Intégrales de Wallis / Formule de Stirling

On portera une attention particulière à **la rédaction** et à **la propreté** de la copie.
En particulier tout **graphe ou schéma** pertinent et correctement annoté sera **valorisé**.
Les résultats devront être mis en valeur dès que possible.

Indiquez sur votre copie le temps approximatif pris pour le devoir.

Contexte

- L'exercice 1 (**obligatoire** et **très classique**) consiste en l'étude des intégrales de Wallis.
- Le problème 2 (**obligatoire**) démontre la formule de Stirling (**fait partie du cours**):

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

  - ▷ La partie 2.I illustre deux méthodes pour calculer des développements asymptotiques de sommes, une méthode de comparaison série/intégrale et une méthode d'étude de fonction.
  - ▷ La partie 2.II précise la méthode intégrale afin d'obtenir l'équivalent, au calcul d'une constante près.
  - ▷ La partie 2.III précise la méthode d'étude de fonction afin d'obtenir l'équivalent, au calcul d'une constante près.
  - ▷ La partie 2.IV utilise les intégrales de Wallis pour déterminer la valeur de cette constante.



Notations

Dans tout le sujet on utilisera les notations suivantes:

- Étant donnée une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on notera $\varepsilon_n = o_{n\to+\infty}(1)$ pour $\varepsilon_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

  Par exemple, pour deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$a_n = b_n + o_{n\to+\infty}(1)$$

  signifie que $u_n - v_n = o_{n\to+\infty}(1)$.
- Pour deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on notera

$$u_n \sim v_n$$

  pour

$$u_n = v_n(1 + o_{n\to+\infty}(1)).$$

On pourra aussi utiliser les propriétés suivantes:

- la relation $\sim$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$,
- pour toutes suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$,$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$,$(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$,

$$(u_n \sim a_n \text{ et } v_n \sim b_n) \Rightarrow u_n v_n \sim a_n b_n.$$

1. Très classique: Intégrales de Wallis

Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^n \mathrm{d}t.$$

1.I. Première relation

1.1. Calculer W_0, W_1 et W_2.
1.2. Montrer que la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive et décroissante.
1.3. Soit $n \in \mathbb{N}$. À l'aide d'une intégration par parties montrer que

$$W_{n+2} = 0 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n+1)\,(\cos(t))^n\,(\sin(t))^2 \mathrm{d}t.$$

1.4. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n}.$$

1.II. Équivalent

1.5. Montrer que,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (n+1)W_{n+1}W_n = \frac{\pi}{2}.$$

1.6. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sqrt{\frac{\pi}{2(n+1)}} \leq W_n \leq \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

1.7. Conclure que

$$W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

1.III. Quelques liens avec les factorielles

1.8. Soit $n \in \mathbb{N}$, exprimer à l'aide de la fonction factorielle les produits

$$\prod_{\substack{1\leq k\leq 2n\\ k \text{ pair}}} k \quad \text{et} \quad \prod_{\substack{1\leq k\leq 2n+1\\ k \text{ impair}}} k.$$

1.9. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$W_{2n} = \frac{\pi}{2}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$$

$$W_{2n+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

---

2. Cours: Équivalent de Stirling

Ce problème a pour objectif d'établir l'équivalent de Stirling:

$$\boxed{n! \sim \sqrt{2\pi}\sqrt{n}n^n e^{-n}}.$$

Les sous-sections 2.I, 2.II, et 2.III sont indépendantes entre elles.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \ln(k).$$

2.0. Montrer que **si**

$$S_n = n\ln(n) - n + \frac{1}{2}\ln(n) + \ln(\sqrt{2\pi}) + o_{n\to+\infty}(1)$$

alors

$$n! \sim \sqrt{2\pi}\sqrt{n}n^n e^{-n}.$$

2.I. Premières approches

2.I.1. Étude de fonction et télescopage

2.1. Montrer que pour tout $x \in]-1, +\infty[$,

$$\frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x.$$

2.2. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = S_n - (n\ln(n) - n).$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$0 \leq u_{n+1} - u_n \leq \frac{1}{n+1}.$$

2.3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$1 \leq u_n \leq 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1}.$$

2.4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k)$$

puis en déduire que

$$n\ln(n) - n + 1 \leq S_n \leq n\ln(n) - n + \ln(n) + 1.$$

2.I.2. Comparaison série/intégrale

2.5. Montrer que pour tout entier $k \geq 2$,

$$\int_{k-1}^{k} \ln(t)\mathrm{d}t \leq \ln(k) \leq \int_{k}^{k+1} \ln(t)\mathrm{d}t$$

et **illustrer cette inégalité par un schéma**.

2.6. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$0 + \int_1^n \ln(t)\mathrm{d}t \leq S_n \leq \int_1^n \ln(t)\mathrm{d}t + \ln(n)$$

et **illustrer cette inégalité par un schéma**.

2.7. Conclure que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$

$$n\ln(n) - n + 1 \leq S_n \leq n\ln(n) - n + \ln(n) + 1.$$

2.II. Comparaison série/intégrale II

2.8. Montrer que pour tout $k \geq 1$,

$$0 \leq \int_k^{k+1} \ln(t)\mathrm{d}t - \left(\frac{\ln(k) + \ln(k+1)}{2}\right) \leq \frac{1}{2k} - \frac{\ln(k+1) - \ln(k)}{2}$$

et **illustrer cette inégalité par un schéma**.

2.9. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{2k} - \frac{\ln(k+1) - \ln(k)}{2}\right) \leq \frac{1}{2}$$

et **illustrer cette inégalité par un schéma**.

2.10. En déduire que la suite

$$\left(\int_1^n \ln(t)\mathrm{d}t - \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{\ln(k) + \ln(k+1)}{2}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$$

est croissante et majorée.

2.11. Conclure qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que

$$S_n = n\ln(n) - n + \frac{1}{2}\ln(n) + C + o_{n\to+\infty}(1).$$

2.III. Étude de fonction et télescopage II

Petit extrait d'un sujet Agro

2.12. En effectuant une étude de fonction montrer que

$$\forall x \in [0,+\infty[,\ \ln(1+x) - \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right) \leq 0.$$

2.13. En effectuant une étude de fonction montrer que

$$\forall t \in]0,+\infty[,\ \ln(t+1) - \ln(t) \geq \frac{1}{t+\frac{1}{2}}.$$

2.14. Déduire des questions précédentes que

$$\forall x \in]0,+\infty[,\ \frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{2}} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \tag{1}$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose

$$g_n = \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - 1$$

2.15. En utilisant l'encadrement (1) montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leq g_n \leq \frac{1}{12n^2} + \frac{1}{6n^3}.$$

2.16. Montrer que pour tout $n \geq 2$, $\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} \leq \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$ et en déduire que

$$\forall n \geq 2,\ 0 \leq g_n \leq \frac{1}{6}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) \tag{2}$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose

$$u_n = \ln(n!) - \left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln(n) - n\right)$$

2.17. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$u_{n+1} - u_n = -g_n$$

2.18. Déduire des questions précédentes et de l'encadrement (2) que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et que

$$\forall n \geq 3,\ u_n \geq u_2 - \frac{1}{6}\sum_{k=2}^{n-1}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right).$$

2.19. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.
2.20. Conclure qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que

$$S_n = n\ln(n) - n + \frac{1}{2}\ln(n) + C + o_{n\to+\infty}(1).$$

2.IV. À la recherche de la constante

On a montré dans les sous-sections précédentes qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que

$$\sum_{k=1}^{n}\ln(k) = n\ln(n) - n + \frac{1}{2}\ln(n) + C + o_{n\to+\infty}(1).$$

2.21. À l'aide de l'exercice 1 montrer que $C = \ln(\sqrt{2\pi})$.