Fiche non-exhaustive de DLs usuels

Au voisinage de 0 on a:

Petits ordres essentiels

- $$\boxed{\frac{1}{1-x} = 1 + x + o_{x\to 0}(x)}$$
- Pour $\alpha \in \mathbb{R}$,
$$\boxed{(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o_{x\to 0}(x)}$$
- $$\boxed{e^x = 1 + x + o_{x\to 0}(x)}$$
- $$\boxed{\ln(1+x) = x + o_{x\to 0}(x)}$$
- $$\boxed{\sin(x) = x + o_{x\to 0}(x^2)}$$
- $$\boxed{\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o_{x\to 0}(x^3)}$$

Fonctions essentielles

- $$\boxed{\begin{aligned}\frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + o_{x\to 0}(x^n)\\ &= \sum_{k=0}^{n} x^k + o_{x\to 0}(x^n)\end{aligned}}$$
- $$\boxed{\begin{aligned}e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o_{x\to 0}(x^n)\\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o_{x\to 0}(x^n)\end{aligned}}$$
- Pour $\alpha \in \mathbb{R}$,
$$\boxed{\begin{aligned}(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-(n-1))}{n!}x^n + o_{x\to 0}(x^n)\\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{\prod_{j=0}^{k-1}(\alpha-j)}{k!}x^k + o_{x\to 0}(x^n)\end{aligned}}.$$

- $$\boxed{\begin{aligned}\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o_{x\to 0}(x^n)\\ &= \sum_{k=\mathbf{1}}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k + o_{x\to 0}(x^n)\end{aligned}}$$

- $$\boxed{\begin{aligned}\sin(x) &= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \cdots + (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} + o_{x\to 0}(x^{2m+2})\\ &= \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1} + o_{x\to 0}(x^{2m+2})\end{aligned}}$$

- $$\boxed{\begin{aligned}\cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \cdots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} + o_{x\to 0}(x^{2m+1})\\ &= \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k} + o_{x\to 0}(x^{2m+1})\end{aligned}}$$

Autres fonctions usuelles

- $$\begin{aligned}-\ln(1-x) &= x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o_{x\to 0}(x^3)\\ &= \sum_{k=\mathbf{1}}^{n} \frac{x^k}{k} + o_{x\to 0}(x^n)\end{aligned}$$

- $$\boxed{\begin{aligned}\frac{1}{1+x} &= 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + o_{x\to 0}(x^n)\\ &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o_{x\to 0}(x^n)\end{aligned}}$$

- $$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{8}x^2 + o_{x\to 0}(x^2)$$

- $$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2 + o_{x\to 0}(x^2)$$

- $$\boxed{\begin{aligned}\arctan(x) &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{2m+1} + o_{x\to 0}(x^{2m+2})\\ &= \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k}{2k+1}x^{2k+1} + o_{x\to 0}(x^{2m+2})\end{aligned}}$$

- $$\arcsin(x) = x + \frac{x^3}{6} + o_{x\to 0}(x^4)$$

- $$\arccos(x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(x)$$
- $$\boxed{\begin{aligned}\mathrm{ch}(x) &= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \cdots + \frac{x^{2m}}{(2m)!} + o_{x\to 0}(x^{2m+1}) \\ &= \sum_{k=0}^{m} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o_{x\to 0}(x^{2m+1})\end{aligned}}$$
- $$\boxed{\begin{aligned}\mathrm{sh}(x) &= x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \cdots + \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} + o_{x\to 0}(x^{2m+2}) \\ &= \sum_{k=0}^{m} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o_{x\to 0}(x^{2m+2})\end{aligned}}$$
- $$\boxed{\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + o_{x\to 0}(x^3)}$$

Peut être utile à connaître

- $$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + o_{x\to 0}(x^8)$$
- $$\mathrm{th}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 - \frac{17}{315}x^7 + o_{x\to 0}(x^8)$$
- $$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1\times 3\times 5\times \cdots \times (2k-1)}{2\times 4\times 6\cdots \times (2k)} x^k + o_{x\to 0}(x^n)$$
- $$\arcsin(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{1\times 3\times 5\times \cdots \times (2k-1)}{2\times 4\times 6\cdots \times (2k)} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o_{x\to 0}(x^{2m+2})$$

Formule de Taylor-Young

Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit f définie au voisinage de a et n fois dérivable au voisinage de a.
Alors au voisinage de a:

$$\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o_{x\to a}((x-a)^n)}$$

ou encore

$$\boxed{f(a+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}h^k + o_{h\to 0}(h^n)}$$

Comment faire un DL en un point différent de 0

Pour effectuer le DL au voisinage de $a \in \mathbb{R}$.
Dans les cas les plus simples on peut utiliser la formule de Taylor-Young.
Sinon on se ramène à un (ou à des compositions de) DL(s) en 0.

- Pour les exponentielles et compagnie (cos, sin, ch, sh, etc.) on écrit

  $$x = a + h$$

  avec h au voisinage de 0, et on utilise les formules de sommes. On remplace ensuite h par $x - a$. Par exemple

  $$e^{a+h} = e^a e^h = e^a \left(1 + h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{6} + o_{h\to 0}(h^3)\right)$$

  et donc

  $$e^x = e^a + e^a(x-a) + \frac{e^a}{2}(x-a)^2 + \frac{e^a}{6}(x-a)^3 + o_{x\to a}(x-a)^3$$

  ou encore

  $$\cos(a+h) = \cos(a)\cos(h) - \sin(a)\sin(h) = \cos(a)\left(1 - \frac{h^2}{2} + o_{h\to 0}(h^3)\right) - \sin(a)\left(h - \frac{h^3}{6} + o_{h\to 0}(h^3)\right)$$

  et donc

  $$\cos(x) = \cos(a) - \sin(a)(x-a) - \frac{\cos(a)}{2}(x-a)^2 + \frac{\sin(a)}{6}(x-a)^3 + o_{x\to a}((x-a)^3).$$

- Pour les puissances et compagnie (par exemple ln) on écrit, si $a \neq 0$,

  $$x = a(1 + h)$$

  avec h au voisinage de 0, c'est à dire qu'on met en facteur le terme prédominant. On remplace ensuite h par $\frac{(x-a)}{a}$. Par exemple, pour $a > 0$

  $$\sqrt{a(1+h)} = \sqrt{a}\sqrt{1+h} = \sqrt{a}\left(1 + \frac{h}{2} - \frac{h^2}{8} + o_{h\to 0}(h^2)\right)$$

  et donc

  $$\sqrt{x} = \sqrt{a} + \frac{1}{2\sqrt{a}}(x-a) - \frac{1}{8a^{\frac{3}{2}}}(x-a)^2 + o_{x\to a}((x-a)^2)$$

  ou encore

  $$\ln(a(1+h)) = \ln a + \ln(1+h) = \ln(a) + \left(h - \frac{h^2}{2} + o_{h\to 0}(h^2)\right)$$

  et donc

  $$\ln(x) = \ln(a) + \frac{1}{a}(x-a) - \frac{1}{2a^2}(x-a)^2 + o_{x\to a}((x-a)^2).$$

  À savoir faire:

  $$\frac{1}{a+h} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1 - \left(-\frac{h}{a}\right)} = \frac{1}{a} - \frac{h}{a^2} + \frac{h^2}{a^3} \cdots + (-1)^n \frac{h^n}{a^{n+1}} + o_{h\to 0}(h^n)$$