Croissances comparées

Croissances comparées

Notation « petit o » de Landau

Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. On note[1]

$$f(x) = o_{x\to a}(g(x))$$

si $f(x)$ est négligeable devant $g(x)$ quand $x \to a$, c'est à dire

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Ce qui est parfois noté $f(x) \ll g(x)$.

Au voisinage de 0^+

La base

Au voisinage de 0^+ on a

- Pour $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\boxed{\alpha_1 < \alpha_2}$

$$\boxed{x^{\alpha_2} = o_{x\to 0}\left(x^{\alpha_1}\right)}.$$

- Pour $(\beta_1, \beta_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\beta_1 < \beta_2$

$$\ln(x)^{\beta_1} = o_{x\to 0}(\ln(x)^{\beta_2})$$

- Si $\boxed{\alpha > 0}$ et $\beta \in \mathbb{R}$ alors

$$\boxed{x^{\alpha} = o_{x\to +0}\left(\frac{1}{\ln(x)^{\beta}}\right)}.$$

- Si $\boxed{\alpha < 0}$ et $\beta \in \mathbb{R}$ alors

$$\boxed{\ln(x)^{\beta} = o_{x\to 0}\left(x^{\alpha}\right)}.$$

Schématiquement

Au voisinage de 0^+ :

$$\cdots \ll \underbrace{x^{\alpha_2} \ll x^{\alpha_1}}_{0<\alpha_1<\alpha_2} \ll \cdots \ll \frac{1}{\ln(x)} \ll \mathbf{1} \ll \ln(x) \ll \cdots \ll \underbrace{x^{\alpha_2} \ll x^{\alpha_1}}_{\alpha_1<\alpha_2<0} \ll \cdots$$

Moyen mnémotechnique : c'est décroissant en α et $\ln(x)$ ressemble très fort à $\alpha = 0^-$ en 0.

[1] les détails de cette notation seront étudiés plus tard dans l'année

Au voisinage de $+\infty$

La base

Au voisinage de $+\infty$ on a

- Pour $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\boxed{\alpha_1 < \alpha_2}$

$$\boxed{x^{\alpha_1} = o_{x\to+\infty}\left(x^{\alpha_2}\right)}.$$

- Pour $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\boxed{\lambda_1 < \lambda_2}$

$$\boxed{e^{\lambda_1 x} = o_{x\to+\infty}\left(e^{\lambda_2 x}\right)}.$$

- Pour $(\beta_1, \beta_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\beta_1 < \beta_2$

$$\ln(x)^{\beta_1} = o_{x\to+\infty}(\ln(x)^{\beta_2})$$

- Si $\boxed{\alpha > 0}$ et $\beta \in \mathbb{R}$ alors

$$\boxed{\ln(x)^{\beta} = o_{x\to+\infty}(x^{\alpha})}$$

et pour tout $\boxed{\lambda > 0}$

$$\boxed{x^{\alpha} = o_{x\to+\infty}(e^{\lambda x})}.$$

- Si $\boxed{\alpha < 0}$ et $\beta \in \mathbb{R}$ alors

$$\boxed{x^{\alpha} = o_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\ln(x)^{\beta}}\right)}$$

et pour tout $\boxed{\lambda < 0}$

$$\boxed{e^{\lambda x} = o_{x\to+\infty}\left(x^{\alpha}\right)}.$$

Schématiquement

Au voisinage de $+\infty$:

$$\cdots \ll \underbrace{e^{\lambda_1 x} \ll e^{\lambda_2 x}}_{\lambda_1<\lambda_2<0} \ll \cdots \ll \underbrace{x^{\alpha_1} \ll x^{\alpha_2}}_{\alpha_1<\alpha_2<0} \ll \cdots \ll \frac{1}{\ln(x)} \ll \mathbf{1} \ll \ln(x) \ll \cdots \ll \underbrace{x^{\alpha_1} \ll x^{\alpha_2}}_{0<\alpha_1<\alpha_2} \ll \cdots \ll \underbrace{e^{\lambda_1 x} \ll e^{\lambda_2 x}}_{0<\lambda_1<\lambda_2} \ll \cdots$$

Remarques :

- Pour $a > 0$ la fonction $x \mapsto a^x$, s'écrit $x \mapsto \exp(\ln(a)x)$.
  Il faut et suffit donc de distinguer $a > 1$ ($\ln(a) > 0$) et $a < 1$ ($\ln(a) < 0$).
- Les croissances comparées en $-\infty$ (quand elles ont un sens) se déduisent de celles en $+\infty$ en composant par $x \mapsto -x$.