On portera une attention particulière à **la rédaction** et à **la propreté** de la copie.
En particulier tout **graphe ou schéma** pertinent et correctement annoté sera **valorisé**.
Les résultats devront être mis en valeur dès que possible.

Indiquez sur votre copie le temps approximatif pris pour le devoir.

1. Wronskien et liberté

Notations du problème

- On rappelle que pour $y_1, \dots, y_n \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ on dit que la famille $(y_1, \dots, y_n)$ est **liée** ssi il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$ non tous nuls tels que $\sum_{j=1}^n \lambda_j y_j = 0$, c'est-à-dire tels que

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j(t) = 0.$$

- Pour $y_1, \dots, y_n \in \mathcal{D}^{n-1}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, $n-1$ fois dérivables, on note

$$W_n(y_1, \dots, y_n) : \begin{array}{c} \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ t \mapsto \end{array} \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) & \cdots & y_n(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) & \cdots & y_n'(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(t) & y_2^{(n-1)}(t) & \cdots & y_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}$$

c'est-à-dire

$$\forall t \in \mathbb{R},\ W_n(y_1, \dots, y_n)(t) = \det\left(\left(y_j^{(i-1)}(t)\right)_{1 \le i,j \le n}\right).$$

Par exemple pour $n = 2$, pour $y_1, y_2 \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ on note

$$W_2(y_1, y_2) : \begin{array}{c} \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ t \mapsto \end{array} \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix}$$

c'est-à-dire

$$\forall t \in \mathbb{R},\ W_2(y_1, y_2)(t) = y_1(t)y_2'(t) - y_2(t)y_1'(t).$$

L'objectif du problème est d'étudier les liens entre ces notions.

1.I. Préliminaires

Les questions **1.1.** et **1.2.** pourront être utilisés dans tout le reste du sujet.

1.1. Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et $a \in \mathbb{R}$.
On suppose que

$$f(a) \neq 0.$$

Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall t \in [a - \delta, a + \delta], f(t) \neq 0.$$

1.2. Soient $y_1, \dots, y_n \in \mathcal{D}^{n-1}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.
Montrer que

$$(y_1, \dots, y_n) \text{ est liée } \Rightarrow\ \forall t \in \mathbb{R}, W_n(y_1, \dots, y_n)(t) = 0.$$

La question **1.3.** ne sera utile qu'éventuellement dans la partie 1.V.

1.3. Soient $a_1, a_0 \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.
Soient $y_1, y_2 \in \mathcal{D}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ deux solutions de l'équation différentielle linéaire d'ordre 2 homogène

$$\forall t \in \mathbb{R},\ y''(t) + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = 0.$$

Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a

$$W_2(y_1, y_2)(t) = W_2(y_1, y_2)(0) \exp\left(-\int_0^t a_1(s)\mathrm{d}s\right).$$

Indication: on pourra essayer de calculer $W_2(y_1, y_2)'$.

1.II. Le cas $n = 2$ et liberté

1.4. Soient $y_1, y_2 \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et I un intervalle de $\mathbb{R}$ tel que

$$\forall t \in I,\ W_2(y_1, y_2)(t) = 0.$$

et

$$\forall t \in I,\ y_1(t) \neq 0.$$

Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{C}$ tel que

$$\forall t \in I,\ y_2(t) = cy_1(t).$$

1.5. Soient $y_1, y_2 \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ n'admettant aucun point d'annulation commun c'est-à-dire telle que

$$\neg\left(\exists t \in \mathbb{R}, y_1(t) = 0 \text{ et } y_2(t) = 0\right).$$

Montrer que

$$(\forall t \in \mathbb{R},\ W_2(y_1, y_2)(t) = 0) \Rightarrow (y_1, y_2)\text{liée}.$$

On définit désormais la fonction $\chi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \chi(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{t^2}} & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

1.6. Montrer que $\chi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

1.7. On définit les fonctions $y_1, y_2 \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ par

$$\forall t \in \mathbb{R},\ y_1(t) = \chi(t) \text{ et } y_2(t) = \chi(-t).$$

Montrer que

$$(y_1, y_2) \text{ est libre } \textbf{ et } \forall t \in \mathbb{R},\ W_2(y_1, y_2)(t) = 0.$$

1.8. Donner un exemple de trois fonctions $y_1, y_2, y_3 \in \mathcal{D}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ telles que

$$\forall t \in \mathbb{R},\ W_3(y_1, y_2, y_3)(t) = 0$$

et

$$(y_1, y_2, y_3) \text{ est libre.}$$

1.III. Une liaison partielle

1.9. Soient I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$, $y_1, \ldots, y_n \in \mathcal{D}^{n-1}(I, \mathbb{C})$ et $g \in \mathcal{D}^{n-1}(I, \mathbb{C})$.
Montrer que

$$\forall t \in I,\ W_n(gy_1, \ldots, gy_n)(t) = (g(t))^n W_n(y_1, \ldots, y_n)(t).$$

1.10. Soient I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et $y_1, \ldots, y_n \in \mathcal{D}^{n-1}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.
On suppose que pour tout $t \in I$, $y_1(t) \neq 0$.
Montrer que

$$\forall t \in I,\ W_n(y_1, y_2, \ldots, y_n)(t) = (y_1(t))^n W_{n-1}\left(\left(\frac{y_2}{y_1}\right)', \ldots, \left(\frac{y_n}{y_1}\right)'\right)(t).$$

1.11. Montrer par récurrence que pour tout $n \geq 2$, pour tout intervalle I non vide, pour tous $y_1, \ldots, y_n \in \mathcal{D}^{n-1}(I, \mathbb{C})$,

on a

$$\forall t \in I, W_n(y_1,\dots,y_n)(t)=0 \ \Rightarrow\ \left(\exists J \subset I \text{ intervalle non vide, } \left((f_1)_{|J},\dots,(f_n)_{|J}\right) \text{ est liée }\right).$$

1.IV. Une condition suffisante de liaison

Dans cette partie on considère $y_1,\dots,y_n \in \mathcal{D}^{n-1}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ et on suppose que

$$\forall t \in \mathbb{R},\ W_n(y_1,\dots,y_n)(t)=0$$

1.12. Soit $t \in \mathbb{R}$.
Montrer que pour tout $i \in [\![0,n-1]\!]$, on a

$$\sum_{j=1}^{n} y_j^{(i)}(t)\ (-1)^{n-j} W_{n-1}(y_1,\dots,y_{j-1},y_{j+1},\dots,y_n)(t)=0.$$

Indication: on pourra poser $M=\begin{pmatrix} y_1^{(0)}(t) & \cdots & y_j^{(0)}(t) & \cdots & y_n^{(0)}(t) \\ y_1^{(1)}(t) & \cdots & y_j^{(1)}(t) & \cdots & y_n^{(1)}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-2)}(t) & \cdots & y_j^{(n-2)}(t) & \cdots & y_n^{(n-2)}(t) \\ y_1^{(n-1)}(t) & \cdots & y_j^{(n-1)}(t) & \cdots & y_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$ *et déterminer la dernière ligne de la comatrice de* M.

1.13. En déduire que pour tout $i \in [\![0,n-2]\!]$, on a

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \sum_{j=1}^{n} y_j^{(i)}(t)\ (-1)^{n-j}\left(W_{n-1}(y_1,\dots,y_{j-1},y_{j+1},\dots,y_n)\right)'(t)=0.$$

1.14. Soit $t \in \mathbb{R}$ et $j_0 \in [\![1,n-1]\!]$.
On pose pour tout $i \in [\![0,n-2]\!]$,

$$b_i(t)=(-1)^{j_0-1-i}\begin{vmatrix} y_1^{(0)}(t) & \cdots & y_{j_0-1}^{(0)}(t) & y_{j_0+1}^{(0)}(t) & \cdots & y_{n-1}^{(0)}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(i-1)}(t) & \cdots & y_{j_0-1}^{(i-1)}(t) & y_{j_0+1}^{(i-1)}(t) & \cdots & y_{n-1}^{(i-1)}(t) \\ y_1^{(i+1)}(t) & \cdots & y_{j_0-1}^{(i+1)}(t) & y_{j_0+1}^{(i+1)}(t) & \cdots & y_{n-1}^{(i+1)}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-2)}(t) & \cdots & y_{j_0-1}^{(n-2)}(t) & y_{j_0+1}^{(n-2)}(t) & \cdots & y_{n-1}^{(n-2)}(t) \end{vmatrix}$$

Soit $j \in [\![1,n]\!]$.
Exprimer sous forme d'un Wronskien de $n-1$ fonctions,

$$\sum_{i=0}^{n-2} y_j^{(i)}(t) b_i(t).$$

On suppose de plus dans les questions **1.15.** et **1.16.** que

$$\forall t \in \mathbb{R},\ W_{n-1}(y_1,\dots,y_{n-1})(t) \neq 0.$$

1.15. Montrer à l'aide des questions **1.13.**, **1.14.** et **1.4.** que

$$\forall j_0 \in [\![1,n-1]\!], \exists c_{j_0} \in \mathbb{C},\ \forall t \in \mathbb{R},\ W_{n-1}(y_1,\dots,y_{j_0-1},y_{j_0+1},\dots,y_n)(t)=c_{j_0}W_{n-1}(y_1,\dots,y_{n-1})(t).$$

1.16. Conclure que

$$(y_1,\dots,y_n) \text{ est liée.}$$

1.V. Application aux EDOs à forces centrales

On s'intéresse dans cette partie à un point matériel soumis à une force centrale et ne passant jamais par l'origine.

Ainsi on considère une fonction $f\colon \mathbb{R}^3\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ continue et trois fonctions deux fois dérivables, $x, y, z \in \mathcal{D}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $(x(t), y(t), z(t)) \in \mathbb{R}^3\backslash\{0_{\mathbb{R}^3}\}$ et vérifiant

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \begin{pmatrix} x''(t) \\ y''(t) \\ z''(t) \end{pmatrix} = f(x(t), y(t), z(t)) \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}.$$

1.17. Montrer que $W_2(y, z)$, $-W_2(x, z)$ et $W_2(x, y)$ sont constantes.
1.18. En déduire qu'il existe un plan vectoriel $\mathcal{P}$ tel que

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \in \mathcal{P}.$$

Fin de l'énoncé