En cas d'erreur de corrigé, n'hésitez pas à me le signaler.

1. Wronskien et liberté

Notations du problème

- On rappelle que pour $y_1, \dots, y_n \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ on dit que la famille $(y_1, \dots, y_n)$ est **liée** ssi il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$ non tous nuls tels que $\sum_{j=1}^n \lambda_j y_j = 0$, c'est-à-dire tels que

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j(t) = 0.$$

- Pour $y_1, \dots, y_n \in \mathcal{D}^{n-1}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, $n-1$ fois dérivables, on note

$$W_n(y_1, \dots, y_n) : \begin{array}{c} \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ t \mapsto \end{array} \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) & \cdots & y_n(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) & \cdots & y_n'(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(t) & y_2^{(n-1)}(t) & \cdots & y_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}$$

  c'est-à-dire

$$\forall t \in \mathbb{R},\ W_n(y_1, \dots, y_n)(t) = \det\left(\left(y_j^{(i-1)}(t)\right)_{1 \le i,j \le n}\right).$$

  Par exemple pour $n = 2$, pour $y_1, y_2 \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ on note

$$W_2(y_1, y_2) : \begin{array}{c} \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ t \mapsto \end{array} \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix}$$

  c'est-à-dire

$$\forall t \in \mathbb{R},\ W_2(y_1, y_2)(t) = y_1(t)y_2'(t) - y_2(t)y_1'(t).$$

L'objectif du problème est d'étudier les liens entre ces notions.

1.I. Préliminaires

Les questions **1.1.** et **1.2.** pourront être utilisés dans tout le reste du sujet.

1.1. Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et $a \in \mathbb{R}$.
On suppose que

$$f(a) \neq 0.$$

Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall t \in [a-\delta, a+\delta], f(t) \neq 0.$$

Posons $\varepsilon = \frac{|f(a)|}{2} > 0$.
Par continuité de f en a, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall t \in [a-\delta, a+\delta], |f(t) - f(a)| \le \frac{|f(a)|}{2}.$$

En particulier pour tout $t \in [a-\delta, a+\delta]$ on a

$$|f(t)| \ge |f(a)| - |f(t) - f(a)| \ge |f(a)| - \frac{|f(a)|}{2} = \frac{|f(a)|}{2} > 0.$$

Et donc en particulier

$$\boxed{\forall t \in [a-\delta, a+\delta], f(t) \neq 0}.$$

1.2. Soient $y_1, \dots, y_n \in \mathcal{D}^{n-1}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.
Montrer que

$$(y_1, \dots, y_n) \text{ est liée } \Rightarrow \ \forall t \in \mathbb{R}, W_n(y_1, \dots, y_n)(t) = 0.$$

Supposons que $(y_1, \dots, y_n)$ est liée.
Soient $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$ non tous nuls tels que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j(t) = 0.$$

Alors comme les fonctions sont dérivables $n-1$ fois, on a

$$\forall i \in [\![0, n-1]\!], \ \forall t \in \mathbb{R}, \ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j^{(i)}(t) = 0.$$

On a donc

$$\forall t \in \mathbb{R}, \ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \begin{pmatrix} y_j(t) \\ y_j'(t) \\ \vdots \\ y_j^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent pour tout $t \in \mathbb{R}$ les colonnes de la matrice

$$\begin{pmatrix} y_1(t) & y_2(t) & \cdots & y_n(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) & \cdots & y_n'(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(t) & y_2^{(n-1)}(t) & \cdots & y_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$$

sont liées et donc le déterminant de cette matrice est nul.
On a donc bien

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \ W_n(y_1, \dots, y_n)(t) = 0}.$$

La question **1.3.** ne sera utile qu'éventuellement dans la partie 1.V.

1.3. Soient $a_1, a_0 \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.
Soient $y_1, y_2 \in \mathcal{D}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ deux solutions de l'équation différentielle linéaire d'ordre 2 homogène

$$\forall t \in \mathbb{R}, \ y''(t) + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = 0.$$

Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a

$$W_2(y_1, y_2)(t) = W_2(y_1, y_2)(0) \exp\left(-\int_0^t a_1(s)\mathrm{d}s\right).$$

Indication: on pourra essayer de calculer $W_2(y_1, y_2)'$.

Comme $y_1, y_2, y_1', y_2' \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, par somme et produit on a $W_2(y_1, y_2) \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et de plus

$$\begin{aligned} W_2(y_1, y_2)' &= (y_1y_2' - y_2y_1')' \\ &= y_1'y_2' + y_1y_2'' - (y_2'y_1' + y_2y_1'') \\ &= y_1y_2'' - y_2y_1'' \\ &= y_1\left(-a_1y_2' - a_0y_2\right) - y_2\left(-a_1y_1' - a_0y_1\right) \\ &= -a_1(y_1y_2' - y_2y_1') - a_0(y_1y_2 - y_2y_1) \\ &= -a_1W_2(y_1, y_2) \end{aligned}$$

Par conséquent $W_2(y_1, y_2)$ est solution de l'équation différentielle

$$w' = -a_1w$$

et donc (équation différentielle linéaire d'ordre 1 homogène) on a

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ W_2(y_1,y_2)(t) = W_2(y_1,y_2)(0)\exp\left(-\int_0^t a_1(s)\mathrm{d}s\right)}.$$

1.II. Le cas $n = 2$ et liberté

1.4. Soient $y_1, y_2 \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$ et I un intervalle de $\mathbb{R}$ tel que

$$\forall t \in I,\ W_2(y_1,y_2)(t) = 0.$$

et

$$\forall t \in I,\ y_1(t) \neq 0.$$

Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{C}$ tel que

$$\forall t \in I,\ y_2(t) = cy_1(t).$$

On a $\frac{y_2}{y_1}$ est définie et dérivable sur I comme quotient de deux fonctions dérivables dont le dénominateur est non nul.
De plus

$$\left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = \frac{y_1y_2' - y_2y_1'}{y_1^2} = \frac{W_2(y_1,y_2)}{y_1^2} = 0.$$

Comme I est un intervalle on en déduit que $\frac{y_2}{y_1}$ est constante sur I.
Soit $c \in \mathbb{C}$ tel que

$$\forall t \in I,\ \frac{y_2}{y_1}(t) = c.$$

On a bien

$$\boxed{\forall t \in I,\ y_2(t) = cy_1(t)}.$$

1.5. Soient $y_1, y_2 \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$ n'admettant aucun point d'annulation commun c'est-à-dire telle que

$$\neg\left(\exists t \in \mathbb{R}, y_1(t) = 0 \text{ et } y_2(t) = 0\right).$$

Montrer que

$$(\forall t \in \mathbb{R},\ W_2(y_1,y_2)(t) = 0) \Rightarrow (y_1,y_2)\text{liée}.$$

Supposons que

$$\forall t \in \mathbb{R},\ W_2(y_1,y_2)(t) = 0.$$

Comme y_1 et y_2 n'admettent pas de point d'annulation commun on peut, quitte à intervertir y_1 et y_2 (ce qui multiplie par -1 le déterminant) supposer que $y_1(0) \neq 0$ (le point 0 est un point quelconque).
Comme $y_1(0) \neq 0$ et y_1 est continue, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall t \in [-\delta,\delta],\ y_1(t) \neq 0.$$

Par la question **1.4.**, il existe donc $c \in \mathbb{C}$ tel que

$$\forall t \in [-\delta,\delta],\ y_2(t) = cy_1(t).$$

Notons

$$A = \{a > 0 \mid \forall t \in [0,a],\ y_2(t) = cy_1(t)\}.$$

On a A non vide car $\delta \in A$.
Supposons par l'absurde que A est majoré.
Par l'axiome de la borne supérieure on peut alors définir

$$\alpha = \sup(A).$$

Comme y_1 et y_2 ne s'annulent pas simultanément on a $y_1(\alpha) \neq 0$ ou $y_2(\alpha) \neq 0$.
- Si $y_1(\alpha) \neq 0$ alors par continuité de y_1 il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall t \in [\alpha-\eta,\alpha+\eta],\ y_1(t) \neq 0.$$

Il existe donc $\widetilde{c} \in \mathbb{R}$ tel que $\forall t \in [\alpha-\eta, \alpha+\eta],\ y_2(t) = \widetilde{c}y_1(t)$.
Or (définition du supremum) il existe $t_0 > \alpha - \frac{\eta}{2}$ tel que $t_0 \in A$.
En particulier on a donc

$$\forall t \in [\alpha-\eta, \alpha-\frac{\eta}{2}],\ y_2(t) = cy_1(t)$$

et

$$\forall t \in [\alpha-\frac{\eta}{2}, \alpha+\eta],\ y_2(t) = \widetilde{c}y_1(t).$$

Comme y_1 ne s'annule pas sur cet intervalle, on en déduit que $c = \widetilde{c}$.
Mais donc on a

$$\forall t[0, \alpha+\eta],\ y_2(t) = cy_1(t)$$

ce qui contredit la définition de α.

- Si $y_2(\alpha) \neq 0$, alors par continuité de y_2 il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall t \in [\alpha-\eta, \alpha+\eta],\ y_2(t) \neq 0.$$

Il existe donc $\widetilde{c} \in \mathbb{R}$ tel que $\forall t \in [\alpha-\eta, \alpha+\eta],\ y_1(t) = \widetilde{c}y_2(t)$.
Or (définition du supremum) il existe $t_0 > \alpha - \frac{\eta}{2}$ tel que $t_0 \in A$.
En particulier on a donc

$$\forall t \in [\alpha-\eta, \alpha-\frac{\eta}{2}],\ y_2(t) = cy_1(t)$$

et

$$\forall t \in [\alpha-\frac{\eta}{2}, \alpha+\eta],\ y_1(t) = \widetilde{c}y_2(t).$$

Comme y_2 ne s'annule pas sur cet intervalle, on en déduit que $c \neq 0$ et $\widetilde{c} = \frac{1}{c}$.
Mais donc on a

$$\forall t[0, \alpha+\eta],\ y_2(t) = cy_2 1(t)$$

ce qui contredit la définition de α.

Remarque: on pourrait éviter la disjonction de cas en remarquant que, par continuité $y_2(\alpha) = cy_1(\alpha)$ et donc le cas $y_1(\alpha) = 0$ est impossible.

Dans tous les cas on a donc une contradiction.
Donc A n'est pas majoré.
Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Il existe $a \geq x$ tel que $a \in A$.
Donc $y_2(x) = cy_1(x)$.
On traite de manière symétrique pour montrer que l'ensemble

$$B = \{b > 0 \mid \forall t \in [-b, 0],\ y_2(t) = cy_1(t)\}$$

n'est pas majoré.
Par conséquent on a

$$\forall x \in \mathbb{R},\ y_2(x) = cy_1(x).$$

Et en particulier

$$\boxed{(y_1, y_2) \text{ est liée}}.$$

On définit désormais la fonction $\chi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \chi(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{t^2}} & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

1.6. Montrer que $\chi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $\mathcal{Q}_n$ la proposition:

«$\chi \in \mathcal{D}^n(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et il existe un polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall t \in \mathbb{R},\ \chi^{(n)}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ P_n\left(\frac{1}{t}\right) e^{-\frac{1}{t^2}} & \text{si } t > 0 \end{cases}$».

► **Initialisation**

On a par caractère local de la continuité χ est continu en tout point de $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.
De plus

$$e^{-\frac{1}{t^2}} \xrightarrow[t\to 0]{} 0$$

et donc χ est continue en 0.
Comme $P_0 = 1$ convient on a donc $\mathcal{Q}_0$ vraie.

► **Hérédité**
Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{Q}_n$.
Il existe donc un polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \chi^{(n)}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ P_n\left(\frac{1}{t}\right) e^{-\frac{1}{t^2}} & \text{si } t > 0 \end{cases}.$$

Par caractère local de la dérivabilité, on a $\chi^{(n)}$ est dérivable en tout point de $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ et on a

$$\forall t < 0,\ \chi^{(n+1)}(t) = 0.$$

$$\forall t > 0,\ \chi^{(n+1)}(t) = \left(-\frac{1}{t^2}P_n'\left(\frac{1}{t}\right) + P_n\left(\frac{1}{t}\right)\frac{2}{t^3}\right) e^{-\frac{1}{t^2}}$$

et donc en posant

$$P_{n+1} = -X^2 P_n' + 2X^3 P_n$$

on a

$$\forall t > 0,\ \chi^{(n+1)}(t) = P_{n+1}\left(\frac{1}{t}\right) e^{-\frac{1}{t^2}}.$$

De plus pour tout $t < 0$ on a

$$\frac{\chi^{(n)}(t) - \chi^{(n)}(0)}{t - 0} = 0$$

et pour tout tout $t > 0$ on a

$$\frac{\chi^{(n)}(t) - \chi^{(n)}(0)}{t - 0} = \frac{P_n\left(\frac{1}{t}\right) e^{-\frac{1}{t^2}}}{t}.$$

Or par croissance comparée on a

$$\frac{P_n\left(\frac{1}{t}\right) e^{-\frac{1}{t^2}}}{t} \xrightarrow[\substack{t\to 0 \\ t>0}]{} 0$$

Donc on en déduit que

$$\frac{\chi^{(n)}(t) - \chi^{(n)}(0)}{t} \xrightarrow[\substack{t\to 0 \\ t\neq 0}]{} 0$$

et donc par théorème de limite de la dérivée on a $\chi^{(n)}$ dérivable en 0 et $\chi^{(n+1)}(0) = 0$.
Par conséquent on a bien $\chi \in \mathcal{D}^{n+1}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et

$$\chi^{(n+1)}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ P_{n+1}\left(\frac{1}{t}\right) e^{-\frac{1}{t^2}} & \text{si } t > 0 \end{cases}.$$

► **Conclusion**
Par récurrence on a donc $\mathcal{Q}_n$ vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
En particulier pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\chi \in \mathcal{D}^n(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et donc

$$\boxed{\chi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})}.$$

1.7. On définit les fonctions $y_1, y_2 \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ par

$$\forall t \in \mathbb{R},\ y_1(t) = \chi(t) \text{ et } y_2(t) = \chi(-t).$$

Montrer que

$$(y_1, y_2) \text{ est libre } \textbf{ et } \forall t \in \mathbb{R},\ W_2(y_1, y_2)(t) = 0.$$

- **Liberté**
  Soient $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2$ tel que
  $$\forall t \in \mathbb{R},\ \lambda_1 y_1(t) + \lambda_2 y_2(t) = 0.$$
  En particulier comme par exemple $\chi(-1) = 0$ et $\chi(1) \neq 0$ on a
  ▷ En évaluant en 1,
  $$\lambda_1 \chi(1) + \lambda_2 \chi(-1) = 0$$
  d'où
  $$\lambda_1 = 0.$$
  ▷ En évaluant en -1,
  $$\lambda_1 \chi(-1) + \lambda_2 \chi(1) = 0$$
  d'où
  $$\lambda_2 = 0.$$
  Donc $\boxed{(y_1, y_2) \text{ est libre}}$.
- **Wronskien nul**
  On remarque que par continuité de χ' (ou par la preuve précédente) on a pour tout $t \leq 0$, $\chi(t) = 0$ et $\chi'(t) = 0$.
  Soit $t \in \mathbb{R}$.
  ▷ Si $t \leq 0$ alors
  $$\begin{aligned} W_2(y_1, y_2)(t) &= \begin{vmatrix} \chi(t) & \chi(-t) \\ \chi'(t) & -\chi'(-t) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 0 & \chi(-t) \\ 0 & -\chi'(-t) \end{vmatrix} \\ &= 0. \end{aligned}$$
  ▷ Si $t > 0$ alors
  $$\begin{aligned} W_2(y_1, y_2)(t) &= \begin{vmatrix} \chi(t) & \chi(-t) \\ \chi'(t) & -\chi'(-t) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \chi(t) & 0 \\ \chi'(t) & 0 \end{vmatrix} \\ &= 0. \end{aligned}$$
  Dans tout les cas on a donc
  $$\boxed{W_2(y_1, y_2)(t) = 0}.$$

1.8. Donner un exemple de trois fonctions $y_1, y_2, y_3 \in \mathcal{D}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ telles que
$$\forall t \in \mathbb{R},\ W_3(y_1, y_2, y_3)(t) = 0$$
et
$$(y_1, y_2, y_3) \text{ est libre.}$$

Posons pour tout $t \in \mathbb{R}$,
$$\begin{aligned} y_1(t) &= 1 \\ y_2(t) &= 1 + \chi(t) \\ y_3(t) &= 1 + \chi(-t) \end{aligned}$$
alors on a bien $y_1, y_2, y_3 \in \mathcal{D}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.
- **Liberté**
  Soient $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{C}^3$ tel que
  $$\forall t \in \mathbb{R},\ \lambda_1 y_1(t) + \lambda_2 y_2(t) + \lambda_3 y_3(t) = 0.$$
  En particulier on a aussi
  $$\forall t \in \mathbb{R},\ \lambda_2 \chi'(t) - \lambda_3 \chi'(-t) = 0.$$
  En évaluant en 1 et en -1 on obtient alors, comme $\chi'(1) \neq 0$ (car par exemple χ est strictement croissante sur

$]0,+\infty[$) et $\chi'(-1)=0$:

$$\lambda_2 = 0$$
$$\lambda_3 = 0$$

En évaluant en 0 on a de plus $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0$.
Donc

$$\lambda_1 = 0.$$

Donc $\boxed{(y_1,y_2,y_3) \text{ est libre}}$.

- **Wronskien nul**
  Soit $t\in\mathbb{R}$.
  On a

$$W_3(y_1,y_2,y_3)(t) = \begin{vmatrix} 1 & 1+\chi(t) & 1+\chi(-t) \\ 0 & \chi'(t) & -\chi'(-t) \\ 0 & \chi''(t) & \chi''(-t) \end{vmatrix}.$$
$$= \begin{vmatrix} \chi'(t) & -\chi'(-t) \\ \chi''(t) & \chi''(-t) \end{vmatrix}$$

  Et de même que précédemment
  ▷ Si $t\leq 0$ alors

$$\begin{pmatrix} \chi'(t) \\ \chi''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

  ▷ Si $t>0$ alors

$$\begin{pmatrix} -\chi'(-t) \\ \chi''(-t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

  Dans tout les cas on a bien

$$\boxed{W_3(y_1,y_2,y_3)(t)=0}.$$

Remarque: il y a de très nombreuses solutions possibles, par exemple en notant pour $a<b$, pour tout $t\in\mathbb{R}$, $\chi_{[a,b]}(t)=\chi(t-a)\chi(b-t)$ on a $\chi_{[a,b]}\in\mathcal{D}^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$, la restriction de $\chi_{[a,b]}$ à $\mathbb{R}\backslash[a,b]$ et identiquement nulle.
Ainsi il suffit de choisir $[a_1,b_1]$, $[a_2,b_2]$ et $[a_3,b_3]$ trois segments disjoints et poser $y_j=\chi_{[a_j,b_j]}$ pour $j=1,2,3$.

1.III. Une liaison partielle

1.9. Soient I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$, $y_1,\dots,y_n\in\mathcal{D}^{n-1}(I,\mathbb{C})$ et $g\in\mathcal{D}^{n-1}(I,\mathbb{C})$.
Montrer que

$$\forall t\in I,\ W_n(gy_1,\dots,gy_n)(t) = (g(t))^n W_n(y_1,\dots,y_n)(t).$$

Soit $t\in I$.
Par formule de Leibniz on a pour tout $j\in[\![1,n]\!]$ et tout $i\in[\![0,n-1]\!]$,

$$(gy_j)^{(i)} = \sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k} y_j^{(k)} g^{(i-k)}.$$

En terme matriciels cette égalité s'écrit

$$\forall (i,j)\in[\![1,n]\!]\ (gy_j)^{(i-1)}(t) = \sum_{k=0}^{i-1} \left(\binom{i-1}{k}\right) \times \left(y_j^{(k)}(t)\right)$$

ce qui peut se représenter

$$\begin{pmatrix} g(t) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ g'(t) & g(t) & 0 & \cdots & 0 \\ g''(t) & 2g'(t) & g(t) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \binom{n-1}{0} g^{(n-1)}(t) & \binom{n-1}{1} g^{(n-2)}(t) & \binom{n-1}{2} g^{(n-3)}(t) & \cdots & g(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1^{(0)}(t) & y_2^{(0)}(t) & \cdots & y_n^{(0)}(t) \\ y_1^{(1)}(t) & y_2^{(1)}(t) & \cdots & y_n^{(1)}(t) \\ y_1^{(2)}(t) & y_2^{(2)}(t) & \cdots & y_n^{(2)}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(t) & y_2^{(n-1)}(t) & \cdots & y_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} (gy_1)^{(0)}(t) & (gy_2)^{(0)}(t) & \cdots & (gy_n)^{(0)}(t) \\ (gy_1)^{(1)}(t) & (gy_2)^{(1)}(t) & \cdots & (gy_n)^{(1)}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (gy_1)^{(n-1)}(t) & (gy_2)^{(n-1)}(t) & \cdots & (gy_n)^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$$

Par passage au déterminant, déterminant d'un produit et déterminant d'une matrice diagonale on en déduit

$$\boxed{W_n(gy_1, \dots, gy_n)(t) = (g(t))^n W_n(y_1, \dots, y_n)(t)}.$$

Remarque: il y avait de nombreuses méthodes pour utiliser la formule de Leibniz, une fois montré que pour tout $t \in I$ et por tout $i \in [\![1, n]\!]$ on a

$$\begin{pmatrix} y_1^{(i)}(t) \\ y_2^{(i)}(t) \\ \vdots \\ y_n^{(i)}(t) \end{pmatrix} = \sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k} g^{(i-k)}(t) \begin{pmatrix} y_1^{(k)}(t) \\ y_2^{(k)}(t) \\ \vdots \\ y_n^{(k)}(t) \end{pmatrix}$$

on peut par exemple:
- Utiliser le caractère multilinéaire alterné du déterminant,
- Utiliser des opérations du pivot.

Par exemple voici une variante utilisant le pivot:
On a par la formule de Leibniz

$$W_n(gy_1, \dots, gy_n) = \begin{vmatrix} g(t)y_1(t) & g(t)y_2(t) & \cdots & g(t)y_n(t) \\ g'(t)y_1(t) + g(t)y_1'(t) & g'(t)y_2(t) + g(t)y_2'(t) & \cdots & g'(t)y_n(t) + g(t)y_n'(t) \\ g''(t)y_1(t) + 2g'(t)y_1'(t) + g(t)y_1''(t) & g''(t)y_2(t) + 2g'(t)y_2'(t) + g(t)y_2''(t) & \cdots & g''(t)y_n(t) + 2g'(t)y_n'(t) + g(t)y_n''(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} g^{(k)}(t) y_1^{(n-1-k)}(t) & \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} g^{(k)}(t) y_2^{(n-1-k)}(t) & \cdots & \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} g^{(k)}(t) y_n^{(n-1-k)}(t) \end{vmatrix}$$

par dilatation de la première ligne on a donc

$$W_n(gy_1, \dots, gy_n) = g(t) \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) & \cdots & y_n(t) \\ g'(t)y_1(t) + g(t)y_1'(t) & g'(t)y_2(t) + g(t)y_2'(t) & \cdots & g'(t)y_n(t) + g(t)y_n'(t) \\ g''(t)y_1(t) + 2g'(t)y_1'(t) + g(t)y_1''(t) & g''(t)y_2(t) + 2g'(t)y_2'(t) + g(t)y_2''(t) & \cdots & g''(t)y_n(t) + 2g'(t)y_n'(t) + g(t)y_n''(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} g^{(k)}(t) y_1^{(n-1-k)}(t) & \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} g^{(k)}(t) y_2^{(n-1-k)}(t) & \cdots & \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} g^{(k)}(t) y_n^{(n-1-k)}(t) \end{vmatrix}$$

en effectuant pour tout $i \in [\![2, n]\!]$ la transvection

$$L_i \leftarrow L_i - \frac{g^{(i-1)}(t)}{g(t)} L_1$$

on en déduit que

$$W_n(gy_1, \dots, gy_n) = g(t) \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) & \cdots & y_n(t) \\ g(t)y_1'(t) & g(t)y_2'(t) & \cdots & g(t)y_n'(t) \\ 2g'(t)y_1'(t) + g(t)y_1''(t) & 2g'(t)y_2'(t) + g(t)y_2''(t) & \cdots & 2g'(t)y_n'(t) + g(t)y_n''(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k} g^{(k)}(t) y_1^{(n-1-k)}(t) & \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k} g^{(k)}(t) y_2^{(n-1-k)}(t) & \cdots & \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k} g^{(k)}(t) y_n^{(n-1-k)}(t) \end{vmatrix}$$

puis de nouveau par dilatation

$$W_n(gy_1, \dots, gy_n) = (g(t))^2 \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) & \cdots & y_n(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) & \cdots & y_n'(t) \\ 2g'(t)y_1'(t) + g(t)y_1''(t) & 2g'(t)y_2'(t) + g(t)y_2''(t) & \cdots & 2g'(t)y_n'(t) + g(t)y_n''(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k} g^{(k)}(t) y_1^{(n-1-k)}(t) & \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k} g^{(k)}(t) y_2^{(n-1-k)}(t) & \cdots & \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k} g^{(k)}(t) y_n^{(n-1-k)}(t) \end{vmatrix}$$

on continue de même en effectuant pour tout $i \in [\![3, n]\!]$ la transvection

$$L_i \leftarrow L_i - \binom{i-1}{1}\frac{g^{(i-1)}(t)}{g(t)}L_2$$

et de manière générale en effectuant pour tout k entre 1 et n une dilatation sur la k-ième ligne puis les transvections pour tout $i \in [\![k+1, n]\!]$ de la forme $L_i \leftarrow L_i - \binom{i-1}{k}\frac{g^{(i-1)}(t)}{g(t)}L_k$ on en déduit que

$$\boxed{W_n(gy_1, \dots, gy_n) = (g(t))^n \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) & \cdots & y_n(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) & \cdots & y_n'(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(t) & y_2^{(n-1)}(t) & \cdots & y_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}}$$

1.10. Soient I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et $y_1, \dots, y_n \in \mathcal{D}^{n-1}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.
On suppose que pour tout $t \in I$, $y_1(t) \neq 0$.
Montrer que

$$\forall t \in I,\ W_n(y_1, y_2, \dots, y_n)(t) = (y_1(t))^n W_{n-1}\left(\left(\frac{y_2}{y_1}\right)', \dots, \left(\frac{y_n}{y_1}\right)'\right)(t).$$

Comme y_1 ne s'annule pas sur I, on a donc pour tout $j \in [\![2, n]\!]$, $\frac{y_j}{y_1} \in \mathcal{D}^{n-1}(I, \mathbb{C})$.
Par conséquent par la question **1.9.** on a

$$\begin{aligned} \forall t \in I,\ W_n(y_1, y_2, \dots, y_n)(t) &= W_n\left(y_1 1, y_1\frac{y_2}{y_1}, \dots, y_1\frac{y_n}{y_1}\right)(t) \\ &= (y_1(t))^n W_n\left(1, \frac{y_2}{y_1}, \dots, \frac{y_n}{y_1}\right)(t) \end{aligned}$$

De plus pour tout $t \in I$ on a (déterminant par bloc)

$$\begin{aligned} W_n\left(1, \frac{y_2}{y_1}, \dots, \frac{y_n}{y_1}\right) &= \begin{vmatrix} 1 & \frac{y_2}{y_1}(t) & \cdots & \frac{y_n}{y_1}(t) \\ 0 & \left(\frac{y_2}{y_1}\right)'(t) & \cdots & \left(\frac{y_n}{y_1}\right)'(t) \\ 0 & \left(\frac{y_2}{y_1}\right)''(t) & \cdots & \left(\frac{y_n}{y_1}\right)''(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \left(\frac{y_2}{y_1}\right)^{(n-1)}(t) & \cdots & \left(\frac{y_n}{y_1}\right)^{(n-1)}(t) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \left(\frac{y_2}{y_1}\right)'(t) & \cdots & \left(\frac{y_n}{y_1}\right)'(t) \\ \left(\frac{y_2}{y_1}\right)''(t) & \cdots & \left(\frac{y_n}{y_1}\right)''(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(\frac{y_2}{y_1}\right)^{(n-1)}(t) & \cdots & \left(\frac{y_n}{y_1}\right)^{(n-1)}(t) \end{vmatrix} \\ &= W_{n-1}\left(\left(\frac{y_2}{y_1}\right)', \dots, \left(\frac{y_n}{y_1}\right)'\right)(t). \end{aligned}$$

On a donc bien

$$\boxed{\forall t \in I,\ W_n(y_1, y_2, \dots, y_n)(t) = (y_1(t))^n W_{n-1}\left(\left(\frac{y_2}{y_1}\right)', \dots, \left(\frac{y_n}{y_1}\right)'\right)(t)}.$$

1.11. Montrer par récurrence que pour tout $n \geq 2$, pour tout intervalle I non vide, pour tous $y_1, \dots, y_n \in \mathcal{D}^{n-1}(I, \mathbb{C})$, on a

$$\forall t \in I, W_n(y_1, \dots, y_n)(t) = 0 \ \Rightarrow\ \left(\exists J \subset I \text{ intervalle non vide, } \left((f_1)_{|J}, \dots, (f_n)_{|J}\right) \text{ est liée }\right).$$

Notons pour tout $n \geq 2$, $\mathcal{P}_n$ la proposition: « pour tout intervalle I non vide, pour tous $y_1, \dots, y_n \in \mathcal{D}^{n-1}(I, \mathbb{C})$, si $\forall t \in I, W_n(y_1, \dots, y_n)(t) = 0$alors il existe un intervalle $J \subset I$ non vide tel que $\left((f_1)_{|J}, \dots, (f_n)_{|J}\right)$ est liée .».

► **Initialisation**
Soit I un intervalle non vide.
Soient $y_1, y_2 \in \mathcal{D}^1(I, \mathbb{C})$.
Supposons $W_2(y_1, y_2)(t) = 0$ pour tout $t \in I$.
▷ Si y_1 est identiquement nulle sur I alors on a bien (y_1, y_2) est liée.

▷ Sinon il existe $a \in I$ tel que $y_1(a) \neq 0$.
Par la question **1.1.** il existe donc un intervalle $J \subset I$ non vide tel que pour tout $t \in I$, $y_1(t) \neq 0$.
Par la question **1.4.** il existe donc un réel $c \in \mathbb{C}$ tel que pour tout $t \in J, y_2(t) = cy_1(t)$.
Dans tous les cas il existe donc un intervalle $J \subset I$ non vide tel que $(y_1)_{|J}, (y_2)_{|J}$ est liée.

► **Hérédité**
Soit $n \geq 3$. Supposons $\mathcal{P}_{n-1}$.
Soit I un intervalle non vide et $y_1, y_2, \dots, y_n \in \mathcal{D}^{n-1}(I, \mathbb{C})$ telles que

$$\forall t \in I,\ W_n(y_1, \dots, y_n)(t) = 0.$$

▷ Si y_1 est identiquement nulle sur I alors on a bien $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ est liée.
▷ Sinon il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $y_1(a) \neq 0$.
Par la question **1.1.** il existe donc un intervalle $J \subset I$ non vide tel que pour tout $t \in J$, $y_1(t) \neq 0$.
Par la question … on a donc

$$\forall t \in J,\ W_{n-1}\left(\left(\frac{y_2}{y_1}\right)', \dots, \left(\frac{y_n}{y_1}\right)'\right)(t) = 0.$$

Par $\mathcal{P}_{n-1}$ appliqué à J et aux fonctions $\left(\left(\frac{y_2}{y_1}\right)'_{|J}, \dots, \left(\frac{y_n}{y_1}\right)'_{|J}\right) \in \mathbb{D}^{n-2}(J, \mathbb{R})$ il existe donc un intervalle $K \subset J$ non vide tel que

$$\left(\left(\frac{y_2}{y_1}\right)'_{|K}, \dots, \left(\frac{y_n}{y_1}\right)'_{|K}\right) \text{ est liée.}$$

Soient $c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ non tous nuls tels que

$$\forall t \in K,\ \sum_{j=2}^{n} c_j \left(\frac{y_j}{y_1}\right)'(t) = 0$$

c'est-à-dire tel que

$$\forall t \in K,\ \left(\frac{\sum_{j=2}^{n} c_j y_j}{y_1}\right)'(t) = 0.$$

Comme K est un intervalle il existe donc c_1 tel que

$$\forall t \in K,\ \frac{\sum_{j=1}^{n} c_j y_j}{y_1}(t) = -c_1$$

c'est-à-dire

$$\forall t \in K,\ \sum_{j=1}^{n} c_j y_j(t) = 0.$$

Comme $c_2, \dots, c_n$ ne sont pas tous nuls, on a donc bien $(y_{1|K}, y_{2|K}, \dots, y_{n|K})$ est liée.
On a donc bien montré $\mathcal{P}_n$.

▷ **Conclusion**
Par récurrence on a bien montré que pour tout $n \geq 2$, pour tout intervalle non vide I, pour toutes fonctions $y_1, \dots, y_n \in \mathcal{D}^{n-1}(I, \mathbb{C})$, on a

$$\boxed{\forall t \in I,\ W_n(y_1, \dots, y_n)(t) = 0 \ \Rightarrow\ \left(\exists J \subset I \text{ intervalle non vide, } \left((f_1)_{|J}, \dots, (f_n)_{|J}\right) \text{ est liée }\right)}.$$

1.IV. Une condition suffisante de liaison

Dans cette partie on considère $y_1, \dots, y_n \in \mathcal{D}^{n-1}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et on suppose que

$$\forall t \in \mathbb{R},\ W_n(y_1, \dots, y_n)(t) = 0$$

1.12. Soit $t \in \mathbb{R}$.
Montrer que pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, on a

$$\sum_{j=1}^{n} y_j^{(i)}(t)\ (-1)^{n-j} W_{n-1}(y_1, \dots, y_{j-1}, y_{j+1}, \dots, y_n)(t) = 0.$$

Indication: on pourra poser $M = \begin{pmatrix} y_1^{(0)}(t) & \cdots & y_j^{(0)}(t) & \cdots & y_n^{(0)}(t) \\ y_1^{(1)}(t) & \cdots & y_j^{(1)}(t) & \cdots & y_n^{(1)}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-2)}(t) & \cdots & y_j^{(n-2)}(t) & \cdots & y_n^{(n-2)}(t) \\ y_1^{(n-1)}(t) & \cdots & y_j^{(n-1)}(t) & \cdots & y_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$ *et déterminer la dernière ligne de la comatrice de* M.

Soit $t \in \mathbb{R}$.
Notons pour simplifier

$$M = \begin{pmatrix} y_1^{(0)}(t) & \cdots & y_j^{(0)}(t) & \cdots & y_n^{(0)}(t) \\ y_1^{(1)}(t) & \cdots & y_j^{(1)}(t) & \cdots & y_n^{(1)}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-2)}(t) & \cdots & y_j^{(n-2)}(t) & \cdots & y_n^{(n-2)}(t) \\ y_1^{(n-1)}(t) & \cdots & y_j^{(n-1)}(t) & \cdots & y_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}.$$

On remarque que pour tout $j \in [\![1, n]\!]$ on a

$$\begin{aligned} \left(\operatorname{Com}(M)\right)_{nj} &= (-1)^{n-j} \begin{vmatrix} y_1^{(0)}(t) & \cdots & y_{j-1}^{(0)}(t) & y_{j+1}^{(0)}(t) & \cdots & y_n^{(0)}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-2)}(t) & \cdots & y_{j-1}^{(n-2)}(t) & y_{j+1}^{(n-2)}(t) & \cdots & y_n^{(n-2)}(t) \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{n-j} W_{n-1}(y_1, \ldots, y_{j-1}, y_{j+1}, \ldots, y_n)(t) \end{aligned}$$

Or par la formule de la comatrice on a

$$M \operatorname{Com}(M)^\top = W_n(y_1, \ldots, y_n)(t) I_n.$$

Et par nullité du wronskien on a donc

$$M \operatorname{Com}(M)^\top = 0.$$

En particulier, pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$ on a

$$\left(M \operatorname{Com}(M)^\top\right)_{i+1,\ n} = 0$$

c'est-à-dire

$$\sum_{j=1}^{n} y_j^{(i)}(t) \operatorname{Com}(M)_{nj} = 0$$

ce qui s'écrit donc

$$\boxed{\sum_{j=1}^{n} y_j^{(i)}(t)\ (-1)^{n-j} W_{n-1}(y_1, \ldots, y_{j-1}, y_{j+1}, \ldots, y_n)(t) = 0}.$$

1.13. En déduire que pour tout $i \in [\![0, n-2]\!]$, on a

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \sum_{j=1}^{n} y_j^{(i)}(t)\ (-1)^{n-j} \left(W_{n-1}(y_1, \ldots, y_{j-1}, y_{j+1}, \ldots, y_n)\right)'(t) = 0.$$

Soit $i \in [\![0, n-2]\!]$.
Par la question **1.12.** on a

$$\forall t \in \mathbb{R}, \sum_{j=1}^{n} y_j^{(i)}(t)\ (-1)^{n-j} W_{n-1}(y_1, \ldots, y_{j-1}, y_{j+1}, \ldots, y_n)(t) = 0.$$

Toutes les fonctions étant dérivables (car somme de produits de fonctions dérivables) on peut donc dériver cette égalité.
On a donc

$$\forall t \in \mathbb{R}, \sum_{j=1}^{n} y_j^{(i+1)}(t)\ (-1)^{n-j} \left(W_{n-1}(y_1, \ldots, y_{j-1}, y_{j+1}, \ldots, y_n)\right)(t) + \sum_{j=1}^{n} y_j^{(i)}(t)\ (-1)^{n-j} \left(W_{n-1}(y_1, \ldots, y_{j-1}, y_{j+1}, \ldots, y_n)\right)'(t) = 0.$$

Mais comme $i+1 \in [\![1, n-1]\!]$ on a, toujours par la question **1.12.**,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \sum_{j=1}^{n} y_j^{(i+1)}(t)\ (-1)^{n-j} W_{n-1}(y_1, \dots, y_{j-1}, y_{j+1}, \dots, y_n)(t) = 0.$$

On en déduit donc que

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \sum_{j=1}^{n} y_j^{(i)}(t)\ (-1)^{n-j} \left(W_{n-1}(y_1, \dots, y_{j-1}, y_{j+1}, \dots, y_n)\right)'(t) = 0}.$$

1.14. Soit $t \in \mathbb{R}$ et $j_0 \in [\![1, n-1]\!]$.
On pose pour tout $i \in [\![0, n-2]\!]$,

$$b_i(t) = (-1)^{j_0-1-i} \begin{vmatrix} y_1^{(0)}(t) & \cdots & y_{j_0-1}^{(0)}(t) & y_{j_0+1}^{(0)}(t) & \cdots & y_{n-1}^{(0)}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(i-1)}(t) & \cdots & y_{j_0-1}^{(i-1)}(t) & y_{j_0+1}^{(i-1)}(t) & \cdots & y_{n-1}^{(i-1)}(t) \\ y_1^{(i+1)}(t) & \cdots & y_{j_0-1}^{(i+1)}(t) & y_{j_0+1}^{(i+1)}(t) & \cdots & y_{n-1}^{(i+1)}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-2)}(t) & \cdots & y_{j_0-1}^{(n-2)}(t) & y_{j_0+1}^{(n-2)}(t) & \cdots & y_{n-1}^{(n-2)}(t) \end{vmatrix}$$

Soit $j \in [\![1, n]\!]$.
Exprimer sous forme d'un Wronskien de $n-1$ fonctions,

$$\sum_{i=0}^{n-2} y_j^{(i)}(t) b_i(t).$$

Par développement par rapport à la j_0-ème colonne on a

$$\begin{vmatrix} y_1^{(0)}(t) & \cdots & y_{j_0-1}^{(0)}(t) & y_j^{(0)} & y_{j_0+1}^{(0)}(t) & \cdots & y_{n-1}^{(0)}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(i-1)}(t) & \cdots & y_{j_0-1}^{(i-1)}(t) & y_j^{(i-1)} & y_{j_0+1}^{(i-1)}(t) & \cdots & y_{n-1}^{(i-1)}(t) \\ y_1^{(i)}(t) & \cdots & y_{j_0-1}^{(i)}(t) & y_j^{(i)} & y_{j_0+1}^{(i)}(t) & \cdots & y_{n-1}^{(i)}(t) \\ y_1^{(i+1)}(t) & \cdots & y_{j_0-1}^{(i+1)}(t) & y_j^{(i+1)} & y_{j_0+1}^{(i+1)}(t) & \cdots & y_{n-1}^{(i+1)}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-2)}(t) & \cdots & y_{j_0-1}^{(n-2)}(t) & y_j^{(n-2)} & y_{j_0+1}^{(n-2)}(t) & \cdots & y_{n-1}^{(n-2)}(t) \end{vmatrix} = \sum_{i=0}^{n-1} y_j^{(i)} \times (-1)^{j_0-(i+1)} \begin{vmatrix} y_1^{(0)}(t) & \cdots & y_{j_0-1}^{(0)}(t) & y_{j_0+1}^{(0)}(t) & \cdots & y_{n-1}^{(0)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(i-1)}(t) & \cdots & y_{j_0-1}^{(i-1)}(t) & y_{j_0+1}^{(i-1)}(t) & \cdots & y_{n-1}^{(i-1)} \\ y_1^{(i+1)}(t) & \cdots & y_{j_0-1}^{(i+1)}(t) & y_{j_0+1}^{(i+1)}(t) & \cdots & y_{n-1}^{(i+1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-2)}(t) & \cdots & y_{j_0-1}^{(n-2)}(t) & y_{j_0+1}^{(n-2)}(t) & \cdots & y_{n-1}^{(n-2)} \end{vmatrix}$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\sum_{i=0}^{n-2} y_j^{(i)}(t) b_i(t) = W_{n-1}(y_1, \dots, y_{j_0-1}, y_j, y_{j_0+1}, \dots, y_{n-1})(t)}.$$

On peut d'ailleurs simplifier le résultat:

- Si $j \in [\![1, n-1]\!]$, alors comme $(y_1, \dots, y_{j_0-1}, y_j, y_{j_0+1}, \dots, y_{n-1})$ est liée (car deux fois la même fonction) d'où le Wronskien est nul.
- Si $j = j_0$ alors il s'agit de $W_{n-1}(y_1, \dots, y_{j_0-1}, y_{j_0}, y_{j_0+1}, \dots, y_{n-1})$.
- Si $j = n$ alors il s'agit de $W_{n-1}(y_1, \dots, y_{j_0-1}, y_n, y_{j_0+1}, \dots, y_{n-1}, y_n)$ et en effectuant la permutation cyclique des $(n-1) - j_0 + 1$ dernières colonnes (de signature $(-1)^{n-j_0-1}$) on a

$$W_{n-1}(y_1, \dots, y_{j_0-1}, y_n, y_{j_0+1}, \dots, y_{n-1}) = (-1)^{n-j_0-1} W_{n-1}(y_1, \dots, y_{j_0-1}, y_{j_0+1}, \dots, y_{n-1}, y_n)$$

d'où

$$\boxed{\sum_{i=0}^{n-2} y_j^{(i)}(t) b_i(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \in [\![1, n-1]\!] \setminus \{j_0\} \\ W_{n-1}(y_1, \dots, y_{n-1})(t) & \text{si } j = j_0 \\ (-1)^{n-j_0-1} W_{n-1}(y_1, \dots, y_{j_0-1}, y_{j_0+1}, \dots, y_n)(t) & \text{si } j = n \end{cases}}$$

On suppose de plus dans les questions **1.15.** et **1.16.** que

$$\forall t \in \mathbb{R},\ W_{n-1}(y_1,\dots,y_{n-1})(t) \neq 0.$$

1.15. Montrer à l'aide des questions **1.13.**, **1.14.** et **1.4.** que

$$\forall j_0 \in [\![1, n-1]\!], \exists c_{j_0} \in \mathbb{C},\ \forall t \in \mathbb{R},\ W_{n-1}(y_1,\dots,y_{j_0-1},y_{j_0+1},\dots,y_n)(t) = c_{j_0} W_{n-1}(y_1,\dots,y_{n-1})(t).$$

Soit $j_0 \in [\![1, n-1]\!]$.
Par la question **1.13.** on a

$$\forall i \in [\![0, n-2]\!],\ \forall t \in \mathbb{R}, \sum_{j=1}^{n} y_j^{(i)}(t)(-1)^{n-j} \left(W_{n-1}(y_1,\dots,y_{j-1},y_{j+1},\dots,y_n)\right)'(t) = 0$$

et donc en notant b_i les fonctions de la question **1.14.** on a en particulier

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \sum_{i=0}^{n-2} \left(\sum_{j=1}^{n} y_j^{(i)}(t)(-1)^{n-j} \left(W_{n-1}(y_1,\dots,y_{j-1},y_{j+1},\dots,y_n)\right)'(t) \right) b_i(t) = 0$$

ce qui peut se réécrire par somme double,

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \sum_{j=1}^{n-1} \left(\sum_{i=0}^{n-2} y_j^{(i)}(t) b_i(t) \right) (-1)^{n-j} \left(W_{n-1}(y_1,\dots,y_{j-1},y_{j+1},\dots,y_n)\right)'(t) = 0.$$

Or par la question **1.14.** on a pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{i=0}^{n-2} y_j^{(i)}(t) b_i(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \in [\![1, n-1]\!] \backslash \{j_0\} \\ W_{n-1}(y_1,\dots,y_{n-1})(t) & \text{si } j = j_0 \\ (-1)^{n-j_0-1} W_{n-1}(y_1,\dots,y_{j_0-1},y_{j_0+1},\dots,y_n)(t) & \text{si } j = n \end{cases}$$

d'où

$$\forall t \in \mathbb{R},\ 0+(-1)^{n-j_0} W_{n-1}(y_1,\dots,y_{n-1})(t) \left(W_n(y_1,\dots,y_{j_0-1},y_{j_0+1},\dots,y_n)\right)'(t)+(-1)^{n-j_0-1} W_{n-1}(y_1,\dots,y_{j_0-1},y_{j_0+1},\dots,y_n$$

c'est-à-dire

$$\forall t \in \mathbb{R},\ W_2\big(W_{n-1}(y_1,\dots,y_{j_0-1},y_{j_0+1},\dots,y_n), W_{n-1}(y_1,\dots,y_{n-1})\big)(t) = 0.$$

Or on a supposé que

$$\forall t \in \mathbb{R},\ W_n(y_1,\dots,y_{n-1}) \neq 0.$$

Par la question **1.4.** on a donc

$$\boxed{\exists c_{j_0} \in \mathbb{C},\ \forall t \in \mathbb{R},\ W_{n-1}(y_1,\dots,y_{j_0-1},y_{j_0+1},\dots,y_n)(t) = c_{j_0} W_{n-1}(y_1,\dots,y_{n-1})(t)}.$$

1.16. Conclure que

$$(y_1,\dots,y_n) \text{ est liée.}$$

Fixons, d'après la question **1.15.** pour tout $j_0 \in [\![1, n-1]\!]$ un réel $c_{j_0} \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall t \in \mathbb{R},\ W_{n-1}(y_1,\dots,y_{j_0-1},y_{j_0+1},\dots,y_n)(t) = c_{j_0} W_{n-1}(y_1,\dots,y_{n-1})(t).$$

Par la question **1.12.** on a donc pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$,

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \sum_{j=1}^{n-1} y_j^{(i)}(t)\ c_j W_{n-1}(y_1,\dots,y_{n-1})(t) + y_n^{(i)}(t) W_{n-1}(y_1,\dots,y_{n-1}) = 0.$$

Or on a supposé que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $W_{n-1}(y_1,\dots,y_{n-1})(t) \neq 0$.
D'où (pour $i = 0$)

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{n-j} c_j\ y_j(t) + y_n(t) = 0.$$

Et donc ($1 \neq 0$)

$\boxed{(y_1, \dots, y_n) \text{ est liée}}$.

1.V. Application aux EDOs à forces centrales

On s'intéresse dans cette partie à un point matériel soumis à une force centrale et ne passant jamais par l'origine. Ainsi on considère une fonction $f : \mathbb{R}^3\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ continue et trois fonctions deux fois dérivables, $x, y, z \in \mathcal{D}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $(x(t), y(t), z(t)) \in \mathbb{R}^3\backslash\{0_{\mathbb{R}^3}\}$ et vérifiant

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \begin{pmatrix} x''(t) \\ y''(t) \\ z''(t) \end{pmatrix} = f(x(t), y(t), z(t)) \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}.$$

1.17. Montrer que $W_2(y, z)$, $-W_2(x, z)$ et $W_2(x, y)$ sont constantes.

En posant pour tout $t \in \mathbb{R}$, $a_0(t) = f(x(t), y(t), z(t))$ on a x, y, z solutions de

$$\forall t \in \mathbb{R}, \gamma''(t) + 0\gamma'(t) + a_0(t)\gamma(t) = 0.$$

Donc par la question **1.3.** on a donc

$$\forall t \in \mathbb{R},\ W_2(x, y)(t) = W_2(x, y)(0)e^{-\int_0^t 0 ds}$$

c'est-à-dire $\boxed{W_2(x, y) \text{ est constant}}$.

De même $\boxed{W_2(y, z) \text{ et } W_2(x, z) \text{ sont constants}}$.

Remarque: on aurait aussi pu interpréter le résultat en terme de produit vectoriel (conservation du moment).

En notant $u(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ on a

$$\begin{aligned} (u' \wedge u)' &= u'' \wedge u + u' \wedge u' \\ &= u'' \wedge u \\ &= 0 \end{aligned}$$

d'où les coordonnées de $u' \wedge u$ sont constantes, ce qui est bien le résultat recherché.

1.18. En déduire qu'il existe un plan vectoriel $\mathcal{P}$ tel que

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \in \mathcal{P}.$$

Constatons tout d'abord que comme $\begin{pmatrix} x''(t) \\ y''(t) \\ z''(t) \end{pmatrix}$ est colinéaire à $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$, on a donc

$$\forall t \in \mathbb{R},\ W_3(x, y, z)(t) = \begin{vmatrix} x(t) & y(t) & z(t) \\ x'(t) & y'(t) & z'(t) \\ x''(t) & y''(t) & z''(t) \end{vmatrix} = 0.$$

On procède par disjonction de cas.

- Si au moins un des trois Wronskiens $W_2(x, y)$, $W_2(y, z)$, $W_2(x, z)$ est une constante non nulle.
  Alors, quitte à permuter les fonctions x, y, z (ce qui conserve la nullité de W_3 au signe près et ne change pas le caractère lié), par la question **1.16.** on a (x, y, z) liée.
- Si $W_2(x, y)$, $W_2(y, z)$ et $W_2(x, z)$ sont tous nuls.
  Par la question **1.5.**, sur tout intervalle où x et y ne s'annulent pas simultanément on a (x, y) (et donc (x, y, z)) liée.
  De même sur tout intervalle où x et z ne s'annulent pas simultanément on a (x, z) (et donc (x, y, z)) liée et sur tout intervalle où y et z ne s'annulent pas simultanément on a (y, z) (et donc (x, y, z)) liée.
  Or par hypothèse on a x, y, z ne s'annulent pas tous simultanément.
  En adaptant la preuve de la question **1.5.** on montre alors (à faire si nécessaire) que (x, y, z) est liée.

Dans tous les cas on a donc (x, y, z) liée, est à dire qu'il existe $c_x, c_y, c_z \in \mathbb{R}^3$ non tous nuls tels que

$$\forall t \in \mathbb{R},\ c_x x(t) + c_y y(t) + c_z z(t) = 0.$$

Cela revient à dire que pour tout $t \in \mathbb{R}$ $x(t), y(t), z(t)$ est dans le plan d'équation $c_x x + c_y y + c_z z = 0$.

On a donc bien montré que $\boxed{\text{le mouvement est planaire}}$.