

Indication 18 · Énoncé p. 1050 (Introduction aux matrices de Gram)

1. Écrire explicitement et développer. On obtient

$$X^\top G(f_1,...,f_n)Y = \left\langle \sum_j x_j f_j, \sum_i y_i f_i \right\rangle.$$

2. Utiliser la question précédente.

3. Diagonale de coeffs positifs. Identité.

Indication 19 · Énoncé p. 1050 (Matrice de Gram et matrices de la famille dans une BON)
Écrire l'expression du p.s dans une BON pour chaque coefficient.

Indication 20 · Énoncé p. 1050 (Matrice de Gram et rang)
Plusieurs méthodes. On peut par exemple traiter le cas où la famille $(f_1,...,f_n)$ est libre, puis prendre une famille libre maximale.

Indication 21 · Énoncé p. 1051 (Déterminant de Gram)
Utiliser par exemple l'exercice 19.

Et (cf tous les autres exos) le déterminant est nul ssi la famille est liée.

Indication 22 · Énoncé p. 1051 (Déterminant de Gram et distance)
Poser y le projeté orthogonal de x sur $\mathrm{Vect}(f_1,...,f_n)$.

Plusieurs options:

- Calculer les coordonnées de y dans $(f_1,...,f_n)$ en résolvant un système faisant intervenir les matrices de Gram.
- Constater que pour tout i, $\langle x,f_i\rangle = \langle y,f_i\rangle$ et donc par linéarité par rapport à la dernière colonne, comme $\langle x,x\rangle = \|y\|^2 + \|x-y\|^2$ (Pythagore),

$$\begin{vmatrix} G(f_1,...,f_n) & \begin{matrix}\langle f_1,x\rangle\\ \vdots \\ \langle f_n,x\rangle\end{matrix} \\ \begin{matrix}\langle x,f_1\rangle & \cdots & \langle x,f_n\rangle\end{matrix} & \langle x,x\rangle \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} G(f_1,...,f_n) & \begin{matrix}\langle f_1,y\rangle\\ \vdots \\ \langle f_n,y\rangle\end{matrix} \\ \begin{matrix}\langle x,f_1\rangle & \cdots & \langle x,f_n\rangle\end{matrix} & \|y\|^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} G(f_1,...,f_n) & \begin{matrix}0\\ \vdots \\ 0\end{matrix} \\ \begin{matrix}\langle x,f_1\rangle & \cdots & \langle x,f_n\rangle\end{matrix} & \|x-y\|^2 \end{vmatrix}$$

et remarquer que le déterminant de gauche est nul par liaison.

Indication 23 · Énoncé p. 1051 (Une version rigolote de C-S)
C'est juste C-S ou bien la matrice de Gram de la famille (x,y).

Indication 24 · Énoncé p. 1051 (Lagrange sous le prisme orthogonal)
Pour le caractère défini, un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ s'annulant en n points distincts est nul.

Pour la famille échelonnée, que dire de Lagrange ?

Indication 25 · Énoncé p. 1052 (Existence de polynômes orthogonaux)
Gram-Schmidt.

Indication 26 · Énoncé p. 1052 (Orthogonalité et caractère scindé)

1. RAS.

2. Si P a strictement moins de n racines d'ordre <u>impair</u> dans $[a,b]$, en notant $x_1,...,x_r$ ces racines, que dire de

$$\int_a^b P(t)\prod_{i=1}^{r}(t-x_i)\,\mathrm{d}t.$$

3. Application de la question précédente.

Indication 27 · Énoncé p. 1053 (Orthogonalité et relation de récurrence)

1. Système 2×2 échelonné.

2. Utiliser $\langle XP_{n+1},Q\rangle = \langle P_{n+1},XQ\rangle$.

3. En déduire qu'on est dans $\mathrm{Vect}(P_n)$.

Indication 28 · Énoncé p. 1053 (Formule de Christoffel-Darboux)
Commencer par faire l'exercice 27 pour obtenir une relation de récurrence.

Puis faire une récurrence à l'aide de la relation de récurrence.

Enfin faire $y\to x$.

Indication 29 · Énoncé p. 1054 (Entralecement de racines)
Faire une récurrence d'ordre 2 en évaluant la formule de récurrence,ou bien interpréter la seconde forme de la formule de Christoffel-Darboux à l'exercice 28 comme un signe de Wronskien.

Indication 30 · Énoncé p. 1054 (Une famille bien connue de polynômes en lien avec les cosinus)

1. $\cos([0,2\pi])$ est infini.

2. À part pour le premier ce sont, sans beaucoup de surprise, les polynômes de Tchebychev.

Indication 31 · Énoncé p. 1054 (Vers les formes linéaires continues)

1. RAS.

2. CS.

3. Il existe alors une famille libre infinie, donc quitte à gramschmitiser une famille orthonormale infinie $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

Quitte à la compléter en une base on choisi φ tel que pour tout k, $\varphi(e_k)=k$.

Indication 32 · Énoncé p. 1055 (Théorème de représentation de Riesz en dimension finie)
Le caractère linéaire est immédiat.

Pour l'injectivité, un vecteur est nul ssi il est orthogonal à tout vecteur.

Pour la bijectivité, la dimension entre en jeu.

Indication 33 · Énoncé p. 1055 (Vers Fourier)

1. Une fonction périodique nulle sur une période est nulle.

2. Aucun piège, faire le calcul explicite.

Indication 34 · Énoncé p. 1055 (Un peu de dualité tordue)
Se ramener au cas E euclidien quitte à considérer $\mathrm{Vect}(f_1, ..., f_p)$.

Plein de méthodes: par récurrence, par base duale puis isomorphisme $a \mapsto (x \mapsto \langle a, x\rangle)$, on bien matricielle considérer A la matrice dans une BON et regarder $\left(A^{-1}\right)^\top$.

Indication 35 · Énoncé p. 1055 (Orthogonal et somme/intersection, le cas quelconque)

1. Soit $x \in F$. Alors pour tout $y \in F^\perp$, $\langle x, y\rangle = 0$ et donc $x \in \left(F^\perp\right)^\perp$.

2.
- ▷ $\subset$: si $x \in (F+G)^\perp$ alors $x \in F^\perp$ et $x \in G^\perp$.
- ▷ $\supset$: si $x \in F^\perp$ et $x \in G^\perp$, alors pour tout $y \in (F+G)$, avec $y = y_F + y_G$ on a $\langle x, y\rangle = 0 + 0 = 0$.

3. Au choix utiliser l'inclusion précédente ou remarquer que si $x = x_{F^\perp} + x_{G^\perp}$ alors pour $y \in F \cap G$ on a $\langle x, y\rangle = 0 + 0 * 0$.

4. [Bonus] Pour le contre-exemple regarder par exemple l'exercice 37.

Indication 36 · Énoncé p. 1056 (Orthogonal et opérations, le cas de la dimension finie)
Sauf l'inclusion $\supset$ du deuxième point toutes les inclusions peuvent se faire en utilisant les juste les définitions, et ce quelle que soit la dimension (cf 35)

Utiliser la dimension pour la dernière (ou pour simplifier les autres), soit en montrant une inclusion et l'égalité des dimensions, soit en utilisant $\left(F^\perp\right)^\perp = F$.

Indication 37 · Énoncé p. 1056 (Des contre-exemples explicites)
Déjà vu dans des TDs précédents.

1. Au choix, prendre f raccordée à 0 en 0 ou bien quelque chose de proche d'un Dirac en tout point.

2. Au choix, par exemple, supposer par l'absurde que g existe et montrer que pour tout $x \in [-1, 1]$, $g(x) = 0$ et que $\int_{-1}^{1} g = 1$.

Ou bien remarquer que si c'était le cas $F^\perp$ n'est pas $\{0\}$.

Indication 38 · Énoncé p. 1056 (Adjoint, image et noyau (version matricielle))
On peut commencer par constater l'égalité des dimensions.

Remarquer ensuite $\langle Z, A^\top Y\rangle = \langle AZ, Y\rangle$.

Indication 39 · Énoncé p. 1056 (Polarisation)
Al-Kashi

Indication 40 · Énoncé p. 1057 (L'identité du parallélogramme est essentielle)

1. Al-Kashi

2. Définir $\langle \cdot, \cdot\rangle$ à l'aide de la formule de polarisation (cf exercice 39).

Vérifier que c'est un p.s. en utilisant l'identité du parallélogramme.

Indication 41 · Énoncé p. 1057 (Projecteur orthogonal et norme)
Faire un schéma.

Dans un sens c'est Pythagore, dans l'autre à l'aide du schéma prendre $(x,y) \in \mathrm{Im}(p) \times \mathrm{Ker}(p)$ et étudier $t \mapsto \|x+ty\|^2$ (cf la preuve de C-S du cours).

Indication 42 · Énoncé p. 1057 (Projecteur orthogonal light)
Al-Kashi et étude de trinôme, cf preuve de C-S.

Indication 43 · Énoncé p. 1058 (Pas de réciproque à Pythagore pour $n > 2$)
Chercher par exemple sous la forme $(1,0)$, $(1,a)$ et $(1,-a)$ avec $a \in \mathbb{R}$.

Indication 44 · Énoncé p. 1058 (La norme subordonnée à la norme 2 est majorée par la norme de Frobenius)
Utiliser CS.

Solution p. 1066

Indication 45 · Énoncé p. 1058 (Régression linéaire)
Il s'agit du projeté de $(y_i)_{1\leq i\leq n}$ sur $\mathrm{Vect}\Big((x_i)_{1\leq i\leq n}, (1)_{1\leq i\leq n}\Big)$.

Cf aussi les fonctions de deux variables.

Indication 46 · Énoncé p. 1058 (VSEPR et molécules trigonales)
Faire un schéma !!

Du schéma se douter qu'il faut montrer par exemple $u_3 = -(u_1+u_2)$.

Pour le montrer calculer par exemple $\| u_3 + (u_1+u_2) \|$.

Indication 47 · Énoncé p. 1059 (Famille obtusangle maximale)
Procéder par récurrence sur n.

Pour l'hérédité, projeter sur $\{e_p\}^\perp$ et vérifier que la projection est encore obtusangle.

Bonus: trouver une famille obtusangle de cardinal $n+1$.

Indication 48 · Énoncé p. 1059 (L'angle magique)
On obtient un angle de $\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$, c'est à dire environ 109°, cf cours de Chimie.

Solutions

Solution pour l'exercice 44 · Énoncé p. 1058 · Indication p. 1065 (La norme subordonnée à la norme 2 est majorée par la norme de Frobenius)
Avec $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots x_n \end{pmatrix}$ on a

$$\begin{aligned}\|AX\|^2 &= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right)^2 \\ &\leq \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right) \\ &= \operatorname{tr}(A^\top A)\|X\|^2.\end{aligned}$$

Chapitre 29

Probabilités et Variables Aléatoires

Énoncés 1068
Probabilités 1068
Variables aléatoires 1071
Indications 1080
Solutions 1084

Énoncés

Dans tout le TD, $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ désigne un espace probabilisé fini et X une variable aléatoire sur Ω.

Probabilités

Exercice 1 (◔★ Mesure image)
Soient $(\Omega_1, \mathcal{P}(\Omega_1))$ et $(\Omega_2, \mathcal{P}(\Omega_2))$ deux espaces probabilisables finis.

Soient $\mathbb{P}$ une probabilité sur Ω_1 et $f : \Omega_1 \to \Omega_2$.

Montrer que $f_*\mathbb{P}$ définie par

$$\forall B \in \mathcal{P}(\Omega_2), (f_*\mathbb{P})(B) = \mathbb{P}(f^{-1}(B))$$

est une probabilité sur Ω_2

Indication p. 1080

Exercice 2 (◔★♠ Formule du crible)
Soient $A_1, ..., A_n$ des évènements. Montrer que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) &= \sum_{\substack{I \subset [\![1,n]\!] \\ I \neq \varnothing}} (-1)^{|I|-1} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \\ &= \sum_{m=1}^{n} (-1)^{m-1} \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_m \leq n} \mathbb{P}\left(A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap \cdots \cap A_{j_m}\right)\end{aligned}$$

Indication p. 1080

Exercice 3 (◔★♠ Loi hypergéométrique)
On considère une urne contenant N_1 boules bleues et N_2 boules vertes.

On tire n boules de l'urne et on note X le nombre de boules bleues obtenues.

1. Déterminer la loi de X.
2. En déduire une nouvelle démonstration de la formule de Vandermonde.

Indication p. 1080

Exercice 4 (◔★ Tirage et maximum)
On considère une urne contenant N boules numérotées de 1 à N.

1. On tire **avec remise** n boules et on note X le maximum. Déterminer la loi de X.
2. On tire **sans remise** n boules et on note X le maximum. Déterminer la loi de X.
3. Comparer les deux résultats et commenter.

Indication p. 1080

Exercice 5 (◔★ Loi hypergéométrique et limite)
Soit $p \in [0,1]$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. On effectuera les calculs de cette question comme si pour tout $N \in \mathbb{N}$, $pN \in \mathbb{N}$.

   Montrer que pour tout $k \in [\![0,n]\!]$,

$$\frac{\binom{pN}{k}\binom{(1-p)N}{n-k}}{\binom{N}{n}} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

2. Interpréter d'un point de vue probabiliste le résultat précédent.
3. Proposer un cadre permettant de justifier rigoureusement les calculs précédents.

Indication p. 1080

Exercice 6 (◑★ Probabilités et indicatrice d'Euler)
On rappelle que pour $n \in \mathbb{N}^*$ on note $\varphi(n)$ le nombre d'entiers plus petits que n et premiers avec n.

Soit n et m deux entiers premiers entre eux.

On muni $[\![1,nm]\!]$ de la probabilité uniforme.

1. Montrer que les évènements $A = \{k \in [\![1,nm]\!] \mid k \wedge n = 1\}$ et $B = \{k \in [\![1,nm]\!] \mid k \wedge m = 1\}$ sont indépendants.
2. En déduire que

$$\varphi(nm) = \varphi(n)\varphi(m).$$

Indication p. 1080

Exercice 7 (◔★ Indépendance avec soi-même)
Déterminer tous les évènements A tels que A est indépendant avec A.

Indication p. 1080

Exercice 8 (◔★ Une inégalité liée à CS)
Soient A et B deux évènements.

Montrer que

$$|\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)| \leq \frac{1}{4}.$$

Indication p. 1080

Exercice 9 (◔★ Normalisation)
Soit $n \in \mathbb{N}$.

Déterminer une probabilité $\mathbb{P}$ sur $[\![0, n]\!]$ telle que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\mathbb{P}(\{k\})$ est proportionnel à k.

Indication p. 1080

Exercice 10 (◔☆ Calcul et indépendance)
Soient A et B deux évènements.

Montrer que A et B sont indépendants si et seulement si

$$P(A \cap B) \times P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = P\left(\overline{A} \cap B\right) \times P\left(A \cap \overline{B}\right).$$

Indication p. 1080

Exercice 11 (◔☆ Copartition)
Soient $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ deux événements. Montrer

$$P(A \cup B) + P\left(A \cup \overline{B}\right) + P\left(\overline{A} \cup B\right) + P\left(\overline{A} \cup \overline{B}\right) = 3.$$

Indication p. 1080

Exercice 12 (◉☆ Une inégalité non évidente)
Soient $A_1, ..., A_n$ des événements.

On pose pour tout $k \in [\![1, n]\!]$,

$$C_k = \{\omega \in \Omega \mid \omega \text{ appartient à au moins } k \text{ des événements } A_1, ..., A_n\}.$$

Montrer

$$\prod_{k=1}^{n} P(C_k) \leq \prod_{i=1}^{n} P(A_i).$$

Indication p. 1081 · Solution p. 1084

Exercice 13 (◕☆ Mini problème: un peu d'entropie)
Pour $\alpha = \{A_i\}_{1 \leq i \leq n}$ et $\beta = \{B_j\}_{1 \leq j \leq m}$ deux s.c.e, on dit que α est plus fin que β, et on note $\alpha \succ \beta$ ssi

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \exists j \in [\![1, m]\!], A_i \subset B_j.$$

1. Montrer que $\succ$ est une relation d'ordre sur l'ensemble des s.c.e.

Pour $\alpha = \{A_i\}_{1 \leq i \leq n}$ un s.c.e. on définit l'*entropie* de α (relativement à $\mathbb{P}$) par

$$S_{\mathbb{P}}(\alpha) = -\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) \ln(\mathbb{P}(A_i))$$

en adoptant la convention «$0 \ln(0) = 0$».

1. Montrer que $\alpha \mapsto S_{\mathbb{P}}(\alpha)$ est croissante.

2. Déterminer $\max_{\alpha \text{ s.c.e}}(S_{\mathbb{P}}(\alpha))$ et $\min_{\alpha \text{ s.c.e}}(S_{\mathbb{P}}(\alpha))$.

Variables aléatoires

Exercice 14 (◔★ Égalité de Cavalieri ou formule des queues)
Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $X(\Omega) \subset [\![0, n]\!]$.

Montrer que

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X > k).$$

Indication p. 1081

Exercice 15 (◔★ Encore une égalité de Cavalieri)
Soit X une v.a finie telle que $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$ et $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ une fonction.

Montrer que

$$\mathbb{E}[f(X)] = f(0) + \sum_{k=0}^{\infty} (f(k+1) - f(k))\mathbb{P}(X > k).$$

Indication p. 1081

Exercice 16 (◔★ Des inégalités déjà connues)
Démontrer et **nommer** les inégalités suivantes:

1. Pour X et Y deux variables aléatoires et $\eta > 0$

$$\mathbb{E}[XY] \leq \eta \mathbb{E}[X^2] + \frac{1}{4\eta}\mathbb{E}[Y^2]$$

2. Pour X et Y deux variables aléatoires

$$\mathbb{E}[XY] \leq \sqrt{\mathbb{E}[X^2]}\sqrt{\mathbb{E}[Y^2]}$$

3. Pour I un intervalle, $f : I \to \mathbb{R}$ convexe et X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) \subset I$,

$$f(\mathbb{E}[X]) \leq \mathbb{E}[f(X)]$$

4. Pour X une variable aléatoire strictement positive

$$\frac{1}{\mathbb{E}\left[\frac{1}{X}\right]} \leq \exp(\mathbb{E}[\ln(X)]) \leq \mathbb{E}[X]$$

5. Pour X, Y deux variables aléatoires, $p, q > 1$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$,

$$\mathbb{E}[\![XY]\!] \leq (\mathbb{E}[\![X|^p])^{\frac{1}{p}} (\mathbb{E}[\![Y|^q])^{\frac{1}{q}}$$

6. Pour X, Y deux variables aléatoires et $p \in [1, +\infty[$,

$$(\mathbb{E}[(X+Y)^p])^{\frac{1}{p}} \leq (\mathbb{E}[\![X|^p])^{\frac{1}{p}} + (\mathbb{E}[\![Y|^p])^{\frac{1}{p}}$$

7. Pour X, Y, Z des variables aléatoires

$$\mathbb{E}[\![X - Y]\!] \leq \mathbb{E}[\![X - Z]\!] + \mathbb{E}[\![Z - Y]\!].$$

Indication p. 1081

Exercice 17 (◔★ Quelle inégalité connue)
Soient X, Y des variables aléatoires **indépendantes** et identiquement distribuées à valeurs dans $]0, +\infty[$.

Montrer que

$$\mathbb{E}\left[\frac{X}{Y}\right] \geq 1.$$

Indication p. 1081

Exercice 18 (◑☆ Une variante non indépendante)
Soient X, Y des variables aléatoires à valeurs dans $]0, +\infty[$ de même loi (mais non nécessairement indépendantes).

Montrer que

$$\mathbb{E}\left[\frac{X}{Y}\right] \geq 1.$$

Indication p. 1081

Exercice 19 (◔★ Comment traiter un maximum)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $r \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, X_2, ..., X_r$ des variables aléatoires indépendantes suivant toutes une loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$.

On note

$$M_r = \max(X_1, ..., X_r).$$

1. Déterminer pour $k \in [\![1, n]\!]$, $\mathbb{P}(M_r \leq k)$.
2. En déduire la loi de M_r.
3. Écrire $\mathbb{E}[M_r]$ sous la forme d'une somme simple.
4. Calculer $\mathbb{E}[M_r]$ pour $r \in \{1, 2, 3\}$.
5. Commenter.

Indication p. 1081

Exercice 20 (◔★♠ De Markov à pleins d'autres inégalités)
Soit X une variable aléatoire et $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ strictement croissante.

Montrer que pour tout $a > 0$,

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}[f(|X - \mathbb{E}[X]|)]}{f(a)}$$

Indication p. 1081

Exercice 21 (◔★ Structure euclidienne et trinôme)
Soit X une variable aléatoire.

Déterminer les extremas de

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ m &\mapsto \mathbb{E}\big[(X-m)^2\big] \end{aligned}$$

Indication p. 1081

Exercice 22 (◔★ Convergence en loi vers Poisson)
Soit $\lambda > 0$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ soit $X_n \sim \mathcal{B}\big(n, \frac{\lambda}{n}\big)$.

Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(X_n = k) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}.$$

Exercice 23 (◑★ Inégalités de Bathia-Davis et de Popoviciu)
Soit X une variable aléatoire et $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a \leq b$ tels que

$$\mathbb{P}(X \in [a,b]) = 1.$$

1. Montrer que pour tout $x \in [a,b]$

$$0 \leq ax + bx - ab - x^2 \leq \left(\frac{a-b}{2}\right)^2.$$

2. En déduire que

$$\mathrm{Var}(X) \leq (b - \mathbb{E}[X])(\mathbb{E}[X] - a)$$

3. En déduire que

$$\mathrm{Var}(X) \leq \left(\frac{a-b}{2}\right)^2.$$

Indication p. 1081 · Solution p. 1085

Exercice 24 (◑☆ Somme de deux dés truqués)
Peut-on truquer deux dés à six faces de manière à ce que la somme des résultats ait une loi uniforme sur $[\![2,12]\!]$?

Indication p. 1082

Exercice 25 (◔☆ Lancés dépendants)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On choisit un nombre uniformément entre 1 et n et on note X le résultat.

On choisit ensuite un nombre uniformément entre 1 et X et on note Y le résultat.

Déterminer $\mathbb{E}[Y]$.

Indication p. 1082

Exercice 26 (◔★ Un temps d'arrêt)
Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

On considère un urne contenant n boules dont $n-2$ blanches et 2 noires.

On tire des boules une à une sans remise jusqu'à obtenir une boule noire.

On note T la variable aléatoire correspondant au nombre de tirages effectués.

1. Déterminer la loi de T.
2. Déterminer $\mathbb{E}[T]$.

Indication p. 1082 · Solution p. 1086

Exercice 27 (◔★ Un calcul de somme de coeffs binomiaux)
Soient $n \in \mathbb{N}$, $p \in [0,1]$ et $X \sim \mathcal{B}(n,p)$.

On définit $Y = \frac{1}{1+X}$.

Déterminer l'espérance de Y.

Solution p. 1088

Exercice 28 (◔★ Nombre de points fixe I)
Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\sigma \sim \mathcal{U}(S_n)$ (c'est à dire que σ est une permutation aléatoire suivant la loi uniforme sur l'ensemble des permutations).

On note X le nombre de points fixes de σ.

Déterminer $\mathbb{E}[X]$.

Exercice 29 (◑★ Nombre de points fixe II)
Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\sigma \sim \mathcal{U}(S_n)$ (c'est à dire que σ est une permutation aléatoire suivant la loi uniforme sur l'ensemble des permutations).

On note X_n le nombre de points fixes de σ.

Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(X_n = k) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-1}\frac{1}{k!}$$

Exercice 30 (◔★ Un maximum sans remise)
On considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n.

On tire **sans remise** 2 boules.

On note X variable aléatoire du **maximum** entre les deux numéros.

1. Pour $k \in [\![1, n+1]\!]$ déterminer
$$\mathbb{P}(X < k).$$
2. En déduire la loi de X.
3. Calculer $\mathbb{E}[X]$ et $\mathrm{Var}(X)$.

Indication p. 1082 · Solution p. 1088

Exercice 31 (◔★ Symétrique d'une binomiale)
Soient $n \in \mathbb{N}$, $p \in [0,1]$ et $X \sim \mathcal{B}(n,p)$.

On définit $Y = n - X$.

Déterminer la loi de Y.

Exercice 32 (◔☆ Lectures d'énoncé)
Dans chacun des cas suivants déterminer la loi de X puis calculer son espérance.

1. On considère un QCM constitué de 20 questions, chaque question a 4 réponses possibles dont exactement 1 correcte. Un élève répond à chaque question « au hasard ». On note X la note totale sachant qu'une réponse correcte rapporte 1 point et qu'une réponse fausse rapporte 0 points.
2. On considère un QCM constitué de 20 questions, chaque question a 4 réponses possibles dont exactement 1 correcte. Un élève répond à chaque question « au hasard ». On note X la note totale sachant qu'une réponse correcte rapporte 1 point et qu'une réponse fausse rapporte $-\frac{1}{2}$ points.
3. Une urne contient 12 boules: 4 rouges, 4 bleues et 4 vertes. On tire avec remise 3 boules et on note X le nombre de boules bleues obtenues.
4. Une urne contient 12 boules: 4 rouges, 4 bleues et 4 vertes. On tire sans remise 3 boules et on note X le nombre de boules bleues obtenues.
5. On considère 3 urnes numérotées 1, 2 et 3 initialement vides et $n \in \mathbb{N}$ boules. Pour chaque boule on choisit de manière uniforme (et indépendante) une urne dans laquelle on la range. On note X le nombre de boules dans l'urne 1.
6. Soit $n \in \mathbb{N}$. On lance n dés à 6 faces équilibrés et on note X le nombre de numéros plus grands que 2 obtenus.
7. Soit $N \in \mathbb{N}$. On considère une urne contenant N boules dont 1 boule noire et $N-1$ boules blanches. On tire une à une des boules sans remises jusqu'à obtenir la boule noire. On note X le nombre de tirages effectués avant d'obtenir la boule noire.

Exercice 33 (◑★ Espérance d'une loi hypergéométrique)
Soient $(N,p) \in \mathbb{N}^* \times [0,1]$ tels que pN est entier et $n \in [\![0,N]\!]$.

Soit X suivant une loi hypergéométrique $\mathcal{H}(n,p,N)$ c'est à dire telle que $X(\Omega) = [\![0,n]\!]$ et

$$\forall k \in [\![0,n]\!], \mathbb{P}(X=k) = \frac{\binom{Np}{k}\binom{N(1-p)}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

Montrer que

$$\mathbb{E}[X] = np.$$

Indication p. 1082

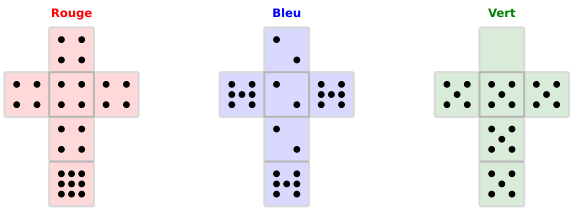
Exercice 34 (◔☆ Presque une binomiale)
Soit $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [0,1]$.

On considère un pièce pipée ayant une probabilité p de donner `face` et $1-p$ de donner `pile`.

On joue au jeu suivant:
- ▹ on lance (de manière indépendante) la pièce n fois,
- ▹ on note m le nombre de `face` obtenus,
- ▹ si $m > 0$ on gagne m stylos,
- ▹ si $m = 0$ on lance un dé équilibré à n faces et on perd autant de stylos que le résultat obtenu.

1. Déterminer la loi de X.
2. Calculer $\mathbb{E}[X]$. Est-ce une bonne idée de jouer à ce jeu ?

Exercice 35 (◔★ Dés non transitifs)
On considère les dés équilibrés et indépendants suivants



On note X_R, X_B, X_V les résultats des lancers des dés rouge, bleu et vert respectivement.

Calculer $\mathbb{P}(X_R > X_B)$, $\mathbb{P}(X_B > X_V)$ et $\mathbb{P}(X_V > X_R)$.

Commenter.

Indication p. 1082

Exercice 36 (◑★ Une inégalité de concentration à la Hoeffding)

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{ch}(x) \leq e^{\frac{x^2}{2}}.$$

1. Soient $X_1, ..., X_n$ des variables i.i.d suivant une loi de Rademacher (c'est à dire que $P(X_1 = 1) = P(X_1 = -1) = \frac{1}{2}$) et $c_1, ..., c_n > 0$. On pose

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} c_k X_k.$$

Montrer que pour tout $y > 0$,

$$\mathbb{P}(S_n \geq y) \leq \exp\left(-\frac{y^2}{2\sum_{k=1}^{n} c_k^2}\right).$$

Indication p. 1082

Indications

Indication 1 · Énoncé p. 1068 (Mesure image)
Juste vérifier la définition.

Indication 2 · Énoncé p. 1068 (Formule du crible)
Travailler par exemple avec des fonction indicatrices en montrant que

$$1-\mathbb{1}_{\bigcup_{k=1}^n A_k}=\prod_{i=1}^n\left(1-\mathbb{1}_{A_i}\right)$$

puis développer et prendre l'espérance.

Indication 3 · Énoncé p. 1068 (Loi hypergéométrique)
On obtient pour $k\in[\![0,n]\!]$

$$\mathbb{P}(X=k)=\frac{\binom{N_1}{k}\binom{N_2}{n-k}}{\binom{N_1+N_2}{n}}$$

Indication 4 · Énoncé p. 1069 (Tirage et maximum)
Une est binomial, l'autre hypergéométrique.

Indication 5 · Énoncé p. 1069 (Loi hypergéométrique et limite)
Une hypergéométrique tend vers une binomiale.

Indication 6 · Énoncé p. 1069 (Probabilités et indicatrice d'Euler)
Il s'agit en fait d'un exercice de dénombrement déguisé.

Indication 7 · Énoncé p. 1069 (Indépendance avec soi-même)
On a $\mathbb{P}(A)=\mathbb{P}(A)^2$.

Indication 8 · Énoncé p. 1070 (Une inégalité liée à CS)
Le plus simple est d'interpréter comme la covariance entre $\mathbb{1}_A$ et $\mathbb{1}_B$.

Alternativement écrire comme une somme et utiliser CS.

Indication 9 · Énoncé p. 1070 (Normalisation)
Avec $\mathbb{P}(\{k\})=\alpha k$, écrire $\sum_{k=0}^n \alpha k=1$.

Indication 10 · Énoncé p. 1070 (Calcul et indépendance)
Au pire découper en 4.

Indication 11 · Énoncé p. 1070 (Copartition)
Par exemple découper en 4.

Indication 12 · Énoncé p. 1071 (Une inégalité non évidente)
Passer au ln et utiliser l'inégalité de Karamata (cf TD convexité).

Solution p. 1084

Indication 14 · Énoncé p. 1071 (Égalité de Cavalieri ou formule des queues)
Au choix, somme double, transformation d'Abel, réécriture des évènements, etc.

Indication 15 · Énoncé p. 1072 (Encore une égalité de Cavalieri)
Faire comme à l'exercice 14.

Indication 16 · Énoncé p. 1072 (Des inégalités déjà connues)

1. IAG (puis espérance)
2. CS
3. convexité
4. IAGH
5. Holder
6. Minkowski
7. Détour

Indication 17 · Énoncé p. 1073 (Quelle inégalité connue)
Par exemple Jensen mais d'autres conviennent.

Indication 18 · Énoncé p. 1073 (Une variante non indépendante)
Remarquer que pour tous $x, y > 0$, $\frac{x}{y} \geq \ln(x) - \ln(y) + 1$ ou de manière équivalente, montrer que $\ln(\mathbb{E}[X/Y]) \geq 0$ par convexité.

Indication 19 · Énoncé p. 1073 (Comment traiter un maximum)

1. $M_r \leq k$ égal $\bigcap_i (X_i \leq k)$
2. Relier $M_r = k$ à $M_r \leq k$ et $M_r \leq k-1$.
3. Deux possibilités (équivalentes, pourquoi ?) utiliser la formule de Cavalieri ou bien l'espérance comme une somme et effectuer une transformation d'Abel.
4. Sommes usuelles.
5. Vérifier que l'espérance croit avec r. De plus la méthode utilisée ici se généralise. Et méditer Cavalieri/Abel.

Indication 20 · Énoncé p. 1074 (De Markov à pleins d'autres inégalités)
Exactement la même preuve que Tchebychev: réécriture d'évènement puis Markov.

Indication 21 · Énoncé p. 1074 (Structure euclidienne et trinôme)
Le minimum est atteint en $\mathbb{E}[X]$ pour une valeur de $\mathrm{Var}(X)$.

Indication 23 · Énoncé p. 1075 (Inégalités de Bathia-Davis et de Popoviciu)
On remarque que quitte à poser $Y = \frac{X-a}{b-a}$ on peut supposer $a = 0$ et $b = 1$.

1. Étude de trinôme.
2. Utiliser l'inégalité puis la croissance de l'espérance.
3. Utiliser l'inégalité appliquée à l'espérance.

Solution p. 1085

Indication 24 · Énoncé p. 1075 (Somme de deux dés truqués)
Passer aux fonctions génératrices et remarquer qu'il y a des racines réelles d'un côté et pas de l'autre.

Indication 25 · Énoncé p. 1075 (Lancés dépendants)
Formule des probabilités totales et somme double.

Indication 26 · Énoncé p. 1076 (Un temps d'arrêt)
On peut travailler par récurrence (ou télescopage) et conditionnement au tirages précédents.

Alternativement travailler plutôt sur les $\mathbb{P}(T > k)$.

Solution p. 1086

Indication 30 · Énoncé p. 1077 (Un maximum sans remise)
1. En notant Y_1 et Y_2 les deux résultats, on a $(X < k) = (Y_1 < k) \cap (Y_2 < k)$ mais attention Y_1 et Y_2 ne sont pas indépendants !
2. Relier $X = k$ à $X < k+1$ et $X < k$.
3. Calcul de somme explicite. Ou bien utiliser Cavalieri 14.

Solution p. 1088

Indication 33 · Énoncé p. 1078 (Espérance d'une loi hypergéométrique)
S'inspirer du calcul de l'espérance d'une binomiale.
▷ Effectuer un calcul de somme explicite.
▷ Décomposer comme une somme astucieuse de v.as plus simples.

Indication 35 · Énoncé p. 1078 (Dés non transitifs)
Au pire faire une table de toutes les possibilités.

Indication 36 · Énoncé p. 1079 (Une inégalité de concentration à la Hoeffding)
1. Attention étudier telle quelle la différence n'est pas le moyen le plus efficace. Au choix:
▷ étudier $x \mapsto \ln(\mathrm{ch}(x)) - \frac{x^2}{2}$,
▷ comparer $\displaystyle\sum_k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$ et $\displaystyle\sum_k \frac{x^{2k}}{2^k k!}$ c'est à dire $(2k)!$ et $2^k k!$.

2. Méthode classique: utiliser l'inégalité de Markov avec la fonction $t \mapsto e^{-\lambda t}$, reconnaître la un produit de fonctions génératrices de Rademacher (d'où ch), majorer par la question précédente puis optimiser un trinôme du second degré en λ.

Solutions

Solution pour l'exercice 12 · Énoncé p. 1071 · Indication p. 1081 (Une inégalité non évidente)
Posons

$$N = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{A_i}.$$

Alors pour tout $k \in [\![1, n]\!]$,

$$\mathbb{P}(C_k) = \mathbb{P}(N \geq k).$$

On constate tout d'abord par la formule de Cavalieri et la linéarité de l'espérance que

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(C_k) &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(N \geq k) \\ &= \mathbb{E}[N] \\ &= \sum_{i=1}^{n} P(A_i).\end{aligned}$$

Soit $m \in [\![1, n]\!]$.

On a alors, de même

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m} \mathbb{P}(C_k) &= \sum_{k=1}^{m} \mathbb{P}(N \geq k) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(\min(N, m) \geq k) \\ &= \mathbb{E}[\min(N, m)].\end{aligned}$$

De plus soit $I \subset [\![1, n]\!]$ tel que $|I| = m$.

On a

$$\begin{aligned}\sum_{i \in I} \mathbb{1}_{A_i} &\leq \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{A_i} \\ \sum_{i \in I} \mathbb{1}_{A_i} &\leq m\end{aligned}$$

et donc

$$\sum_{i \in I} \mathbb{1}_{A_i} \leq \min(N, m).$$

D'où on conclut

$$\begin{aligned}\sum_{i \in I} \mathbb{P}(A_i) &= \mathbb{E}\left[\sum_{i \in I} \mathbb{1}_{A_i}\right] \\ &\leq \mathbb{E}[\min(N, m)].\end{aligned}$$

Quitte à réordonner supposons désormais que $\mathbb{P}(A_1) \geq \mathbb{P}(A_2) \geq \cdots \geq \mathbb{P}(A_n)$.

On a alors la «majorisation» suivante:

$$\forall m \in [\![1,n]\!], \sum_{i=1}^{m} \mathbb{P}(A_i) \leq \sum_{i=1}^{m} \mathbb{P}(C_i)$$
$$\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(C_i)$$

Comme la fonction ln est concave, par l'inégalité de Karamata (à redémontrer, cf TD convexité) on en déduit

$$\sum_{i=1}^{n} \ln(\mathbb{P}(A_i)) \geq \sum_{i=1}^{n} \ln(\mathbb{P}(C_i))$$

et donc par croissance de exp on conclut que

$$\boxed{\prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(C_k) \leq \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)}.$$

Solution pour l'exercice 23 · Énoncé p. 1075 · Indication p. 1081 (Inégalités de Bathia-Davis et de Popoviciu)

1. Étudions le **trinôme du second degré**

$$f : x \mapsto -x^2 + (a+b)x - ab$$

on a $f(x) = (b-x)(a-x)$ est positif sur $[a,b]$ et admet un maximum en $\frac{b+a}{2}$.

[Détailler et faire un schéma]

Comme de plus $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{(b-a)^2}{4}$ on en déduit que

$$\boxed{\forall x \in [a,b], 0 \leq ax + bx - ab - x^2 \leq \left(\frac{a-b}{2}\right)^2}.$$

2. Soit f la fonction définie par $f : x \mapsto ax + bx - ab - x^2$.

On a démontré que

$$\forall x \in [a,b], f(x) \geq 0$$

.

Donc comme

$$\mathbb{P}(X \in [a,b]) = 1$$

on a

$$\mathbb{P}(f(X) \geq 0) = 1$$

et donc, par positivité de l'espérance

$$\mathbb{E}[f(X)] \geq 0$$

c'est à dire,

$$\mathbb{E}\left[(a+b)X - ab - X^2\right] \geq 0$$

i.e, par linéarité de l'espérance,

$$(a+b)\mathbb{E}[X] - ab - \mathbb{E}[X^2] \geq 0$$

ce qui se réécrit

$$\mathbb{E}[X^2] \leq (a+b)\mathbb{E}[X] - ab$$

et donc

$$\mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 \leq (a+b)\mathbb{E}[X] - ab - \mathbb{E}[X]^2.$$

Donc, par König-Huygens et en factorisant

$$\boxed{\mathrm{Var}(X) \leq (b - \mathbb{E}[X])(\mathbb{E}[X] - a)}.$$

Cela se réécrit

$$\mathrm{Var}(X) \leq f(\mathbb{E}[X])$$

et de plus

$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = 1$$

d'où par croissance de l'espérance

$$a \leq \mathbb{E}[X] \leq b$$

c'est à dire $\mathbb{E}[X] \in [a, b]$ et donc

$$f(\mathbb{E}[X]) \leq \left(\frac{a-b}{2}\right)^2.$$

Finalement on a donc bien

$$\boxed{\mathrm{Var}(X) \leq \left(\tfrac{a-b}{2}\right)^2}.$$

Solution pour l'exercice 26 · Énoncé p. 1076 · Indication p. 1082 (Un temps d'arrêt)

1. Une option (ce n'est pas la seule) est de commencer par déterminer $\mathbb{P}(T > k)$.

Soit $k \in [\![0, n]\!]$.

Alors on a $T > k$ ssi on a obtenu k boules blanches pour les k premiers tirages.

On a donc (comme il s'agit d'un tirage sans remise)

$$\mathbb{P}(T > k) = \frac{\binom{n-2}{k}\binom{2}{0}}{\binom{n}{k}}$$

ce qui peut se simplifier en

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T>k) &= \frac{\frac{(n-2)!}{k!(n-2-k)!}}{\frac{n!}{k!(n-k)!}}\\ &= \frac{(n-2)!}{n!}\frac{(n-k)!}{(n-2-k)!}\\ &= \frac{(n-k)(n-k-1)}{n(n-1)}\\ &= \frac{k^2-(2n-1)k+n(n-1)}{n(n-1)}\end{aligned}$$

Par conséquent comme pour tout $k \in [\![1,n]\!]$

$$\mathbb{P}(T=k) = \mathbb{P}(T>k-1) - \mathbb{P}(T>k)$$

on en déduit que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T=k) &= \frac{1}{n(n-1)}(((k-1)^2-k^2)-(2n-1)((k-1)-k)+n(n-1)(1-1))\\ &= \frac{1}{n(n-1)}(-2k+1+(2n-1))\\ &= \frac{2(n-k)}{n(n-1)}\end{aligned}$$

et donc on a la loi de T:

$$\boxed{\forall k \in [\![1,n]\!], \mathbb{P}(T=k) = \tfrac{2(n-k)}{n(n-1)}}.$$

2. On remarque que l'exercice 14 permet de déterminer l'espérance directement à partir des $\mathbb{P}(X>k)$.

Sans utiliser cet exercice, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[T] &= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2(n-k)}{n(n-1)}\right)k\\ &= \frac{2n}{n(n-1)}\left(\sum_{k=1}^{n}k\right) - \frac{2}{n(n-1)}\left(\sum_{k=1}^{n}k^2\right)\\ &= \frac{2}{n-1}\frac{n(n+1)}{2} - \frac{2}{n(n-1)}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\\ &= \frac{(n+1)(3n-(2n+1))}{3(n-1)}\\ &= \frac{(n+1)(n-1)}{3(n-1)}\end{aligned}$$

et donc

$$\boxed{\mathbb{E}[T] = \tfrac{n+1}{3}}.$$

Solution pour l'exercice 27 · Énoncé p. 1076 (Un calcul de somme de coeffs binomiaux)
Par la formule de transfert on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big[\frac{1}{X+1}\Big] &= \sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}(X=k)\frac{1}{k+1}\\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{(n-k)}\frac{1}{k+1}.\end{aligned}$$

On cherche alors à calculer cette somme.

Une première méthode serait de remarque que par la formule dite « du capitaine » on a $(k+1)\binom{n+1}{k+1} = (n+1)\binom{n}{k}$ c'est à dire $\frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k+1}$ et de procéder de manière similaire au calcul de $\mathbb{E}[X]$.

Alternativement considérons la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f : t \mapsto \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{(n-k)}t^k$$

qui s'écrit aussi par la formule du binôme

$$f : t \mapsto ((1-p)+pt)^n.$$

La primitive de f s'annulant en 0 est d'après la première expression

$$F : t \mapsto \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{(n-k)}\frac{t^{k+1}}{k+1}$$

et d'après la seconde, si $p \neq 0$, (primitive d'une composée par une fonction affine)

$$F : t \mapsto \frac{1}{p}\frac{1}{n+1}\big(((1-p)+pt)^{n+1} - (1-p)^{n+1}\big)$$

par conséquent en évaluant en $t = 1$ on obtient

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{(n-k)}\frac{1^{k+1}}{k+1} = \frac{1}{p}\frac{1}{n+1}\big(1-(1-p)^{n+1}\big)$$

c'est à dire si $p \neq 0$

$$\boxed{\mathbb{E}\Big[\frac{1}{X+1}\Big] = \frac{1-(1-p)^{n+1}}{(n+1)p}}$$

et si $p = 0$, $\mathbb{E}\Big[\frac{1}{X+1}\Big] = \frac{1}{1+0} = 1$.

Solution pour l'exercice 30 · Énoncé p. 1077 · Indication p. 1082 (Un maximum sans remise)

1. On note tout d'abord que le maximum est compris entre 2 et n, plus précisément

$$X(\Omega) = [\![2, n]\!]$$

et donc

$$\boxed{\mathbb{P}(X<1) = \mathbb{P}(X<2) = 0}.$$

On note Y_1 et Y_2 les deux numéros tirés.

Soit $k \in [\![2, n]\!]$.

On a $X < k$ si et seulement si $Y_1 < k$ et $Y_2 < k$, c'est à dire si et seulement si on a tiré deux boules de l'ensemble $[\![1, k-1]\!]$.

La probabilité d'un tel évènement est

$$\frac{\binom{k-1}{2}\binom{n-(k-1)}{0}}{\binom{n}{2}} = \frac{(k-1)(k-2)}{n(n-1)}$$

d'où

$$\forall k \in [\![2, n]\!], \mathbb{P}(X < k) = \frac{k^2 - 3k + 2}{n(n-1)}$$

et donc

$$\boxed{\forall k \in [\![2, n]\!], \mathbb{P}(X < k) = \frac{k^2-3k+2}{n(n-1)}}$$

2. On a $X(\Omega) = [\![2, n]\!]$ et pour tout $k \in [\![2, n]\!]$

$$\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X < k+1) - \mathbb{P}(X < k)$$

c'est à dire, d'après la question précédente

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = k) = & \\ \frac{(k+1)^2 - 3(k+1) + 2}{n(n-1)} - \frac{k^2 - 3k + 2}{n(n-1)} & \\ = \frac{(2k+1) - 3}{n(n-1)} & \\ = \frac{2(k-1)}{n(n-1)} &\end{aligned}$$

et donc la loi est

$$\boxed{\forall k \in [\![2, n]\!], \mathbb{P}(X = k) = \frac{2(k-1)}{n(n-1)}}$$

3. On a donc

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= \sum_{k=2}^{n} k\left(\frac{2(k-1)}{n(n-1)}\right) \\ &= \frac{2}{n(n-1)}\left(\sum_{k=2}^{n} k^2 - \sum_{k=2}^{n} k\right) \\ &= \frac{2}{n(n-1)}\left(\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 1\right) - \left(\frac{n(n+1)}{2} - 1\right)\right) \\ &= \frac{n(n+1)}{n(n-1)}\left(\frac{(2n+1) - 3}{6}\right) \\ &= \frac{2(n+1)(2n-2)}{6(n-1)}\end{aligned}$$

et donc

$$\boxed{\mathbb{E}[X] = \frac{2(n+1)}{3}}.$$

On calcule ensuite le moment d'ordre 2

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X^2] &= \sum_{k=2}^{n} k^2 \left(\frac{2(k-1)}{n(n-1)}\right) \\ &= \frac{2}{n(n-1)}\left(\sum_{k=2}^{n} k^3 - \sum_{k=2}^{n} k^2\right)\end{aligned}$$

or (à redémontrer) on a

$$\sum_{k=2}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} - 1$$

et donc on en déduit

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X^2] &= \frac{2}{n(n-1)}\left(\frac{n(n+1)n(n+1)}{4} - 1 - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 1\right) \\ &= \frac{2n(n+1)}{n(n-1)}\left(\frac{3n(n+1) - 2(2n+1)}{12}\right) \\ &= \frac{(n+1)(3n^2 - n - 2)}{6(n-1)}\end{aligned}$$

et comme $3n^2 - n - 2 = (3n+2)(n-1)$ on conclut que

$$\mathbb{E}[X^2] = \frac{(n+1)(3n+2)}{6}.$$

Par conséquent, d'après la formule de König-Huygens

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X) &= \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 \\ &= \frac{(n+1)(3n+2)}{6} - \frac{4(n+1)(n+1)}{9} \\ &= \frac{(n+1)}{18}((9n+6) - (8n+8)) \\ &= \frac{(n+1)(n-2)}{18}\end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\mathrm{Var}(X) = \frac{(n+1)(n-2)}{18}}.$$

Chapitre 30

Fonctions de Plusieurs Variables

Énoncés 1092
Calculs explicites 1092
Fonctions de plusieurs variables 1095
Indications 1103

Énoncés

Pour $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ on note le laplacien de f,

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}.$$

On rappelle qu'une partie $F \subset \mathbb{R}^n$ est fermée ssi $\mathbb{R}^n \setminus F$ est ouvert.

Calculs explicites

Exercice 1 (◔★ Ensemble de définition)
Représenter graphiquement les ensembles de définition des fonctions suivantes.

1. $f_1 : (x, y) \mapsto \exp(x \ln(y))$

2. $f_2 : (x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2 - 2y - 3}$

3. $f_3 : (x, y) \mapsto \ln(x^3 - y^3)$

4. $f_4 : (x, y) \mapsto \dfrac{1}{\sin(xy)}$

Indication p. 1103

Exercice 2 (◔★ Courbes de niveau)
Représenter les courbes de niveau des fonctions suivantes.

1. $f_1 : (x, y) \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

2. $f_2 : (x, y) \mapsto 2\ln(x) - \ln(y)$

3. $f_3 : (x, y) \mapsto x - \cos(2\pi y)$

4. $f_4 : (x, y) \mapsto \dfrac{x + y}{2 + |x - y|}$

Indication p. 1103

Exercice 3 (◔★ Calculs de dérivées partielles)
Calculer, sans se préoccuper de l'ensemble de définition, les dérivées partielles des fonctions suivantes.

1. $f_1 : (x,y) \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x^2+2y^2+4xy}}$

2. $f_2 : (x,y) \mapsto \tan(xy)$

3. $f_3 : (x,y) \mapsto \left(1+\dfrac{x}{y}\right)^y$

4. $f_4 : (x,y) \mapsto 2\arctan\left(\dfrac{y}{1+x^2}\right)$

5. $f_5 : (x,y) \mapsto yx^2+y^3-y^2x+2$

6. $f_6 : (x,y) \mapsto \displaystyle\int_0^{(1+y)} \exp\left(-\frac{t^2}{2x^2}\right) \mathrm{d}t$

Indication p. 1103

Exercice 4 (◔★ Différentes représentations)
Associer à chaque surface représentative la courbe de niveau et l'expression correspondantes.

1. Courbes 3d (voir le schéma)
2. Courbes de niveau (voir le schéma)
3. Expressions de fonctions

▷ $f_1 : (x,y) \mapsto \cos(x+y)$

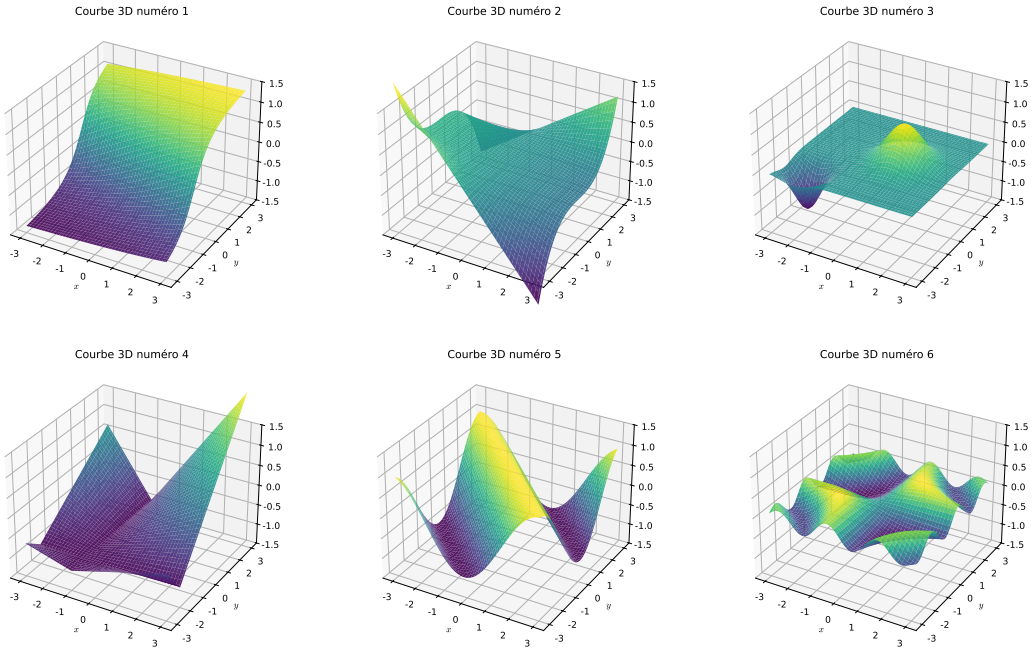
▷ $f_2 : (x,y) \mapsto \frac{1}{6}\left(\left(\frac{y}{2}\right)^3 - 1\right)x$

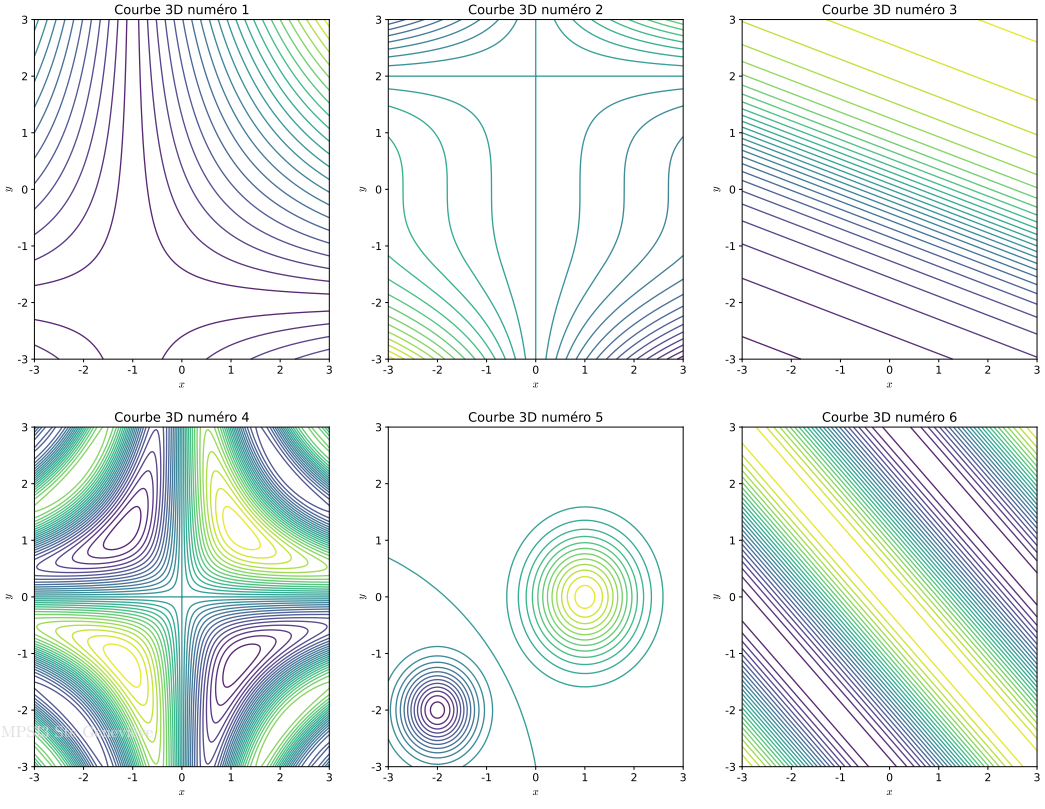
▷ $f_3 : (x,y) \mapsto e^{-((x-1)^2+y^2)} - e^{-2((x+2)^2+(y+2)^2)}$

▷ $f_4 : (x,y) \mapsto \frac{\sin(xy)}{1+\sqrt{x^2+y^2}}$

▷ $f_5 : (x,y) \mapsto \frac{1}{6}\,|y+2|\,|x+1| - 6$

▷ $f_6 : (x,y) \mapsto \arctan\left(\frac{x}{3}+y\right)$





Fonctions de plusieurs variables

Exercice 5 (◔★♠ Autour des fermés)

1. Donner des exemples de parties qui sont fermées et ouvertes de $\mathbb{R}^n$.

Donner des exemples de parties qui ne sont ni fermées ni ouvertes de $\mathbb{R}^n$.

2. Montrer qu'une partie $F \subset \mathbb{R}^n$ est fermée ssi pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset F$ convergeant vers $x \in \mathbb{R}^n$, on a $x \in F$.

Indication p. 1103

Exercice 6 (◔★♠ Opérations et ouverts)

1. Montrer qu'une union quelconque de parties ouvertes de $\mathbb{R}^n$ est ouverte.

2. Montrer qu'une intersection finie de parties ouvertes de $\mathbb{R}^n$ est ouverte.

3. Montrer qu'une intersection quelconque de parties fermées de $\mathbb{R}^n$ est fermée.

4. Montrer qu'une union finie de parties fermées de $\mathbb{R}^n$ est fermée.

5. Donner des exemples d'union infinie de parties ouvertes de $\mathbb{R}^n$ qui n'est pas ouverte et d'une intersection infinie de parties ouvertes de $\mathbb{R}^n$ qui n'est pas ouverte.

Indication p. 1103

Exercice 7 (◔★ Gradient nul)

1. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ telle que $\nabla(f)(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Montrer que f est constante sur $\mathbb{R}^2$.

On dit qu'un ouvert $U \subset \mathbb{R}^2$ est *connexe par arcs* $\mathcal{C}^1$ ssi pour tous $(x_0,y_0),(x_1,y_1) \in U$ il existe une fonction $\varphi \in \mathcal{C}^1([0,1],U)$ telle que $\varphi(0) = (x_0,y_0)$, $\varphi(1) = (x_1,y_1)$.

1. Faire un schéma de la propriété de connexité par arcs $\mathcal{C}^1$.

2. Soit $U \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert connexe par arcs $\mathcal{C}^1$.

Soit $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ telle que $\nabla(f)(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ pour tout $(x,y) \in U$.

Montrer que f est constante sur U.

3. Le résultat précédent reste-t-il vrai pour un ouvert quelconque ?

Indication p. 1103

Exercice 8 (◔★♠ Coordonnées polaires)
Soit $f : (\mathbb{R}^2) \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$.

On pose

$$\begin{aligned}\tilde{f} :]0,+\infty[\times]-\pi,\pi[&\to \mathbb{R}\\ (r,\theta)&\mapsto f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)).\end{aligned}$$

Exprimer $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}$ et $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta}$ en fonction de $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Indication p. 1103

Exercice 9 (◔★ Inégalité des accroissements finis)
Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

On suppose qu'il existe $K \geq 0$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \|\nabla(f)(x)\| \leq K.$$

Montrer que f est K-Lipschitzienne sur $\mathbb{R}^n$, i.e. que

$$\forall x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n, |f(x_0) - f(x_1)| \leq K \parallel x_0 - x_1 \parallel .$$

Indication p. 1103

Exercice 10 (◔★▫ Le tout début de l'analyse vectorielle)
Pour $f = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ on note

- ▹ Le rotationnel de f,

$$\nabla \times f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z} \\ \frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x} \\ \frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y} \end{pmatrix} \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3).$$

- ▹ La divergence de f,

$$\nabla \cdot f = \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z} \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}).$$

- ▹ Le laplacien vectoriel de f,

$$\Delta f = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f_x}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 f_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f_y}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 f_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f_z}{\partial z^2} \end{pmatrix} \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3).$$

On admet que pour $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$, on a $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ et de même

1. Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$.

Montrer que

$$\nabla \times (\nabla(f)) = 0.$$

2. Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$.

Montrer que

$$\div (\nabla \times (f)) = 0.$$

3. Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$.

Montrer que

$$\nabla \times ((\nabla \times (f))) = \nabla(\div (f)) - \Delta f.$$

Indication p. 1103

Exercice 11 (◔★ Fonction d'une seule variable)
Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^1, \mathbb{R})$.

Montrer que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \exists h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^1, \mathbb{R}), \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) = h(x).$$

Indication p. 1104

Exercice 12 (◑★ Pas d'injection en changeant de dimension)
Soit $a \in \mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R} > 0$.

Montrer qu'il n'existe pas de fonction $f \in \mathcal{C}^0(B(a,R),\mathbb{R})$ injective.

Indication p. 1104

Exercice 13 (◔★ Un calcul usuel)
On considère

$$f : (x,y) \mapsto \arctan(x) + \arctan(y) - \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right).$$

1. Déterminer $\mathcal{D}_f$, l'ensemble de définition de f.
2. Montrer que $f \in \mathcal{C}^1\big(\mathcal{D}_f,\mathbb{R}\big)$ et calculer pour tout $(x,y) \in \mathcal{D}_f$, $\nabla(f)(x,y)$.
3. Commenter.
4. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Déterminer, si elle existe,

$$\lim_{y \to \frac{1}{x}} f(x,y).$$

Indication p. 1104

Exercice 14 (◑★ Des solutions autosimilaires de l'équation de la chaleur)
Soit $g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

On pose

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times]0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,t) & \longmapsto & \dfrac{1}{\sqrt{t}} g\left(\dfrac{x}{\sqrt{t}}\right) \end{array}$$

1. Montrer que $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R} \times]0, +\infty[, \mathbb{R})$ et calculer pour $(x,t) \in \mathbb{R} \times]0, +\infty[$,

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)$$

2. Montrer que f vérifie

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times]0, +\infty[, \frac{\partial f}{\partial t}(x,t) - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) = 0$$

ssi g vérifie

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, g''(\xi) + \xi g'(\xi) + g(\xi) = 0.$$

3. Déterminer, à l'aide d'une intégrale, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, y''(\xi) + \xi y'(\xi) + y(\xi) = 0.$$

4. Commenter.

Indication p. 1104

Exercice 15 (◔★ Régression linéaire)
Soient $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}$ non tous égaux et $y_1, ..., y_n \in \mathbb{R}$ des réels.

Pour $a, b \in \mathbb{R}$ on pose

$$\mathcal{E}(a,b) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - (ax_i + b))^2.$$

1. Interpréter $\mathcal{E}(a,b)$.
2. Déterminer les valeurs $a, b \in \mathbb{R}^2$ telles que

$$\nabla(E)(a,b) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

3. Déterminer le minimum de $\mathcal{E}$ et le point (a,b) qui le réalise.

Indication p. 1104

Exercice 16 (◑★ Prolongement sur la diagonale)
Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

On pose $\Delta = \{(t,t), t \in \mathbb{R}\}$ et

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^2 \setminus \Delta &\to \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto \frac{f(x)-f(y)}{x-y}. \end{aligned}$$

1. Montrer que φ admet un prolongement par continuité sur $\mathbb{R}^2$.

On note φ ce prolongement par continuité.

1. Montrer que ce prolongement par continuité est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Indication p. 1104

Exercice 17 (◑★ Fonctions homogènes et équation d'Euler)
Soit $k \in \mathbb{R}$. On dit que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est k-homogène ssi

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in \mathbb{R}_+^*, f(\lambda x) = \lambda^k f(x).$$

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

Montrer que f est k-homogène ssi

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \langle x, \nabla(f)(x)\rangle = k f(x).$$

Indication p. 1104

Exercice 18 (◔★ Équations de Cauchy-Riemann)
On identifie dans cet exercice $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}^2$.

Ainsi une fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto f(z) \end{aligned}$$

est vue comme une fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) &\mapsto \big(f_x(x,y), f_y(x,y)\big). \end{aligned}$$

On note

$$\mathcal{H} = \left\{ f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2) \mid \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial f_x}{\partial x} = \frac{\partial f_y}{\partial y} \text{ et } \frac{\partial f_x}{\partial y} = -\frac{\partial f_y}{\partial x} \right\}.$$

1. Montrer que $\mathcal{H}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2)$.
2. Montrer que $\mathcal{H}$ est stable par produit.
3. Montrer que pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, $P \in \mathcal{H}$ et que $z \mapsto \overline{z} \notin \mathcal{H}$.

Indication p. 1104

Exercice 19 (◑★ Convexité et gradient)
Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$.

1. Donner la définition de f convexe.
2. Montrer que f est convexe ssi pour tout $x,y \in \mathbb{R}^n$

$$\langle \nabla(f)(x) - \nabla(f)(y), x-y \rangle \geq 0.$$

Indication p. 1105

Exercice 20 (◔☆ Un exemple de changement de coordonnées)
On pose $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,x), x \in \mathbb{R}_-\}$.

Déterminer toutes les fonctions $f \in \mathcal{C}^1(U,\mathbb{R})$ telles que

$$\forall (x,y) \in U, x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = \sqrt{x^2+y^2}.$$

Indication p. 1105

Exercice 21 (◉☆ Loi de groupe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$)
Soit $\star$ une loi de groupe sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}\\ (x,y) &\mapsto x\star y\end{aligned}$$

est de classe $\mathcal{C}^1$.

Montrer que $\star$ est commutative.

Indication p. 1105

Exercice 22 (◑★ Laplacien d'une fonction radiale)
Soit $f\in\mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+^*,\mathbb{R})$.

On pose

$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{R}^n\setminus\{0\} &\to \mathbb{R}\\ x &\mapsto f(\|x\|).\end{aligned}$$

Montrer que $\varphi\in\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n\setminus\{0\},\mathbb{R})$ et que pour tout $x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$,

$$\Delta\varphi(x)=\frac{n-1}{\|x\|}f'(\|x\|)+f''(\|x\|).$$

Indication p. 1105

Indications

Indication 1 · Énoncé p. 1092 (Ensemble de définition)
1. $y > 0$,
2. Compléter le carré.
3. Stricte croissance de la fonction cube.
4. Retirer des hyperboles.

Indication 2 · Énoncé p. 1092 (Courbes de niveau)
1. Cercles concentriques.
2. Ensemble de définition et puis $y = x^2$.
3. On sait tracer $y = f(x)$ donc on peut tracer $x = f(y)$.
4. Faire précautionneusement les disjonctions de cas.

Indication 3 · Énoncé p. 1093 (Calculs de dérivées partielles)
Calculs explicites.

Pour l'intégrale, faire un changement de variables pour faire une dépendance dans les bornes de l'intégrale.

Indication 5 · Énoncé p. 1095 (Autour des fermés)
1. Seulement $\mathbb{R}^n$ et $\varnothing$ sont ouvertes et fermées. Prendre un ensemble un peu quelconque, il n'est ni fermé ni ouvert.
2. Rédaction automatique

Indication 6 · Énoncé p. 1095 (Opérations et ouverts)
1. Rédaction automatique.
2. Prendre le min des rayons.
3. Complémentaire d'une intersection.
4. Complémentaire d'une union.

Indication 7 · Énoncé p. 1095 (Gradient nul)
1. Faire des segments et une règle de la chaîne ou bien deux dérivées partielles successives.
2. Faire un petit chemin.
3. Règle de la chaîne pour $f \circ \varphi$.

Indication 8 · Énoncé p. 1096 (Coordonnées polaires)
Formule de la chaîne.

Indication 9 · Énoncé p. 1096 (Inégalité des accroissements finis)
Étudier $t \mapsto f(x_0 + t(x_1 - x_0))$.

Indication 10 · Énoncé p. 1097 (Le tout début de l'analyse vectorielle)
Il s'agit d'un calcul direct.

Ces formules seront extrêmement utiles en électromagnétisme (MP et PSI) et en mécanique des fluides (PSI).

Indication 11 · Énoncé p. 1097 (Fonction d'une seule variable)
Un sens est direct.

Pour l'autre sens juste définir h.

Indication 12 · Énoncé p. 1098 (Pas d'injection en changeant de dimension)
Prendre deux points quelconques.

Si les valeurs sont différentes, faire deux chemins sans intersection, puis le TVI sur les valeurs de f sur les deux chemins.

Vous verrez d'autres arguments pour ce résultat:
- ▷ Des arguments de connexité pour $\mathbb{R}$ comme image d'arrivée.
- ▷ Des arguments bien plus complexes pour R^n vers $\mathbb{R}^p$ avec $n > p$.

Indication 13 · Énoncé p. 1098 (Un calcul usuel)
1. C'est $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\}$.
2. Après simplification on trouve que pour tout $(x,y) \in \mathcal{D}_f$, $\nabla(f)(x,y) = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$.
3. Au moins deux commentaires sont possibles:
- ▷ Le gradient est nul, mais f n'est pas constante sur $\mathcal{D}_f$, par exemple $f(0,0) = 0$ et $f\left(\sqrt{3},\sqrt{3}\right) = \pi$.
- ▷ On retrouve la formule d'addition des arctangentes.

4. On retrouve le $\frac{\pi}{2}$ usuel.

Indication 14 · Énoncé p. 1099 (Des solutions autosimilaires de l'équation de la chaleur)
1. Calcul explicite.

Indication 15 · Énoncé p. 1099 (Régression linéaire)
1. Il s'agit de l'écart quadratique, i.e de la méthode des moindres carrés.
2. Calculer le gradient et obtenir un système 2×2.

Indication 16 · Énoncé p. 1100 (Prolongement sur la diagonale)
1. Prolonger par $\varphi'(x)$ en (x,x).
2. Par exemple Taylor reste-intégral.

Indication 17 · Énoncé p. 1100 (Fonctions homogènes et équation d'Euler)
Dans un sens dériver par rapport à λ la k-homogénéité de f.

Dans l'autre sens dériver par rapport à λ, $\frac{1}{\lambda^k} f(\lambda x)$.

Indication 18 · Énoncé p. 1101 (Équations de Cauchy-Riemann)
1. RAS.
2. Faire le calcul.
3. L'identité est dedans.

De manière surprenante, on peut montrer que $\mathcal{H}$ est en fait … stable par dérivation (méditer sur le sens). Cf cours sur les fonctions holomorphes dans deux ans.

Indication 19 · Énoncé p. 1101 (Convexité et gradient)
Différencier sur le chemin entre x et y.

Indication 20 · Énoncé p. 1101 (Un exemple de changement de coordonnées)
Passer en polaire.

Indication 21 · Énoncé p. 1102 (Loi de groupe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$)
Commencer par différencier l'associativité.

Indication 22 · Énoncé p. 1102 (Laplacien d'une fonction radiale)
Calcul explicite.

Les chapitres suivants ne correspondent pas officiellement à un chapitre du programme de MPSI, mais sont des thèmes proches et parfois classiques.

Chapitre 31

Graphes

Énoncés 1108
Premières définitions 1108
Cliques et anticliques 1108
Chemins et connexité 1109
Coloriages et nombre chromatique 1110
Exercices en vrac 1112
Quelques références pour aller plus loin 1113
Indications 1114
Solutions 1117

Énoncés

Premières définitions

Dans la suite étant donné un graphe $G = (V, E)$ on utilisera les notations suivantes:

- pour $v \in V$, $d(v)$ le degré de V
- $\delta(G) = \min(\{d(v), v \in V\})$ le plus petit degré des sommets du graphe.
- $\Delta(G) = \max(\{d(v), v \in V\})$ le plus grand degré des sommets du graphe.
- $\overline{G}$ le graphe complémentaire à G c'est à dire $\overline{G} = (V, \mathcal{P}_2(V) \setminus E)$.

Pour $n \in \mathbb{N}$ on notera aussi

- N_n le graphe vide à n sommets.
- K_n le graphe complet à n sommets.
- C_n le graphe cycle à n sommets.

Exercice 1 (◔★♠ Lemme des poignées de main)
Étant donné un graphe $G = (V, E)$ on a

$$2\,|E| = \sum_{v \in V} d(v).$$

Indication p. 1114 · Solution p. 1117

Exercice 2 (◔★ Nombre de sommets de degré impair)
Montrer que dans un graphe le nombre de sommets de degré impair est pair.

Indication p. 1114 · Solution p. 1117

Exercice 3 (◔★ Deux sommets de même degré)
Montrer que dans tout graphe il existe deux sommets de même degré.

Indication p. 1114 · Solution p. 1117

Cliques et anticliques

Un ensemble de sommets est appelé *clique* (resp. *anticlique*) ssi le graphe qu'il induit est le graphe complet (resp. le graphe vide).

Exercice 4 (◑★ On enlève l'anticlique)
Soit A une anticlique d'un graphe G.

Montrer que

$$|E| \leq \sum_{v \in V \setminus A} d(v).$$

Indication p. 1114 · Solution p. 1118

Exercice 5 (◑★ Premier petit schéma de triangle)
Montrer que tout graphe à 6 sommets possède soit une clique de 3 sommets soit une anticlique de 3 sommets.

Indication p. 1114 · Solution p. 1118

Exercice 6 (◑★ Tout le monde se connaît au village)
À une fête de village, tout le monde connaît au moins une personne (et on suppose que la relation «connaître» est réflexive).

On suppose que dans tout groupe d'au moins 3 personnes il n'y a jamais exactement deux paires de connaissances.

Montrer que tout le monde se connaît.

Indication p. 1114 · Solution p. 1119

Chemins et connexité

Exercice 7 (◑★ L'un des deux est connexe)
Soit G un graphe.

Montrer que si G est non connexe alors $\overline{G}$ est connexe.

Solution p. 1119

Exercice 8 (◑★ Un certains nombre de sommets implique la connexité)
Soit $G = (V, E)$ un graphe.

Montrer que si $\delta(G) \geq \frac{|V|-1}{2}$ alors G est connexe.

Indication p. 1114 · Solution p. 1119

Exercice 9 (◔★ Un graphe connexe a un certain nombre d'arêtes)
Montrer que si $G = (V, E)$ est un graphe connexe alors $|E| \geq |V| - 1$.

Indication p. 1114 · Solution p. 1120

Exercice 10 (◑☆ Retirer des sommets et connexité)
Soit $G = (V, E)$ un graphe avec $|V| \geq 3$.

Montrer que G est connexe **ssi** il existe deux sommets distincts v_1 et v_2 tels que les graphes G_1' et G_2' obtenus en retirant respectivement v_1 et v_2 sont connexes.

Indication p. 1115 · Solution p. 1121

Exercice 11 (◑★ Cycle de longueur au moins $\delta(G) + 1$)
Soit G un graphe tel que $\delta(G) \geq 2$.

Montrer G possède un cycle de longueur au moins $\delta(G) + 1$.

Indication p. 1115 · Solution p. 1122

Coloriages et nombre chromatique

Étant donné un graphe $G = (V, E)$ un *coloriage* (par sommets) d'un graphe correspond à l'attribution d'une couleur à chaque sommet du graphe.

Formellement un coloriage à m couleurs est donc une application de $c : V \to \mathcal{C}$ où $\mathcal{C}$ est un ensemble à m éléments.

Exercice 12 (◑☆ La majorité de l'autre couleur)
Soit G un graphe.

Montrer que l'on peut colorier le graphe en deux couleurs tel que chaque sommet a une majorité (au sens large) de voisins de l'autre couleur.

Indication p. 1115 · Solution p. 1122

Un coloriage est dit *propre* ssi il n'existe jamais deux voisins de même couleur, c'est à dire formellement pour tout $\{v_1, v_2\} \in V$, $c(v_1) \neq c(v_2)$.

Étant donné G un graphe on note $\chi(G)$ le plus petit nombre de couleurs nécessaires pour obtenir un coloriage propre de G, appelé *nombre chromatique* de G.

Autrement dit il existe au moins un coloriage propre à $\chi(G)$ couleurs et aucun coloriage propre à strictement moins de $\chi(G)$ couleurs.

Pour montrer que $\chi(G) = m$ on procède souvent en deux étapes
- ▹ Montrer que $\chi(G) \leq m$ en construisant explicitement un coloriage propre à m couleur.

▹ Montrer que $\chi(G) \geq m$ en montrant qu'il n'existe aucun coloriage propre à strictement moins de m couleurs, par exemple par l'absurde.

Remarques

▹ Le nombre chromatique $\chi(G)$ est bien défini car il existe toujours au moins un coloriage propre fini.
▹ Pour tout graphe (tel que $V \neq \varnothing$) $G = (V, E)$ on a $1 \leq \chi(G) \leq |E|$; (il faut au moins une couleur et attribué une couleur différente à chaque sommet de G fournit un coloriage correct).
▹ Si H est un sous-grape de G alors $\chi(H) \leq \chi(G)$. En effet tout coloriage propre de G induit un coloriage propre de

Exercice 13 (◔★♠ Nombre chromatique de graphes usuels)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Déterminer $\chi(K_n)$ le nombre chromatique du graphe complet à n sommets.
2. Déterminer $\chi(N_n)$ le nombre chromatique du graphe vide à n sommets.
3. Déterminer $\chi(C_n)$ le nombre chromatique du cycle à n sommets, on pourra distinguer selon la parité de n.

Indication p. 1115

On dit qu'un graphe est biparti si son nombre chromatique est inférieur ou égal à 2.

Exercice 14 (◔★♠ Théorème de König)
Montrer qu'un graphe est biparti ssi tous ses cycles sont de longueurs paires.

Indication p. 1115 · Solution p. 1122

Exercice 15 (◑☆ L'un ou l'autre (ou presque))
Déterminer tous les graphes G tels que G et $\overline{G}$ sont bipartis.

Indication p. 1115 · Solution p. 1123

Exercice 16 (◑★ Premier encadrement grossier)
Soit $G = (V, E)$ un graphe.

Montrer que $\chi(G) \leq \frac{1}{2} + \sqrt{2\,|E| + \frac{1}{4}}$.

Indication p. 1115 · Solution p. 1123

Exercice 17 (◔☆ Un autre encadrement simple)
Soit G un graphe.

Montrer que $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.

Indication p. 1116 · Solution p. 1124

Exercice 18 (◕☆ Théorème de Brooks)
Traiter l'exercice 17.

1. Montrer que si pour un graphe complet K_n, avec n quelconque, ou un graphe cycle C_n, avec n impair, on a $\chi(G) = \Delta(G) + 1$.
2. Montrer que si G est un graphe tel que $\chi(G) = \Delta(G) + 1$ alors G est soit un graphe complet K_n pour un certain n, soit un graphe cycle C_n avec n impair.

Indication p. 1116

Exercice 19 (◔★ Nombre chromatique, cliques et anticliques)
Pour un graphe G on note $\omega(G)$ le maximum des tailles des cliques de G et $\overline{\omega}(G)$ le maximum des tailles des anticliques de G.

Montrer que pour tout graphe $G = (V, E)$,

$$\chi(G) \geq \max\left(\omega(G), \frac{|V|}{\overline{\omega}(G)}\right).$$

Indication p. 1116 · Solution p. 1124

Exercices en vrac

Exercice 20 (◑☆ Un exemple de coloriage d'arêtes)
On dit qu'un coloriage *par arêtes* est propre ssi il n'existe deux arêtes de même couleur ayant une extrémité commune.

Étant donné un graphe G on note $\chi'(G)$ le plus petit nombre de couleurs nécessaires pour colorier par arêtes G.

Montrer que si G est un graphe bipartite alors $\chi'(G) = \Delta(G)$.

Solution p. 1125

Exercice 21 (◑☆ Tournoi des villes 1985)
Soit n un entier naturel.

On considère un tableau $n \times n$ dans lequel on inscrit n fois chaque nombre entre 1 et n.

Montrer qu'il existe une ligne ou une colonne contenant au moins $\lceil \sqrt{n} \rceil$ nombres différents.

Solution p. 1126

Exercice 22 (◑☆ Olympiades de Mathématiques Balkanique 2002)
Soit G un graphe tel que $\delta(G) \geq 3$.

Montrer que G contient au moins un cycle de longueur paire.

Solution p. 1126

Exercice 23 (◑★ Un exercice d'ampoules)
On considère des ampoules placées sur les sommets d'un graphe $G = (V, E)$.

À chaque étape on peut changer l'état (allumée ou éteinte) d'une ampoule et de toutes les ampoules sur les sommets voisins.

Est-il toujours possible de passer en un nombre fini d'étapes de la configuration où toutes les ampoules sont éteintes à la configuration où toutes les ampoules sont allumées ?

Solution p. 1127

Exercice 24 (◑☆ Une application de Mantel)
On considère 2024 points distincts sur le cercle unité.

Montrer qu'il existe au moins 1023132 cordes dont l'angle au centre est inférieur ou égal à $\frac{2\pi}{3}$.

Solution p. 1127

Quelques références pour aller plus loin

- Cours de Pierre Bornstein sur les graphes pour la POFM https://maths-olympiques.fr/wp-content/uploads/2017/09/graphes.pdf
- Cours de Margaret Bilu sur la théorie des graphes https://www.math.u-bordeaux.fr/~mbilu/graphesdeb.pdf et la théorie extrémale des graphes https://www.math.u-bordeaux.fr/~mbilu/graphes.pdf
- Diestel, R., 2000. *Graduate texts in mathematics: Graph theory*. SpringerVerlag.
- Trudeau, R.J., 2013. *Introduction to graph theory*. Dover.
- Chartrand, G. and Zhang, P., 2013. *A first course in graph theory*. Dover.

Indications

Indication 1 · Énoncé p. 1108 (Lemme des poignées de main)
Double compter le nombre d'arêtes.

Solution p. 1117

Indication 2 · Énoncé p. 1108 (Nombre de sommets de degré impair)
Par exemple utiliser 1.

Solution p. 1117

Indication 3 · Énoncé p. 1108 (Deux sommets de même degré)
Par exemple principe des tiroirs.

Solution p. 1117

Indication 4 · Énoncé p. 1109 (On enlève l'anticlique)
Faire un schéma et séparer selon que l'on est rejoint ou non à l'anticlique.

Solution p. 1118

Indication 5 · Énoncé p. 1109 (Premier petit schéma de triangle)
Faire un schéma et montrer que G ou $\overline{G}$ contient une clique de 3 sommets.

Solution p. 1118

Indication 6 · Énoncé p. 1109 (Tout le monde se connaît au village)
Commencer par traduire en termes de graphes.

Solution p. 1119

Indication 8 · Énoncé p. 1109 (Un certains nombre de sommets implique la connexité)
On peut montrer qu'il existe un chemin de longueur au plus 2 entre tous sommets de G.

Solution p. 1119

Indication 9 · Énoncé p. 1110 (Un graphe connexe a un certain nombre d'arêtes)
Faire un schéma. Par exemple par récurrence.

Solution p. 1120

Indication 10 · Énoncé p. 1110 (Retirer des sommets et connexité)
▷ Pour le sens réciproque faire des chemins.
▷ Pour le sens direct, choisir par exemple deux sommets de distance maximale.

Solution p. 1121

Indication 11 · Énoncé p. 1110 (Cycle de longueur au moins $\delta(G)+1$)
Construire récursivement un tel cycle.

Solution p. 1122

Indication 12 · Énoncé p. 1110 (La majorité de l'autre couleur)
Pas forcément besoin de l'explicité, un argument de maximalité suffit.

Solution p. 1122

Indication 13 · Énoncé p. 1111 (Nombre chromatique de graphes usuels)
On obtient:
1. $\chi(K_n)=n$.
2. $\chi(N_n)=1$.
3. $\chi(C_n)=2$ si n est pair et $\chi(C_n)=3$ si n est impair.

Indication 14 · Énoncé p. 1111 (Théorème de König)
Pour le sens réciproque faire un parcours en profondeur.

Solution p. 1122

Indication 15 · Énoncé p. 1111 (L'un ou l'autre (ou presque))
Montrer que ce n'est pas possible si on a beaucoup de sommets.

Solution p. 1123

Indication 16 · Énoncé p. 1111 (Premier encadrement grossier)
Montrer que $\binom{\chi(G)}{2} \leq |E|$.

Solution p. 1123

Indication 17 · Énoncé p. 1112 (Un autre encadrement simple)
Construire un coloriage récursivement.

Solution p. 1124

Indication 18 · Énoncé p. 1112 (Théorème de Brooks)
1. Juste compter.

Indication 19 · Énoncé p. 1112 (Nombre chromatique, cliques et anticliques)
Quel est le nombre chromatique d'une clique ?

Solution p. 1124

Solutions

Solution pour l'exercice 1 · Énoncé p. 1108 · Indication p. 1114 (Lemme des poignées de main)
À chaque arête est associée exactement deux sommets.

Alternativement si on veut rédiger plus précisément, on a par double comptage, d'un côté comme à chaque arête $\{v_1, v_2\}$ est associée exactement deux couples (v_1, v_2).

$$|\{(v_1, v_2) \mid \{v_1, v_2\} \in E\}| = 2\,|E|$$

et de l'autre en notant pour tout $v \in V$, $N(v)$ l'ensemble des voisins de v,

$$\begin{aligned} |\{(v_1, v_2) \mid \{v_1, v_2\} \in E\}| &= \sum_{v_1 \in V} |\{(v_1, v_2) \mid v_2 \in N(v_1)\}| \\ &= \sum_{v_1 \in V} d(v_1) \end{aligned}$$

d'où le résultat.

Solution pour l'exercice 2 · Énoncé p. 1108 · Indication p. 1114 (Nombre de sommets de degré impair)
On a d'après le lemme des poignées de main

$$2|E| = \sum_{v \in V} d(v) = \sum_{\substack{v \in V \\ d(v) \text{ pair}}} d(v) + \sum_{\substack{v \in V \\ d(v) \text{ impair}}} d(v)$$

et donc modulo 2,

$$0 \equiv \sum_{v \in V} d(v) = \sum_{\substack{v \in V \\ d(v) \text{ pair}}} d(v) + \sum_{\substack{v \in V \\ d(v) \text{ impair}}} d(v)\ [2]$$

ou encore

$$0 \equiv \sum_{v \in V} d(v) = \sum_{\substack{v \in V \\ d(v) \text{ pair}}} 0 + \sum_{\substack{v \in V \\ d(v) \text{ impair}}} 1\ [2]$$

c'est à dire

$$|\{v \in V \mid d(v) \text{ impair }\}| \equiv 0[2].$$

Solution pour l'exercice 3 · Énoncé p. 1108 · Indication p. 1114 (Deux sommets de même degré)
Si tous les sommets sont de degré non nul, alors comme les degrés sont dans $[\![1, n-1]\!]$ et au nombre de n, par le principe des tiroirs il en existe deux de même degré.

Sinon on note G' le sous-graphe obtenu à partir de G en retirant tous les sommets de degré 0.

Alors dans G' deux sommets sont de même degré, et donc de même degré dans G (car on n'a retiré que des sommets sans voisins).

Solution pour l'exercice 4 · Énoncé p. 1109 · Indication p. 1114 (On enlève l'anticlique)
On partitionne les sommets de G en $V = A \sqcup (V \setminus A)$, ce qui revient à colorier d'une couleur les sommets dans A et d'une autre les autres sommets, par exemple en vert les sommets de A et en bleu les sommets de $V \setminus A$.

On note aussi pour un sommet v, $d_{V\setminus A}(v)$ le nombre de voisins bleus et $d_A(v)$ le nombre de voisins verts.

On compte ensuite le nombre d'arêtes selon la « couleur » de ses extrémités.

- Le nombre d'arêtes dont les deux sommets sont verts est de 0 par définition des anticliques.
- Le nombre d'arêtes reliant un sommet bleu à un sommet vert est par définition (en sommant sur les bleus, comme dans la preuve du lemme des poignées de main)
$$\sum_{v\in V\setminus A} d_A(v)$$
- Le nombre d'arêtes dont les deux sommets sont bleus est le degré dans le graphe induit par $V \setminus A$ c'est à dire par le lemme des poignées de main
$$\frac{1}{2}\sum_{v\in V\setminus A} d_{V\setminus A}(v)$$

au final on a donc

$$|E| = 0 + \sum_{v\in V\setminus A} d_A(v) + \frac{1}{2}\sum_{v\in V\setminus A} d_{V\setminus A}(v)$$

et comme les degrés sont positifs et que

$$\sum_{v\in V\setminus A} d(v) = \sum_{v\in V\setminus A} d_A(v) + \sum_{v\in V\setminus A} d_{V\setminus A}(v)$$

on en déduit donc le résultat.

Solution pour l'exercice 5 · Énoncé p. 1109 · Indication p. 1114 (Premier petit schéma de triangle)
Cela revient à montrer que G contient une clique à 3 sommets ou $\overline{G}$ le graphe complémentaire à G contient une clique à 3 sommets.

Soit v_0 un sommet quelconque.

Comme il y a 5 autres sommets, au moins 3 sommets sont voisins de v_0 ou au moins 3 sommets ne sont pas voisins de v_0.

Quitte à considérer $\overline{G}$ on peut supposer qu'au moins trois sommets sont voisins de v_0. Notons v_1, v_2, v_3 trois tels sommets.

Si $\{v_1, v_2, v_3\}$ forme une anticlique c'est terminé.

Sinon, si par exemple v_1 et v_2 sont voisins alors $\{v_0, v_1, v_2\}$ forme une clique.

On procède de même si v_2 et v_3 sont voisins ou si v_3 et v_1 sont voisins.

Dans tous les cas on a bien une clique de 3 sommets ou une anticlique de 3 sommets.

Solution pour l'exercice 6 · Énoncé p. 1109 · Indication p. 1114 (Tout le monde se connaît au village)
Cela revient à montrer qu'un graphe dont aucun sommet n'est de degré 0 et donc aucun graphe induit possède exactement deux arêtes est un graphe complet.

Supposons par l'absurde qu'il existe deux sommets v_1 et v_2 qui ne sont pas voisins.

Par hypothèse il existe v_1' voisin de v_1.

- ▹ Si v_1' est voisin de v_2 alors en considérant le graphe induit par $\{v_1, v_2, v_1'\}$, par hypothèse v_1 et v_2 sont voisins. Absurde.
- ▹ Donc v_1' n'est pas voisin de v_2.

Par le même raisonnement il existe v_2' un sommet voisin de v_2 qui n'est pas voisin de v_1.

De plus en considérant le graphe induit par (par exemple) $\{v_1, v_1', v_2'\}$, v_1' et v_2' ne sont pas voisins.

Mais alors en considérant le graphe induit par $\{v_1, v_2, v_1', v_2'\}$ on obtient un sous-graphe constitué de deux arêtes. C'est donc absurde.

Solution pour l'exercice 7 · Énoncé p. 1109 (L'un des deux est connexe)
Soit G un graphe non connexe.

Il possède alors au moins deux composantes connexes, et en particuliers il existe un coloriage de G en deux couleurs (par exemple bleu et vert) tel qu'aucun sommet d'une couleur n'est dans la même composante connexe qu'un sommet d'une autre couleur (et que les deux couleurs apparaissent).

Étant donné deux sommets v_1 et v_2 on procède alors par disjonction de cas.

- ▹ Si v_1 et v_2 sont deux couleurs différentes, ils ne sont pas dans une composante connexe commune, en particulier ne sont pas voisins dans G et donc sont voisins dans $\overline{G}$ et donc en particulier dans la même composante connexe dans $\overline{G}$.
- ▹ Si v_1 et v_2 de même couleur. Sans perte de généralité supposons qu'ils soient tous les deux bleus.

  Soit w un sommet vert (existe bien par hypothèse).

  Alors de même que précédemment v_1 et w sont voisins dans $\overline{G}$ et v_2 et w sont voisins dans $\overline{G}$. Par conséquent (v_1, w, v_2) est un chemin de v_1 à v_2 dans $\overline{G}$.

Et donc dans tous les cas il existe un chemin entre v_1 et v_2.

On remarque que l'on a en fait montré beaucoup plus fort: non seulement il existe un chemin mais on peut s'arranger pour que ce chemin soit de longueur 1 ou 2 (selon que v_1 et v_2 sont ou non dans la même composante connexe de G).

Solution pour l'exercice 8 · Énoncé p. 1109 · Indication p. 1114 (Un certains nombre de sommets implique la connexité)
On va même montrer qu'il existe un chemin de longueur au plus 2 entre tous sommets de G.

Soient v_1 et v_2 deux sommets distincts de G.

On procède par disjonction de cas.

- Si v_1 et v_2 sont voisins ils sont reliés par un chemin de longueur 1.
- Sinon comme $d(v_1) \geq \frac{n-1}{2}$ et $d(v_2) \geq \frac{n-1}{2}$, en particulier

$$d(v_1) + d(v_2) \geq n - 1.$$

Or il y a $n-2$ sommets différents de v_1 et v_2, d'où le nombre de sommets voisins de v_1 et de v_2 est au moins de 1.

Avec w un tel sommet on a donc le chemin (v_1, w, v_2) de longueur 2 qui relie v_1 et v_2.

Dans tous les cas v_1 et v_2 sont reliés par un chemin de longueur au plus 2.

On remarque que pour $n \geq 1$, si on met deux copies de K_n « côte-à-côte » alors on obtient un graphe non connexe tel que $\delta(G) = n - 1 = \frac{|V|-2}{2}$ et par conséquent l'inégalité précédente est optimale.

Solution pour l'exercice 9 · Énoncé p. 1110 · Indication p. 1114 (Un graphe connexe a un certain nombre d'arêtes)
Pour tout entier naturel n on note $\mathcal{H}_n$ la proposition «tout graphe connexe admettant n sommets admet au moins $n-1$ arêtes».

- **Initialisation**

Pour $n = 1$ c'est bien le cas.

- **Hérédité**

Soit n un entier naturel, et supposons $\mathcal{H}_n$ est vraie.

Soit $G = (V, E)$ tel que $|V| = n + 1$.

On procède par disjonction de cas.

- Si tous les sommets sont de degrés plus grands que 2 alors, par le lemme des poignées de main

$$2\ |E| = \sum_{v \in V} d(v) \geq \sum_{v \in V} 2 = 2|V| = 2(n+1)$$

donc $|E| \geq n + 1 \geq (n+1) - 1$.

- Si il existe un sommet de degré 1 (comme le graphe est connexe avec au moins 2 sommets, en particulier tous les degrés sont non nuls). Notons v_0 un tel sommet.

Notons $G' = (V', E')$ le sous-graphe obtenu en retirant le sommet v_0.

Alors comme $|V'| = (n+1) - 1 = n$ par hypothèse de récurrence, $|E'| \geq n - 1$. Et donc $|E| = |E'| + d(v_0) \geq (n-1) + 1 = n$ vérifie bien $|E| \geq (n+1) - 1$.

Dans tous les cas $|E| \geq (n+1) - 1$.

D'où $\mathcal{H}_{n+1}$.

- **Conclusion**

On a montré $\mathcal{H}_1$ et que pour tout entier n, $\mathcal{H}_n$ implique $\mathcal{H}_{n+1}$, donc par récurrence pour tout n, $\mathcal{H}_n$.

Solution pour l'exercice 10 · Énoncé p. 1110 · Indication p. 1115 (Retirer des sommets et connexité)
On procède par double implication.

▷ **Sens réciproque**

Supposons qu'il existe deux sommets distincts v_1 et v_2 tels que les graphes G_1' et G_2' obtenus en retirant respectivement v_1 et v_2 sont connexes, et fixons v_1 et v_2 de tels sommets.

Soient u et w deux sommets de G. Montrons par disjonction de cas qu'il existe un chemin de u à w.

- ▷ Si $\{u,w\} = \{v_1, v_2\}$. Comme $|V| \geq 3$ il existe un sommet $\omega \in V$ distincts de v_1 et v_2 et donc sommet de G_1' et G_2'.

  Comme G_1' est connexe il existe un chemin de v_2 à ω dans G_1' et donc dans G.

  De même comme G_2' est connexe il existe un chemin de ω à v_1 dans G_2' et donc dans G.

  En les concaténant on obtient alors un chemin de v_2 à v_1.
- ▷ Sinon sans perte de généralité on peut supposer $v_1 \notin \{u,w\}$. Comme G_1' est connexe il existe un chemin de u à w dans G_1' et donc dans G.

Dans tous les cas il existe un chemin de u à w, et ce quels que soient les sommets et donc G est connexe.

▷ **Sens direct**

Comme l'ensemble des distances entre sommets est fini il existe un couple (v_1, v_2) de distance maximale c'est à dire tel que

$$\mathrm{dist}(v_1, v_2) = \max\big(\{\mathrm{dist}(u_1, u_2), (u_1, u_2) \in V^2\}\big).$$

(Cette distance est appelée diamètre du graphe)

Montrons que ces sommets conviennent.

Sans perte de généralité montrons que G_1' obtenu en enlevant v_1 de G est connexe.

Soient u et w deux sommets de G (distincts de v_1). On cherche à montrer qu'il existe un chemin entre u et w dans G_1', c'est à dire un chemin entre u et w dans G ne passant par v_1.

Comme G est connexe il existe un chemin entre u et v_2 et un chemin entre w et v_2. Considérons les plus courts chemins parmi ces chemins que l'on note C_u et C_w.

Si v_1 est sur le chemin de C_u on a $\mathrm{dist}(v_1, v_2) < \mathrm{dist}(u, v_2)$ ce qui contredit la maximalité. Donc v_1 n'est pas sur C_u. De même v_1 n'est pas sur C_w.

Mais en concaténant C_u et C_w on obtient alors un chemin entre u et w ne passant pas par v_1.

Solution pour l'exercice 11 · Énoncé p. 1110 · Indication p. 1115 (Cycle de longueur au moins $\delta(G)+1$)
Posons $k=\delta(G)$; par hypothèse $k\geq 2$. On construit récursivement une suite de sommets $v_1, v_2, ...$ où chaque v_{r+1} est un voisin de v_r :

- On choisit v_1 un sommet quelconque du graphe.
- On suppose construits $v_1, ..., v_r$.
  - Si $r\leq k$, comme v_r a au moins k voisins l'un de ces voisins n'est pas dans l'ensemble $\{v_1, ..., v_{r-1}\}$ de cardinal $r-1<k$. On prend pour v_{r+1} un tel sommet.
  - Si $r>k$, comme v_r a au moins k voisins l'un de ces voisins n'est pas dans l'ensemble $\{v_{r-k+1}, ..., v_{r-1}\}$ de cardinal $k-1<k$. On prend pour v_{r+1} un tel sommet.

Le procédé se poursuit indéfiniment alors que le graphe est fini : par le principe des tiroirs, un sommet finit par se répéter. Soit j le plus petit indice tel que $v_j\in\{v_1, ..., v_{j-1}\}$, et soit $i<j$ tel que $v_i=v_j$; les sommets $v_1, ..., v_{j-1}$ sont alors deux à deux distincts.

Tant que $r\leq k$, le premier cas rend v_{r+1} distinct de tous les sommets déjà choisis ; la première répétition vérifie donc $j-1>k$, et v_j provient du second cas : il est distinct de ses k prédécesseurs $v_{j-k}, ..., v_{j-1}$.

Si l'on avait $j-i\leq k$, alors $i\in\{j-k, ..., j-1\}$, d'où $v_i\neq v_j$, ce qui contredit $v_i=v_j$. Donc $j-i>k$, et

$$(v_i, v_{i+1}, ..., v_j)$$

est un cycle de longueur $j-i\geq k+1=\delta(G)+1$.

Solution pour l'exercice 12 · Énoncé p. 1110 · Indication p. 1115 (La majorité de l'autre couleur)
L'ensemble des coloriages possibles est fini (il y en a même $2^{|V|}$), parmi cet ensemble considérons un coloriage maximisant le nombre d'arêtes « bicolores » (dont les deux extrémités sont de couleurs différentes).

Montrons qu'un tel coloriage convient.

Supposons par l'absurde qu'un sommet a strictement plus de voisins de sa couleur que de voisins de couleur différente.

En changeant la couleur de ce sommet on augment alors strictement le nombre d'arêtes bicolores ce qui contredit l'hypothèse de maximalité.

D'où le résultat.

Solution pour l'exercice 14 · Énoncé p. 1111 · Indication p. 1115 (Théorème de König)
On procède par double implication.

- **Sens direct** Considérons un graphe biparti G et un cycle $v_1, ..., v_{r-1}, v_r=v_1$ de longueur r.

  Comme $\chi(G)\leq 2$ on peut colorier G en deux couleurs, disons bleu et vert.

Sans perte de généralité v_1 est bleu, d'où v_2 est vert, et de même par récurrence immédiate v_k est bleu si k est impair et vert si k est pair. Comme $v_r = v_1$ on en déduit que r est pair.

Alternativement on aurait pu procéder par contraposée, si un graphe G possède un cycle de longueur impaire, on a donc C_n est un sous-graphe de G pour un certain n impair, et donc $\chi(G) \geq \chi(C_n) = 3 > 2$.

▷ **Sens réciproque**

Soit G un graphe dont tous les cycles sont de longueurs paires.

Quitte à colorier chaque composante connexe on peut se ramener au cas où G est connexe.

On propose ici un algorithme pour construire un tel coloriage.

Fixons un sommet arbitraire w.

Pour tout sommet v on note $\text{dist}(w, v)$ la longueur du plus petit chemin de v à w (existe par connexité).

On colorie alors en bleu les sommets de distance minimale paire et en vert les sommets de distance minimale impaire.

Supposons par l'absurde qu'il existe deux sommets de même couleurs voisins.

Si ce sont deux sommets verts v_1 et v_2 alors en considérant un chemin minimal de w à v_1 puis une arête de v_1 à v_2 puis un chemin minimal de v_2 à w on obtient un cycle de longueur

$$\underbrace{\text{dist}(w, v_1)}_{\text{impair}} + 1 + \underbrace{\text{dist}(w, v_2)}_{\text{impair}}$$

qui est donc impaire. Absurde.

De même pour deux sommets bleus.

Par conséquence on obtient bien un coloriage en deux couleurs tel qu'aucun sommet n'est de la même couleur que son voisin, c'est à dire $\chi(G) \leq 2$.

Solution pour l'exercice 15 · Énoncé p. 1111 · Indication p. 1115 (L'un ou l'autre (ou presque))

Montrons que si $G = (V, E)$ vérifie $|V| \geq 3$ alors $\chi(G) > 2$ ou $\chi\left(\overline{G}\right) > 2$.

Soit $G = (V, E)$ un graphe tel que $|V| \geq 3$ et supposons que $\chi(G) \leq 2$. Colorions G en deux couleurs, par exemple bleu et vert et notons V_b et V_v les sommets de couleurs respectives bleu et vert.

Comme $|V| = |V_b| + |V_v| \geq 5$ on peut supposer sans perte de généralité que $|V_b| \geq 3$.

Mais comme le graphe induit par V_b dans $\overline{G}$ est $K_{|V_b|}$ on a donc

$$\chi\left(\overline{G}\right) \geq \chi\left(K_{|V_b|}\right) > 2.$$

Il reste donc à regarder le cas $|V| \leq 4$ ce qui fait un nombre fini de cas à traiter (cf schémas).

Solution pour l'exercice 16 · Énoncé p. 1111 · Indication p. 1115 (Premier encadrement grossier)
Montrons tout d'abord que $\binom{\chi(G)}{2} \leq |E|$.

Le cas $\chi(G) = 1$ étant immédiat on suppose désormais $\chi(G) \geq 2$.

Considérons un coloriage propre avec $\chi(G)$ couleurs.

Si un couple de couleurs distinctes n'est pas présent parmi les arêtes, par exemple si il n'y a aucune arête dont les extrémités sont de couleurs 1, 2 alors en coloriant tous les sommets de couleurs 1 ou 2 en la couleur 1 on obtient un coloriage propre.

Par conséquent on obtient un coloriage propre avec $\chi(G) - 1$ couleurs ce qui est absurde.

On a donc montré que tous les couples de couleurs distinctes sont présents parmi les arêtes, et comme il y en a $\binom{\chi(G)}{2}$ on a bien

$$\binom{\chi(G)}{2} \leq |E|.$$

On rappelle que pour tout entier N, $\binom{N}{2} = \frac{N(N-1)}{2}$. Donc le résultat précédent se réécrit

$$\chi(G)^2 - \chi(G) \leq 2\ |E|$$

et une étude de trinôme du second degré, par exemple en mettant l'inégalité sous la forme canonique

$$\left(\chi(G) - \frac{1}{2}\right)^2 \leq 2|E| + \frac{1}{4}$$

et en constatant que $\chi(G) \geq \frac{1}{2}$, par croissance de la fonction racine sur $\mathbb{R}_+$,

$$\chi(G) \leq \frac{1}{2} + \sqrt{2\ |E| + \frac{1}{4}}.$$

On remarque par ailleurs que pour tout graphe complet K_n, $\chi(K_n) = n$ et $|E| = \frac{n(n-1)}{2}$ et il y a alors égalité. L'inégalité est donc optimale.

Solution pour l'exercice 17 · Énoncé p. 1112 · Indication p. 1116 (Un autre encadrement simple)
On se donne $\Delta(G) + 1$ couleurs.

On choisit une énumération des sommets, et on les colorie récursivement.

Pour chaque sommet on le colorie d'une couleur qui n'est pas utilisée par ses voisins déjà coloriés. Comme il y a au moins $\Delta(G) + 1 - \Delta(G)$ possibilités c'est toujours possible.

Par construction le coloriage obtenu est propre.

Solution pour l'exercice 19 · Énoncé p. 1112 · Indication p. 1116 (Nombre chromatique, cliques et anticliques)
Soit $G = (V, E)$ un graphe.

▷ Comme G admet une clique de taille $\omega(G)$, $K_{\omega(G)}$ est un sous-graphe de G.

Donc

$$\chi(G) \geq \chi\Big(K_{\omega(G)}\Big) = \omega(G).$$

▷ Considérons un coloriage en $\chi(G)$ couleurs notées $1, 2, ..., \chi(G)$.

Alors pour tout i l'ensemble des sommets de couleur i, noté V_i forme une anticlique.

Donc

$$\sum_{i\in[\![1,\chi(G)]\!]} |V_i| = |V|$$

et comme

$$\sum_{i\in[\![1,\chi(G)]\!]} |V_i| \leq \chi(G)\overline{\omega}(G)$$

on obtient bien

$$\chi(G) \geq \frac{|V|}{\overline{\omega}(G)}.$$

Donc

$$\chi(G) \geq \max\left(\omega(G), \frac{|V|}{\overline{\omega}(G)}\right).$$

On remarque par ailleurs que l'égalité est atteinte pour les graphes complets K_n on de manière générale des graphes multi-parti $K_{m,...,m}$.

Solution pour l'exercice 20 · Énoncé p. 1112 (Un exemple de coloriage d'arêtes)
Tout d'abord quel que soit le graphe on a $\chi'(G) \geq \Delta(G)$ (car les arêtes ayant pour extrémité un sommet commun de degré maximal sont toutes de couleurs différentes).

On procède par **récurrence sur le nombre d'arêtes**.

Plus précisément pour $m \in \mathbb{N}$ on note $\mathcal{H}_m$ la propriété «Pour tout graphe bipartite $G = (V, E)$ tel que $|E| = m$, on a $\chi'(G) = \Delta(G)$.»

▷ **Initialisation**

Pour $m = 0$, si un graphe G n'a pas d'arêtes on a $\Delta(G) = 0$ et $\chi'(G) = 0$.

▷ **Hérédité**

Soit $m \in \mathbb{N}$, on suppose $\mathcal{H}_m$.

Soit $G = (V, E)$ tel que $|E| = m + 1$.

On choisit une arête $\{v_1, v_2\}$ et on considère H le sous-graphe obtenu en retirant l'arête $\{v_1, v_2\}$.

Comme $\Delta(H) \leq \Delta(G)$ et H a m arêtes, on a $\chi'(H) \leq \Delta(G)$ par hypothèse de récurrence.

On considère un coloriage par arêtes de H en $\Delta(G)$ couleurs.

On note $\mathcal{C}_1$ (resp. $\mathcal{C}_2$) l'ensemble des couleurs non prises par les arêtes ayant pour extrémité v_1.

Comme v_1 et v_2 sont de degré au plus $\Delta(G)-1$ dans H (car de degré au plus $\Delta(G)$ dans G et on a retiré une arête), et que $|\mathcal{C}_1| = \Delta(G) - d_H(v_1)$ on obtient que $\mathcal{C}_1$ est non vide. De même pour $\mathcal{C}_2$.

- Si $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 \neq \varnothing$ il suffit de colorier $\{v_1, v_2\}$ d'une de ces couleurs communes.
- Sinon soient $c_1 \in \mathcal{C}_1$ et $c_2 \in \mathcal{C}_2$.

  On considère alors le plus long chemin, dans H, issu de v_1 et dont les couleurs alternent entre c_2 et c_1.

  Comme le graphe est **bipartite** ce chemin ne repasse pas deux fois par le même sommet (faire un dessin pour s'en convaincre en séparant clairement les deux composantes), car si un chemin passe deux fois par le même sommet comme les couleurs des arêtes alternent on peut en déduire un cycle de longueur impaire ce qui est impossible.

  Pour la même raison le chemin ne peut pas passer par v_2.

  En intervertissant les couleurs c_1 et c_2 pour toutes les arêtes du chemin, par maximalité dudit chemin on obtient toujours un coloriage propre de H.

  Dans ce nouveau coloriage v_1 et v_2 sont coloriés de la couleur c_2 et on se ramène donc au cas précédent.

- **Conclusion**

Par récurrence, pour tout $m \in \mathbb{N}$, tout graphe biparti G ayant m arêtes admet un coloriage propre en au plus $\Delta(G)$ couleurs donc pour tout graphe G

$$\chi'(G) \leq \Delta(G)$$

Solution pour l'exercice 21 · Énoncé p. 1113 (Tournoi des villes 1985)

On considère un graphe bipartite avec d'un côté des sommets représentant les nombres, $k_1, ..., k_n$ et de l'autre côté des sommets représentant les lignes et colonnes $\ell_1, ..., \ell_n$, $c_1, ..., c_n$.

Pour i et j entre 1 et n on trace une arête entre le sommet k_i et celui ℓ_j (resp. k_i et c_j) ssi k_i apparaît sur la ligne ℓ_j (resp. sur la colonne c_j).

On cherche donc à montrer que parmi les sommets $\ell_1, ..., \ell_n, c_1, ..., c_n$ au moins un est de degré supérieur à $\sqrt{n}$.

Par principe des tiroirs il suffit de montrer que le nombre d'arêtes est supérieur à $2n \times \sqrt{n}$.

Considérons maintenant un sommet k_i correspondant à un nombre i.

Notons $L(i)$ l'ensemble des lignes où i apparaît et $C(i)$ l'ensemble des colonnes où i apparaît.

En considérant le sous-tableau de lignes $L(i)$ et de colonnes $C(i)$ on a comme i apparaît n fois $L(i) \times C(i) \geq n$.

Par IAG on en déduit $L(i) + C(i) \geq 2\sqrt{n}$. Donc $\deg(k_i) = L(i) + C(i) \geq 2\sqrt{n}$ et donc le nombre de sommets est au moins $n \times 2\sqrt{n}$.

D'où le résultat.

Solution pour l'exercice 22 · Énoncé p. 1113 (Olympiades de Mathématiques Balkanique 2002)
On considère un chemin de longueur maximale, que l'on note $(v_1, v_2, ..., v_r)$.

Comme $d(v_1) \geq 3$ il existe au moins deux voisins de v_1 distincs de v_2.

Si ces sommets ne sont pas dans le chemin on pourrait étendre le chemin ce qui contredit la maximalité.

On peut donc choisir i, j tels que $2 < i < j \leq r$ et v_i et v_j voisins de v_1.

On considère les trois cycles $(v_1, ..., v_i, v_1)$, $\big(v_1, ..., v_j, v_1\big)$ et $\big(v_1, v_i, v_{i+1}, ..., v_j, v_1\big)$. La somme de leur longueur est $i + j + (j - i + 2)$ qui est pair donc au moins un est de longueur paire.

Solution pour l'exercice 23 · Énoncé p. 1113 (Un exercice d'ampoules)
Montrons par récurrence sur n que cela est bien possible pour tout graphe possédant n sommets (et on décrit par la même occasion un algorithme récursif de résolution).

- **Initialisation**

  Pour $n = 1$ c'est bien le cas.
- **Hérédité**

  Soit n un entier naturel, supposons que c'est possible pour tout graphe possédant n sommets de changer l'état de toutes les ampoules.

  Soit $G = (V, E)$ un graphe de $n + 1$ sommets.

  Pour tout sommet $v \in V$, par hypothèse de récurrence sur le graphe obtenu en retirant v il est possible de changer d'état l'ensemble des ampoules sur les sommets différents de v, par une suite d'opérations notée O_v.

  On procède par disjonction de cas.

  - Si il existe un sommet v tel qu'en faisant la suite d'opérations O_v l'état de la lampe située en v est aussi changé alors c'est bon.
  - Sinon pour tout v, après la suite d'opérations O_v le sommet v est inchangé.

    On procède de nouveau par disjonction de cas sur la parité de n.
    - Si n est pair, en appliquant tous les O_v pour $v \in V$, chaque ampoule change d'état $n - 1$ fois et comme $n - 1$ est impair chaque ampoule change donc d'état.
    - Si n est impair, comme la somme des degrés est paire (par le lemme des poignées de main), il existe au moins un sommet de degré pair. Notons w un tel sommet. En appliquant O_v pour chaque sommet voisin de w on obtient alors que toutes les ampoules changent d'état sauf celles situées en w et sur les sommets voisins de w.

      Il reste alors à changer l'état de w et de ses voisins pour conclure.

Solution pour l'exercice 24 · Énoncé p. 1113 (Une application de Mantel)
Posons $n = 2024$.

On considère le graphe $G = (V, E)$ dont les sommets sont les points, et tel que deux sommets sont reliés ssi l'angle au centre de la corde associée est strictement supérieur à $\frac{2\pi}{3}$.

Alors si on considère un triangle constitué de trois cordes, comme la somme des angles au centre des cordes est de 2π, les trois angles au centre ne peuvent pas tous être strictement supérieurs à $\frac{2\pi}{3}$.

Le graphe G n'admet donc pas de triangle, et par le théorème de Mantel $|E| \leq \frac{n^2}{4}$.

Donc le nombre d'arêtes dans $\overline{G}$ est d'au moins $\binom{n}{2} - \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$ ce qui donne le résultat.