Calculs de dérivées

Dans la suite $I \subset \mathbb{R}$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Rappels sur la dérivée

Soit $f : I \to \mathbb{R}$.
Alors f est dérivable en $a \in I$ de dérivée $f'(a)$ signifie

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$$

ou encore

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a).$$

Avec des notations de Landau[1]

$$\boxed{f(a+h) = f(a) + f'(a)h + o_{h\to 0}(h)}$$

ou encore

$$\boxed{f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + o_{x\to a}((x-a))}.$$

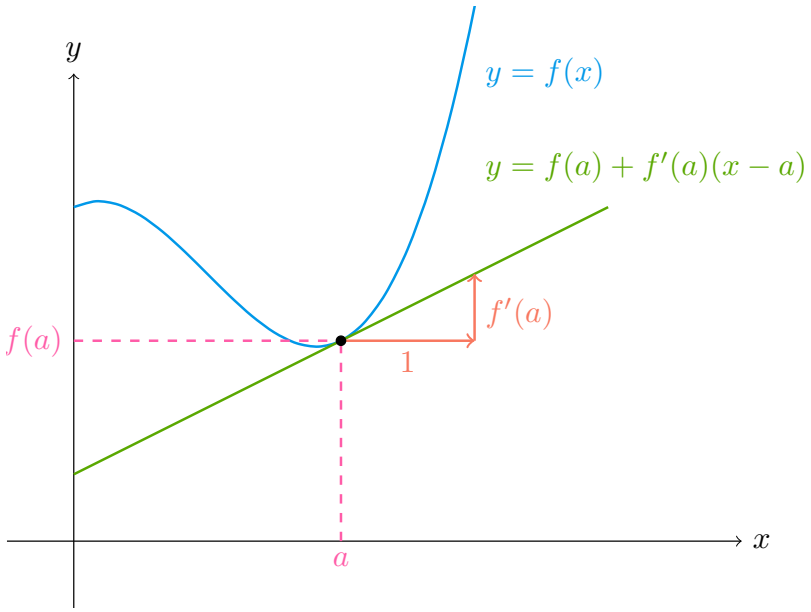
Schéma

Cette écriture

$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + o_{x\to a}(x-a).$

implique que l'équation de la tangente au graphe de f en a est

$$\boxed{y = f(a) + f'(a)(x-a)}.$$



[1] cette notation sera étudiée plus tard dans l'année

Dérivées et opérations

Opérations élémentaires

Soient f et g deux fonctions dérivables de I dans $\mathbb{K}$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

- Alors λf est dérivable et
$$\boxed{(\lambda f)' = \lambda f'}.$$
- Alors $f+g$ est dérivable et
$$\boxed{(f+g)' = f' + g'}.$$
- Alors $f \times g$ est dérivable et
$$\boxed{(f \times g)' = f' \times g + f \times g'}.$$

Combinaison linéaire et produit de N fonctions

Soit $N \in \mathbb{N}$ et $f_1, \ldots, f_N$ des fonctions dérivables de I dans $\mathbb{K}$ et $\lambda_1, \cdots, \lambda_N \in \mathbb{K}$ des scalaires.

- Alors $\sum_{k=1}^{N} \lambda_k f_k$ est dérivable et
$$\boxed{\left(\sum_{k=1}^{N} \lambda_k f_k\right)' = \sum_{k=1}^{N} \lambda_k (f_k)'}.$$
$(f_1 - f_2 + 3f_3 - 2f_4)' = f_1' - f_2' + 3f_3' - 2f_4'.$
- Alors $\prod_{k=1}^{N} f_k$ est dérivable et
$$\boxed{\left(\prod_{k=1}^{N} f_k\right)' = \sum_{k=1}^{N} \left(f_k' \prod_{\substack{i \in [\![1,N]\!] \\ i \neq k}} f_i \right)}.$$
$(f_1 f_2 f_3 f_4)' = f_1' f_2 f_3 f_4 + f_1 f_2' f_3 f_4 + f_1 f_2 f_3' f_4 + f_1 f_2 f_3 f_4'.$

Dérivées n-ième de somme et produit

Soit $n \in \mathbb{N}$.
On rappelle que $f^{(n)}$ est la dérivée n-ième de f (si elle existe).
$f^{(0)} = f$, $f^{(1)} = f'$, $f^{(2)} = f''$, $f^{(3)} = f'''$, etc.
Soient f et g deux fonctions dérivables n fois de I dans $\mathbb{K}$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

- Alors λf est dérivable n fois et
$$\boxed{(\lambda f)^{(n)} = \lambda f^{(n)}}.$$
- Alors $f+g$ est dérivable n fois et
$$\boxed{(f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}}.$$
- Alors fg est dérivable n fois et
$$\boxed{(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}}.$$

$$\begin{aligned}
fg &= fg \\
(fg)' &= f'g + fg' \\
(fg)'' &= f''g + 2f'g' + fg'' \\
(fg)''' &= f'''g + 3f''g' + 3f'g'' + fg''' \\
(fg)'''' &= f''''g + 4f'''g' + 6f''g'' + 4f'g''' + fg''''
\end{aligned}$$

1					
1	1				
1	2	1			
1	3	3	1		
1	4	6	4	1	
1	5	10	10	5	1

Dérivée et composition

Dérivée de la composée

Soit $f : I \to J$ dérivable et $g : J \to \mathbb{R}$ dérivable.
Alors $g \circ f$ est dérivable et

$$\boxed{(g \circ f)' = f' \times (g' \circ f)}.$$

c'est à dire

$$\forall x \in I, \quad \boxed{(g \circ f)'(x) = f'(x)g'(f(x))}.$$

Dérivée de la bijection réciproque

Si $f : I \to J$ est bijective et dérivable, alors pour tout $y \in J$ tel que $f'(f^{-1}(y)) \neq 0$, f^{-1} est dérivable en y et

$$\boxed{(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)}}.$$

Cas affine

Soit f dérivable sur I et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
Alors $x \mapsto f(ax + b)$ est dérivable et

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(ax + b) = af'(ax + b)}.$$

Inverse et quotient

Soit g dérivable sur I et **ne s'annulant pas**.
Alors $\frac{1}{g}$ et dérivable et

$$\boxed{\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}}.$$

de plus si f est dérivable sur I on a $\frac{f}{g}$ est dérivable et

$$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'}{g} - \frac{fg'}{g^2} = \frac{f'g - fg'}{g^2}}.$$

Dérivées usuelles

$f(x)$	$\mathcal{D}_f$	$f'(x)$	$\mathcal{D}_{f'}$
$x^n,\ n \in \mathbb{N}$	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{x} = x^{-1}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$-\dfrac{1}{x^2} = -x^{-2}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
$\dfrac{1}{x^n} = x^{-n}, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$-\dfrac{n}{x^{n+1}} = -nx^{-n-1}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
$\sqrt{x}$	$[0, +\infty[$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0, +\infty[$
e^x	$\mathbb{R}$	e^x	$\mathbb{R}$
$\ln(x)$	$]0, +\infty[$	$\dfrac{1}{x}$	$]0, +\infty[$
$\ln(\lvert x \rvert)$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$\dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
$x^\alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}$	$]0, +\infty[$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$]0, +\infty[$
$\cos(x)$	$\mathbb{R}$	$-\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$\sin(x)$	$\mathbb{R}$	$\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$\tan(x)$	$\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	$1 + \tan^2(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$	$\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
$\arccos(x)$	$[-1, 1]$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1, 1[$
$\arcsin(x)$	$[-1, 1]$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1, 1[$
$\arctan(x)$	$\mathbb{R}$	$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$
$\mathrm{ch}(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathrm{sh}(x)$	$\mathbb{R}$
$\mathrm{sh}(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathrm{ch}(x)$	$\mathbb{R}$
$\mathrm{th}(x)$	$\mathbb{R}$	$1 - \mathrm{th}(x)^2 = \frac{1}{\mathrm{ch}^2(x)}$	$\mathbb{R}$

On peut résumer plusieurs lignes du tableau, par

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}}$$

tant que cela a un sens.