Fiche non-exhaustive de coefficients binomiaux

Les quatres définitions équivalentes

▶ Définition combinatoire

Le coefficient binomial

$$\binom{n}{k}$$

est le nombre de façons de choisir k éléments parmi n.

On utilise cette définition dans les preuves combinatoires et pour les doubles comptages.

▶ Formule de Pascal

Pour $n \geq 0$, $\binom{n}{0} = 1$, pour $k \geq 1$, $\binom{0}{k} = 0$ et pour tout $k \geq 1$, $n \geq 1$

$$\boxed{\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}.}$$

On utilise cette définiton dans les récurrences.
Il est très fortement conseillé de faire un schéma avec le triangle de Pascal.

▶ Définition polynomiale

On a la formule du binôme

$$\boxed{(1+X)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k.}$$

D'où une définition par identification des coeffcients.

Il faut ensuite faire des produits, dérivées, des évaluations en des valeurs particulières, etc.

▶ Formule explicite

On a la formule explicite

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

On l'utilise rarement en combinatoire, mais parfois en arithmétique.

Formules fondamentales

Formule du binôme

Pour a et b deux éléments qui commutent

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.}$$

et comme $a - b = a + (-b)$,

$$(a-b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} a^k b^{n-k}.$$

$$(a+b)^0 = 1$$
$$(a+b)^1 = a+b$$
$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$
$$(a+b)^4 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$$
$$(a+b)^5 = a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$$

$$(a-b)^0 = 1$$
$$(a-b)^1 = a-b$$
$$(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$$
$$(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$$
$$(a-b)^4 = a^4-4a^3b+6a^2b^2-4ab^3+b^4$$
$$(a-b)^5 = a^5-5a^4b+10a^3b^2-10a^2b^3+5ab^4-b^5$$

Symétrie

Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$,

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

1						
1	1					
1	2	1				
1	3	3	1			
1	4	6	4	1		
1	5	10	10	5	1	
1	6	15	20	15	6	1

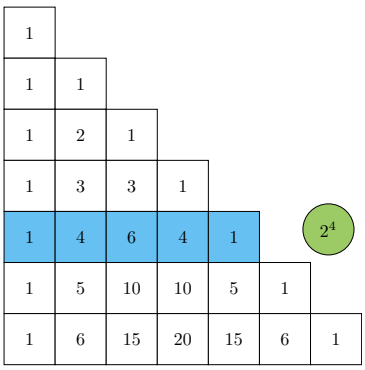
Formule de Pascal

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

1						
1	1					
1	2	1				
1	3	3	1			
1	4	6	4	1		
1	5	10	10	5	1	
1	6	15	20	15	6	1

Somme sur une ligne

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

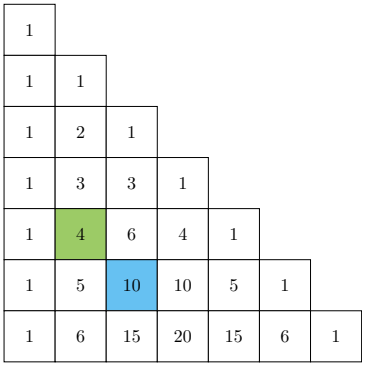


Formules très utiles

Formule de la capitaine

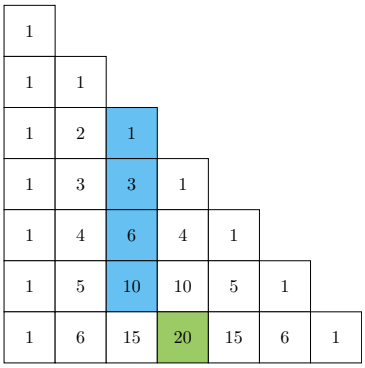
Pour $k \geq 1$, $n \geq 1$,

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}.$$



Somme sur une colonne (formule du L)

$$\sum_{p=k}^{n} \binom{p}{k} = \binom{n+1}{k+1}.$$



Valeurs particulières

- $\binom{n}{0} = 1$,
- $\binom{n}{1} = n$,
- $\binom{n}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$,

Formules souvent utiles

Formule de Vandermonde

$$\sum_{p+q=k} \binom{n}{p}\binom{m}{q} = \binom{n+m}{k}.$$

Formule des capitaines

Pour $p \leq k \leq n$

$$\binom{k}{p}\binom{n}{k} = \binom{n}{p}\binom{n-p}{k-p}$$

Fonction génératrice

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k = (1+X)^n.$$

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} X^{k-1} = n(1+X)^{n-1}.$$

etc.

Arithmétique

Pour p premier et $k \in [\![1, p-1]\!]$,

$$p \text{ divise } \binom{p}{k}.$$

Votre tableau de Pascal

1														
1	1													
1	2	1												
1	3	3	1											
1	4	6	4	1										
1	5	10	10	5	1									
1	6	15	20	15	6	1								
1	7	21	35	35	21	7	1							
1	8	28	56	70	56	28	8	1						
1	9	36	84	126	126	84	36	9	1					
1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1				
1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1			
1	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66	12	1		
1	13	78	286	715	1287	1716	1716	1287	715	286	78	13	1	
1	14	91	364	1001	2002	3003	3432	3003	2002	1001	364	91	14	1
1	15	105	455	1365	3003	5005	6435	6435	5005	3003	1365	455	105	15	1