En cas d'erreur de corrigé, n'hésitez pas à me le signaler.

Contexte

- L'exercice 1 (**obligatoire** et **très classique**) consiste en l'étude des intégrales de Wallis.
- Le problème 2 (**obligatoire**) démontre la formule de Stirling (**fait partie du cours**):

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

  - ▷ La partie 2.I illustre deux méthodes pour calculer des développements asymptotiques de sommes, une méthode de comparaison série/intégrale et une méthode d'étude de fonction.
  - ▷ La partie 2.II précise la méthode intégrale afin d'obtenir l'équivalent, au calcul d'une constante près.
  - ▷ La partie 2.III précise la méthode d'étude de fonction afin d'obtenir l'équivalent, au calcul d'une constante près.
  - ▷ La partie 2.IV utilise les intégrales de Wallis pour déterminer la valeur de cette constante.



Notations

Dans tout le sujet on utilisera les notations suivantes:

- Étant donnée une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on notera $\varepsilon_n = o_{n\to+\infty}(1)$ pour $\varepsilon_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

  Par exemple, pour deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$a_n = b_n + o_{n\to+\infty}(1)$$

  signifie que $u_n - v_n = o_{n\to+\infty}(1)$.
- Pour deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on notera

$$u_n \sim v_n$$

  pour

$$u_n = v_n(1 + o_{n\to+\infty}(1)).$$

On pourra aussi utiliser les propriétés suivantes:

- la relation $\sim$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$,
- pour toutes suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$,$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$,$(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$,

$$(u_n \sim a_n \text{ et } v_n \sim b_n) \Rightarrow u_n v_n \sim a_n b_n.$$

1. Très classique: Intégrales de Wallis

Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^n \mathrm{d}t.$$

1.I. Première relation

1.1. Calculer W_0, W_1 et W_2.

- On a
$$W_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \mathrm{d}t$$
et donc
$$\boxed{W_0 = \frac{\pi}{2}}.$$
- On a
$$W_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) \mathrm{d}t = [\sin(t)]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
et donc
$$\boxed{W_1 = 1}.$$
- Par linéarisation on a
$$W_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\cos(2t)+1}{2}\right) \mathrm{d}t = \left[\frac{1}{4}\sin(2t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{\pi}{4}$$
et donc
$$\boxed{W_2 = \frac{\pi}{4}}.$$

1.2. Montrer que la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive et décroissante.

Soit $n \in \mathbb{N}$.
On a pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $0 \leq \cos(t) \leq 1$ et $\cos(t)^n \geq 0$, d'où on déduit

$$\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],\ 0 \leq \cos(t)^{n+1} \leq \cos(t)^n.$$

En intégrant (par croissance de l'intégrale) on obtient donc

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 0 \mathrm{d}t \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)^{n+1} \mathrm{d}t \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)^n \mathrm{d}t$$

c'est à dire

$$0 \leq W_{n+1} \leq W_n.$$

On a donc bien montré que $\boxed{(W_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est positive et décroissante}}$.

1.3. Soit $n \in \mathbb{N}$. À l'aide d'une intégration par parties montrer que

$$W_{n+2} = 0 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n+1)\left(\cos(t)\right)^n \left(\sin(t)\right)^2 \mathrm{d}t.$$

On a les fonctions $u\colon t \mapsto \cos(t)^{n+1}$ et $v\colon t \mapsto \cos(t)$ sont dérivables de dérivées continues, et donc par **intégration par parties**

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\cos(t)^{n+1}}_{u(t)} \underbrace{\cos(t)}_{v'(t)} \mathrm{d}t = \left[\underbrace{\cos(t)^{n+1}}_{u(t)} \underbrace{\sin(t)}_{v(t)}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{(n+1)(-\sin(t))\cos(t)^n}_{u'(t)} \underbrace{\sin(t)}_{v(t)} \mathrm{d}t$$

et comme

$$\left[\cos(t)^{n+1}\sin(t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0^{n+1} \times 1 - 1^{n+1} \times 0 = 0$$

on obtient donc

$$\boxed{W_{n+2} = 0 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n+1)\left(\cos(t)\right)^n \left(\sin(t)\right)^2 \mathrm{d}t}.$$

1.4. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$.
Comme pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\sin(t)^2 = 1 - \cos(t)^2$, de la question précédente et de la linéarité de l'intégrale on déduit que

$$\begin{aligned} W_{n+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n+1)\left(\cos(t)^n - \cos(t)^{n+2}\right) \mathrm{d}t \\ &= (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)^n \mathrm{d}t - (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)^{n+2} \mathrm{d}t \quad = (n+1)W_n - (n+1)W_{n+2}. \end{aligned}$$

Et l'égalité $W_{n+2} = (n+1)W_n - (n+1)W_{n+2}$ équivaut bien à

$$\boxed{(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n}.$$

1.II. Équivalent

1.5. Montrer que,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (n+1)W_{n+1}W_n = \frac{\pi}{2}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question **1.4.** on a

$$(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$$

et en multipliant l'égalité par W_{n+1} on obtient

$$(n+2)W_{n+2}W_{n+1} = (n+1)W_{n+1}W_n.$$

La suite $\left((n+1)W_{n+1}W_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc **constante**.
Comme d'après **1.1.**

$$(0+1)W_1W_0 = \frac{\pi}{2}$$

on en déduit donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ (n+1)W_{n+1}W_n = \frac{\pi}{2}}.$$

1.6. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sqrt{\frac{\pi}{2(n+1)}} \leq W_n \leq \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Par monotonie et positivité de $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on a $0 \leq W_{n+1} \leq W_n$ et donc, par produit d'inégalités positives

$$\begin{aligned} W_nW_{n+1} &\leq W_n^2 \\ W_n^2 &\leq W_nW_{n-1} \end{aligned}.$$

Or par la question **1.5.**

$$\begin{aligned} W_nW_{n+1} &= \frac{\pi}{2(n+1)} \\ W_nW_{n-1} &= \frac{\pi}{2((n-1)+1)} \end{aligned}.$$

On en déduit donc

$$0 \leq \frac{\pi}{2(n+1)} \leq W_n^2 \leq \frac{\pi}{2n}$$

et comme la fonction $\xi \mapsto \sqrt{\xi}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et que $W_n \geq 0$ on a donc

$$\boxed{\sqrt{\frac{\pi}{2(n+1)}} \leq W_n \leq \sqrt{\frac{\pi}{2n}}}.$$

1.7. Conclure que

$$W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

Comme pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sqrt{\frac{\pi}{2n}} > 0$ on déduit de la question précédente

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{n}{n+1} \leq \frac{W_n}{\sqrt{\frac{\pi}{2n}}} \leq 1$$

et comme $\frac{n}{n+1} \to 1$ et $1 \to 1$ lorsque $n \to +\infty$, par le théorème des gendarmes,

$$\frac{W_n}{\sqrt{\frac{\pi}{2n}}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

c'est à dire

$$\boxed{W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}}.$$

1.III. Quelques liens avec les factorielles

1.8. Soit $n \in \mathbb{N}$, exprimer à l'aide de la fonction factorielle les produits

$$\prod_{\substack{1\leq k\leq 2n\\ k \text{ pair}}} k \quad \text{et} \quad \prod_{\substack{1\leq k\leq 2n+1\\ k \text{ impair}}} k.$$

- On a (comme $j \mapsto 2j$ est une bijection de $[\![1,n]\!]$ vers $\{k \in [\![1,2n]\!] \mid k \text{ pair}\}$)

$$\prod_{\substack{1\leq k\leq 2n\\ k \text{ pair}}} k = \prod_{j=1}^{n}(2j) \quad = 2^n \prod_{j=1}^{n} j$$

et donc

$$\boxed{\prod_{\substack{1\leq k\leq 2n\\ k \text{ pair}}} k = 2^n n!}$$

- Comme l'ensemble des entiers pairs et impairs forment une partition de l'ensemble des entiers on a

$$\prod_{\substack{1\leq k\leq 2n\\ k \text{ pair}}} k \times \prod_{\substack{1\leq k\leq 2n+1\\ k \text{ impair}}} k = \prod_{1\leq k\leq (2n+1)} k = (2n+1)!$$

et donc

$$\boxed{\prod_{\substack{1\leq k\leq 2n+1\\ k \text{ impair}}} k = \frac{(2n+1)!}{2^n n!} = \frac{(2(n+1))!}{2^{n+1}(n+1)!}}.$$

1.9. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$W_{2n} = \frac{\pi}{2}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$$

$$W_{2n+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

L'égalité de la question **1.4.** se réécrit pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n.$$

- On a donc
$$\forall k \in \mathbb{N},\ W_{2(k+1)} = \frac{2k+1}{2k+2} W_{2k}$$
et donc par récurrence immédiate, ou par le produit télescopique (pour $n \in \mathbb{N}$)
$$\frac{W_{2n}}{W_0} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{W_{2(k+1)}}{W_{2k}}$$
on en déduit
$$\forall n \in \mathbb{N},\ W_{2n} = W_0 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{2k+1}{2k+2}.$$
On en déduit donc que pour tout $n \in \mathbb{N}$, comme $W_0 = \frac{\pi}{2}$ et d'après la question **1.8.**
$$\begin{aligned} W_{2n} &= \frac{\pi}{2} \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1)}{\prod_{k=0}^{n-1}(2k+2)} \\ &= \frac{\pi}{2} \frac{\frac{(2n)!}{2^n n!}}{2^n (n)!} \end{aligned}$$
et donc
$$\boxed{W_{2n} = \frac{\pi}{2} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}}.$$
- De même on a
$$\forall k \in \mathbb{N},\ W_{2(k+1)+1} = \frac{2k+2}{2k+3} W_{2k+1}$$
et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\begin{aligned} W_{2n+1} &= W_1 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{W_{2(k+1)+1}}{W_{2k+1}} \\ &= 1 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{2k+2}{2k+3} \\ &= \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(2k+2)}{\prod_{k=0}^{n-1}(2k+3)} \\ &= \frac{2^n n!}{\frac{(2n+1)!}{2^n n!}} \end{aligned}$$
et donc
$$\boxed{W_{2n+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}}.$$
(On aurait aussi pu utiliser $W_{2n} W_{2n+1} = \frac{\pi}{2(2n+1)}$ pour déterminer une expression à partir de l'autre).

---

2. Cours: Équivalent de Stirling

Ce problème a pour objectif d'établir l'équivalent de Stirling:

$$\boxed{n! \sim \sqrt{2\pi}\sqrt{n} n^n e^{-n}}.$$

Les sous-sections 2.I, 2.II, et 2.III sont indépendantes entre elles.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \ln(k).$$

2.0. Montrer que **si**

$$S_n = n\ln(n) - n + \frac{1}{2}\ln(n) + \ln(\sqrt{2\pi}) + o_{n\to+\infty}(1)$$

alors

$$n! \sim \sqrt{2\pi}\sqrt{n}n^n e^{-n}.$$

Supposons que

$$\sum_{k=1}^{n} \ln(k) = n\ln(n) - n + \frac{1}{2}\ln(n) + \ln(\sqrt{2\pi}) + o_{n\to+\infty}(1).$$

On remarque que pour tout $n \geq 1$

$$\ln(n!) = \ln(\prod_{k=1}^{n} k) = \sum_{k=1}^{n} \ln(k).$$

D'où le développement asymptotique se réécrit

$$\ln(n!) = n\ln(n) - n + \frac{1}{2}\ln(n) + \ln(\sqrt{2\pi}) + o_{n\to+\infty}(1)$$

ce qui donne en composant par exp,

$$n! = \exp\left(n\ln(n) - n + \frac{1}{2}\ln(n) + \ln(\sqrt{2\pi}) + o_{n\to+\infty}(1)\right)$$

ou encore

$$n! = \underbrace{\exp\left(n\ln(n)\right)}_{n^n}\underbrace{\exp\left(-n\right)}_{e^{-n}}\underbrace{\exp\left(\frac{1}{2}\ln(n)\right)}_{\sqrt{n}}\underbrace{\exp\left(\ln(\sqrt{2\pi})\right)}_{\sqrt{2\pi}}\underbrace{\exp\left(o_{n\to+\infty}(1)\right)}_{1+o_{n\to+\infty}(1)}.$$

car $e^x \to 1$ quand $x \to 0$ c'est à dire

$$\exp\left(o_{n\to+\infty}(1)\right) = 1 + o_{n\to+\infty}(1).$$

On en déduit donc bien

$$\boxed{n! \sim \sqrt{2\pi}\sqrt{n}n^n e^{-n}}.$$

2.I. Premières approches

2.I.1. Étude de fonction et télescopage

2.1. Montrer que pour tout $x \in]-1, +\infty[$,

$$\frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x.$$

- Pour montrer que pour tout $x > -1$, $\ln(1+x) \leq x$ on effectue une **étude de fonction** (déjà effectuée de très nombreuses fois, cf autres corrections).
- Pour l'autre inégalité on peut effectuer une étude de fonction ou bien remarquer que, pour tout $x > -1$

$$\forall x > -1, \ln(1+x) = -\ln\left(\frac{1}{1+x}\right) = -\ln\left(1 - \frac{x}{1+x}\right)$$

et que comme $-\frac{x}{1+x} > -1$ on a $\ln\left(1 - \frac{x}{1+x}\right) \leq -\frac{x}{1+x}$ d'où

$$\boxed{\frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x)}$$

2.2. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = S_n - \left(n\ln(n) - n\right).$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$0 \leq u_{n+1} - u_n \leq \frac{1}{n+1}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= (S_{n+1} - S_n) - ((n+1)\ln(n+1) - n\ln(n)) + ((n+1) - n) \\ &= -n\ln(n+1) + n\ln(n) + 1 \\ &= 1 - n\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

De plus par la question **2.1.**, on a

$$\frac{1/n}{1+1/n} \leq \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}$$

et donc

$$-\frac{n}{n+1} \geq -n\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \geq -1$$

d'où

$$1 - \frac{n}{n+1} \geq 1 - n\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \geq 0$$

ce qui équivaut bien à

$$\boxed{0 \leq u_{n+1} - u_n \leq \frac{1}{n+1}}.$$

2.3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$1 \leq u_n \leq 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$.
On a en sommant l'inégalité précédente,

$$\sum_{k=1}^{n-1} 0 \leq \sum_{k=1}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1}$$

et par **somme téléscopique**,

$$0 \leq u_n - u_1 \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1}.$$

et donc comme $u_1 = 1$,

$$\boxed{1 \leq u_n \leq 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1}}.$$

2.4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k)$$

puis en déduire que

$$n\ln(n) - n + 1 \leq S_n \leq n\ln(n) - n + \ln(n) + 1.$$

On remarque que l'on a déjà montré dans les questions précédentes que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{k+1} = \frac{1/k}{1+1/k} \leq \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \ln(k+1) - \ln(k).$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
En sommant les inégalités précédentes puis par somme télescopique on obtient donc

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leq \sum_{k=1}^{n-1} (\ln(k+1) - \ln(k)) = \ln(n) - \ln(1).$$

D'où

$$u_n \leq 1 + \ln(n) - 0$$

et par définition de u_n, on a donc

$$\boxed{n\ln(n) - n + 1 \leq S_n \leq n\ln(n) - n + \ln(n) + 1}.$$

2.I.2. Comparaison série/intégrale

2.5. Montrer que pour tout entier $k \geq 2$,

$$\int_{k-1}^{k} \ln(t)\mathrm{d}t \leq \ln(k) \leq \int_{k}^{k+1} \ln(t)\mathrm{d}t$$

et **illustrer cette inégalité par un schéma**.

Soit $k \geq 1$.
La fonction ln étant croissante sur $]0, +\infty[$, elle l'est sur $[k, k+1]$ et donc

$$\forall t \in [k, k+1], \quad \ln(k) \leq \ln(t) \leq \ln(k+1).$$

En intégrant sur $[k, k+1]$ (par croissance de l'intégrale) on obtient

$$\int_{k}^{k+1} \ln(k)\mathrm{d}t \leq \int_{k}^{k+1} \ln(t)\mathrm{d}t \leq \int_{k}^{k+1} \ln(k+1)\mathrm{d}t.$$

Et donc

$$\boxed{\forall k \geq 1,\ \ln(k) \leq \int_{k}^{k+1} \ln(t)\mathrm{d}t \leq \ln(k+1).}$$

On en déduit donc que

$$\boxed{\forall k \geq 2,\ \int_{k-1}^{k} \ln(t)\mathrm{d}t \leq \ln(k) \leq \int_{k}^{k+1} \ln(t)\mathrm{d}t.}$$

2.6. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$0 + \int_{1}^{n} \ln(t)\mathrm{d}t \leq S_n \leq \int_{1}^{n} \ln(t)\mathrm{d}t + \ln(n)$$

et **illustrer cette inégalité par un schéma**.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
En **sommant l'inégalité 2.5.** pour k allant de 2 à $n-1$ on obtient

$$\sum_{k=2}^{n-1} \int_{k-1}^{k} \ln(t)\mathrm{d}t \leq \sum_{k=2}^{n-1} \ln(k) \leq \sum_{k=2}^{n-1} \int_{k}^{k+1} \ln(t)\mathrm{d}t$$

c'est à dire par Chasles

$$\int_{1}^{n-1} \ln(t)\mathrm{d}t \leq \sum_{k=2}^{n-1} \ln(k) \leq \int_{2}^{n} \ln(t)\mathrm{d}t.$$

De plus, $S_n = \ln(1) + \sum_{k=2}^{n-1} \ln(k) + \ln(n)$ et toujours par **2.5.**

$$0 \leq \ln(1) \leq \int_{1}^{2} \ln(t)\mathrm{d}t$$

et

$$\int_{n-1}^{n} \ln(t)\mathrm{d}t \leq \ln(n) \leq \ln(n)$$

ce qui permet alors de conclure

$$\boxed{0 + \int_{1}^{n} \ln(t)\mathrm{d}t \leq S_n \leq \int_{1}^{n} \ln(t)\mathrm{d}t + \ln(n)}.$$

2.7. Conclure que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$

$$n\ln(n) - n + 1 \leq S_n \leq n\ln(n) - n + \ln(n) + 1.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On a

$$\begin{aligned}\int_1^n \ln(t)\mathrm{d}t &= [t\ln(t)-t]_1^n \\ &= n\ln(n)-n+1\end{aligned}$$

et donc

$$\boxed{n\ln(n)-n+1 \leq S_n \leq n\ln(n)-n+\ln(n)+1}.$$

Remarque: la méthode utilisée pour obtenir l'encadrement est extrêmement classique.
Malheureusement ce n'est pas suffisant pour conclure quand à l'équivalent proposé. En effet on obtient

$$S_n = n\ln(n)-n+O_{n\to+\infty}(\ln(n))$$

ce qui n'est pas assez précis.

2.II. Comparaison série/intégrale II

2.8. Montrer que pour tout $k \geq 1$,

$$0 \leq \int_k^{k+1} \ln(t)\mathrm{d}t - \left(\frac{\ln(k)+\ln(k+1)}{2}\right) \leq \frac{1}{2k} - \frac{\ln(k+1)-\ln(k)}{2}$$

et **illustrer cette inégalité par un schéma**.

Soit $k \geq 1$.
Comme ln est une fonction **concave** sur $[k, k+1]$ et est dérivable en k de nombre dérivé $\frac{1}{k}$, on a pour tout $t \in [k, k+1]$ (inégalité des pentes : le graphe d'une fonction concave est au-dessus de ses cordes et en dessous de ses tangentes)

$$\underbrace{(\ln(k+1)-\ln(k))\,(t-k)+\ln(k)}_{\text{corde entre } k \text{ et } k+1} \leq \ln(t) \leq \underbrace{\frac{1}{k}(t-k)+\ln(k)}_{\text{tangente en } k}.$$

(Sans utiliser la concavité on peut aussi effectuer deux études de fonctions, étude nécessitant alors de dériver deux fois les fonctions pour obtenir un signe constant puis conclure.)
En intégrant l'inégalité (croissance de l'intégrale) pour t allant de k à $k+1$ on en déduit

$$\int_k^{k+1} ((\ln(k+1)-\ln(k))(t-k)+\ln(k))\,\mathrm{d}t \leq \int_k^{k+1} \ln(t)\mathrm{d}t \leq \int_k^{k+1} \left(\frac{1}{k}(t-k)+\ln(k)\right)\mathrm{d}t$$

c'est à dire (aire d'un trapèze)

$$\frac{\ln(k+1)-\ln(k)}{2} + \ln(k) \leq \int_k^{k+1} \ln(t)\mathrm{d}t \leq \frac{1}{2k} + \ln(k).$$

On obtient donc bien, en retranchant $\frac{\ln(k)+\ln(k+1)}{2}$,

$$\boxed{0 \leq \int_k^{k+1} \ln(t)\mathrm{d}t - \left(\frac{\ln(k)+\ln(k+1)}{2}\right) \leq \frac{1}{2k} - \frac{\ln(k+1)-\ln(k)}{2}}.$$

2.9. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{2k} - \frac{\ln(k+1)-\ln(k)}{2}\right) \leq \frac{1}{2}$$

et **illustrer cette inégalité par un schéma**.

On a pour tout $k \geq 1$,

$$\frac{1}{k} \geq \frac{\ln(k+1)-\ln(k)}{1} \geq \frac{1}{k+1}.$$

En effet il s'agit au choix d'une inégalité des pentes pour la fonction concave ln ou de l'égalité de la question **2.1.** pour $x = \frac{1}{k}$.
On en déduit que pour tout $k \geq 1$,

$$0 \leq \frac{1}{2k} - \frac{\ln(k+1)-\ln(k)}{2} \leq \frac{1}{2k} - \frac{1}{2(k+1)}$$

et donc par somme d'inégalités

$$0 \leq \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{2k} - \frac{\ln(k+1)-\ln(k)}{2}\right) \leq \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{2k} - \frac{1}{2(k+1)}\right)$$

ce qui donne bien par somme télescopique

$$0 \leq \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{2k} - \frac{\ln(k+1)-\ln(k)}{2}\right) \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}$$

et donc

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{2k} - \frac{\ln(k+1)-\ln(k)}{2}\right) \leq \frac{1}{2}}.$$

2.10. En déduire que la suite

$$\left(\int_1^n \ln(t)\mathrm{d}t - \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{\ln(k)+\ln(k+1)}{2}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$$

est croissante et majorée.

Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\delta_n = \int_1^n \ln(t)\mathrm{d}t - \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{\ln(k)+\ln(k+1)}{2}\right).$$

On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\delta_{n+1} - \delta_n = \int_n^{n+1} \ln(t)\mathrm{d}t - \frac{\ln(n)+\ln(n+1)}{2}$$

et donc d'après la question **2.8.**

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq \delta_{n+1} - \delta_n \leq \frac{1}{2n} - \frac{\ln(n+1)-\ln(n)}{2}.$$

- De $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq \delta_{n+1} - \delta_n$ on déduit que la suite est $\boxed{\text{croissante}}$.
- De $\forall k \in \mathbb{N}^*, \delta_{k+1} - \delta_k \leq \frac{1}{2k} - \frac{\ln(k+1)-\ln(k)}{2}$ on déduit par somme d'inégalités et télescopage que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\delta_n = \underbrace{\delta_1}_{=0} + \sum_{k=1}^{n-1}(\delta_{k+1} - \delta_k) \leq \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{2k} - \frac{\ln(k+1)-\ln(k)}{2}\right)$$

et donc par **2.9.** on a donc

$$\delta_n \leq \frac{1}{2}.$$

En particulier la suite est bien $\boxed{\text{majorée}}$.

2.11. Conclure qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que

$$S_n = n\ln(n) - n + \frac{1}{2}\ln(n) + C + o_{n\to+\infty}(1).$$

Toujours avec la même notation ($\delta_n = \int_1^n \ln(t)\mathrm{d}t - \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{\ln(k)+\ln(k+1)}{2}\right)$) on a montré que $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée.
Par convergence monotone elle est donc convergente. Notons $\kappa \in \mathbb{R}$ sa limite.
On a alors

$$\delta_n = \kappa + o_{n\to+\infty}(1).$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

- $$\int_1^n \ln(t)\mathrm{d}t = [t\ln(t) - t]_1^n = n\ln(n) - n + 1$$
- Par exemple par télescopage,

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{\ln(k)+\ln(k+1)}{2}\right) = \sum_{k=1}^{n-1}\left(\ln(k) + \frac{1}{2}(\ln(k+1) - \ln(k))\right) = \sum_{k=1}^{n-1}\ln(k) + \frac{1}{2}(\ln(n) - \ln(1))$$
$$= \sum_{k=1}^{n}\ln(k) - \frac{1}{2}\ln(n)$$

et donc

$$\delta_n = n\ln(n) - n + 1 - \left(S_n - \frac{1}{2}\ln(n)\right).$$

On en déduit donc

$$S_n = n\ln(n) - n + \frac{1}{2}\ln(n) - \kappa + 1 + o_{n\to+\infty}(1)$$

et donc (avec $C = 1 - \kappa$)

$$\boxed{S_n = n\ln(n) - n + \frac{1}{2}\ln(n) + C + o_{n\to+\infty}(1)}.$$

2.III. Étude de fonction et télescopage II

Petit extrait d'un sujet Agro

2.12. En effectuant une étude de fonction montrer que

$$\forall x \in [0,+\infty[,\ \ln(1+x) - \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right) \leq 0.$$

Soit F définie par

$$F : \begin{array}{l} [0,+\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \ln(1+x) - \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right) \end{array}$$

On a alors que F est dérivable 4 fois comme fonction usuelle et

- On a $F(0) = 0$. De plus
$$\forall x \in [0,+\infty[,\ F'(x) = \frac{1}{1+x} - \left(1 - x + x^2\right)$$
- En particulier $F'(0) = 0$ et en dérivant
$$\forall x \in [0,+\infty[,\ F''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} - (-1+2x)$$
- En particulier $F''(0) = 0$ et en dérivant
$$\forall x \in [0,+\infty[,\ F'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3} - 2$$
- Comme $\forall x \geq 0,\ 1 + x \geq 1 > 0$, par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$
$$\forall x \in [0,+\infty[,\ F'''(x) \leq 0$$

Ainsi $F'''(x) \leq 0$; comme $F''(0) = 0$, la fonction F'' décroît à partir de 0 donc reste ≤ 0, puis (comme $F'(0) = 0$) F' décroît à partir de 0 donc reste ≤ 0, et enfin F décroît à partir de $F(0) = 0$. On obtient donc le tableau de variations suivant (les limites en $+\infty$ se déduisant des croissances comparées)

x	0		$+\infty$
$F'''(x)$	0	$-$	
$F''(x)$	0	$\searrow$	$-\infty$
$F'(x)$	0	$\searrow$	$-\infty$
$F(x)$	0	$\searrow$	$-\infty$

duquel on déduit en particulier que

$$\forall x \geq 0, F(x) \leq 0$$

c'est à dire

$$\boxed{\forall x \geq 0,\ \ln(1+x) - \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right) \leq 0}.$$

2.13. En effectuant une étude de fonction montrer que

$$\forall t \in]0, +\infty[,\ \ln(t+1) - \ln(t) \geq \frac{1}{t+\frac{1}{2}}.$$

Soit G définie par

$$G : \begin{array}{c}]0,+\infty[\to \mathbb{R} \\ t \mapsto \ln(t+1) - \ln(t) - \dfrac{1}{t+\frac{1}{2}} \end{array}$$

alors G est dérivable sur son ensemble de définition et

$$\begin{aligned} \forall t > 0,\ G'(t) &= \frac{1}{t+1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2} \\ &= \frac{t(t+1) - \left(t+\frac{1}{2}\right)^2}{t(t+1)\left(t+\frac{1}{2}\right)^2} \\ &= \frac{-\frac{1}{4}}{t(t+1)\left(t+\frac{1}{2}\right)^2} \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

Donc G est décroissante sur $]0,+\infty[$.
De plus pour tout $t \geq 0$ on a $G(t) = \ln\left(1+\frac{1}{t}\right) - \frac{1}{t+\frac{1}{2}}$ et comme (par continuité de ln)

$$\lim_{t\to+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{t}\right) = \ln(1) = 0$$

et

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t+\frac{1}{2}} = 0$$

la fonction G admet une limite en $+\infty$ qui est

$$\lim_{t\to+\infty} G(t) = 0.$$

De plus, lorsque $t \to 0^+$, $\ln\left(1+\frac{1}{t}\right) \to +\infty$ et $\frac{1}{t+\frac{1}{2}} \to 2$ donc $G(t) \to +\infty$. Cela permet de dresser le tableau de variations suivant

t	0		$+\infty$
$G'(t)$	‖	$-$	
$G(t)$	$+\infty$	↘	0

La fonction G étant décroissante de limite nulle en $+\infty$, elle est positive sur $]0,+\infty[$; on obtient en particulier

$$\boxed{\forall t \in]0,+\infty[,\ \ln(t+1)-\ln(t) \geq \frac{1}{t+\frac{1}{2}}}.$$

2.14. Déduire des questions précédentes que

$$\forall x \in]0,+\infty[,\ \frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{2}} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \tag{1}$$

D'après la question **2.12.** on a en particulier

$$\forall x \in]0,+\infty[,\ \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}.$$

De plus pour tout $x > 0$, comme $\frac{1}{x}$ on a de par la question **2.13.**

$$\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \ln\left(\frac{1}{x}\right) \geq \frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{2}}$$

c'est à dire comme $\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \ln\left(\frac{1}{x}\right) = \ln(1+x)$

$$\frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{2}} \leq \ln(1+x)$$

et on obtient donc bien

$$\boxed{\forall x \in]0,+\infty[,\ \frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{2}} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}}. \tag{2}$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose

$$g_n = \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - 1$$

2.15. En utilisant l'encadrement (2) montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leq g_n \leq \frac{1}{12n^2} + \frac{1}{6n^3}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- **Minoration**: D'après (2) on a en particulier pour tout $x > 0$

$$\frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{2}} \leq \ln(1+x)$$

Avec $x = \frac{1}{n} > 0$ on obtient donc

$$0 \leq \frac{1}{n+\frac{1}{2}} \leq \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

et comme tous les termes sont positifs on en déduit

$$1 \leq \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

ce qui donne donc

$$0 \leq \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-1.$$

On a donc bien montré

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leq g_n}.$$

- **Majoration** D'après (2) on a en particulier pour tout $x > 0$

$$\ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

Avec $x = \frac{1}{n} > 0$ on obtient donc

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \leq \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3}\right)$$

et comme $n + \frac{1}{2}$ est positif

$$\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \leq \left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3}\right).$$

De plus

$$\begin{aligned}\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3}\right) &= 1 + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{n} + \left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\right)\frac{1}{n^2} + \frac{1}{6}\frac{1}{n^3} \\ &= 1 + \frac{1}{12}\frac{1}{n^2} + \frac{1}{6}\frac{1}{n^3}\end{aligned}$$

donc

$$\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \leq 1 + \frac{1}{12}\frac{1}{n^2} + \frac{1}{6}\frac{1}{n^3}$$

et donc

$$\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - 1 \leq \frac{1}{12n^2} + \frac{1}{6n^3}.$$

On a donc bien montré

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ g_n \leq \frac{1}{12n^2} + \frac{1}{6n^3}}.$$

2.16. Montrer que pour tout $n \geq 2$, $\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} \leq \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$ et en déduire que

$$\forall n \geq 2,\ 0 \leq g_n \leq \frac{1}{6}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) \tag{3}$$

Soit $n \geq 2$.
Alors

$$\begin{aligned}\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} - \left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}\right) &= \frac{n^3 - (n-1)n^2 - (n-1)n - (n-1)}{(n-1)n^3} \\ &= \frac{1}{(n-1)n^3} \\ &\geq 0\end{aligned}$$

et donc

$$\boxed{\forall n \geq 2,\ \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} \leq \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}}.$$

Par la question **2.15.** on a $gn \geq 0$, et comme $\frac{1}{12n^2} \leq \frac{1}{6n^2}$ on

$$\begin{aligned}g_n &\leq \frac{1}{12n^2} + \frac{1}{6n^3} \\ &\leq \frac{1}{6n^2} + \frac{1}{6n^3}.\end{aligned}$$

Enfin par l'inégalité que l'on vient de montrer on a

$$\frac{1}{6}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}\right) \leq \frac{1}{6}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right).$$

Des deux inégalités précédentes on déduit que $g_n \leq \frac{1}{6}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)$.
D'où, finalement,

$$\boxed{\forall n \geq 2,\ 0 \leq g_n \leq \frac{1}{6}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)}. \tag{4}$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose

$$u_n = \ln(n!) - \left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln(n) - n\right)$$

2.17. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$u_{n+1} - u_n = -g_n$$

On a les égalités suivantes

$$\ln((n+1)!) - \ln(n!) = \ln\left(\frac{(n+1)!}{n!}\right) = \ln(n+1)$$

$$(n+1) - n = 1.$$

et

$$\begin{aligned}\left(n+1+\frac{1}{2}\right)\ln(n+1) - \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln(n) &= \left(n+\frac{1}{2}\right)(\ln(n+1)-\ln(n)) + \ln(n+1)\\ &= \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ln(n+1).\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}u_{n+1} - u_n &= \ln(n+1) - \left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ln(n+1)\right) + 1\\ &= -\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + 1\end{aligned}$$

c'est à dire

$$\boxed{u_{n+1} - u_n = -g_n}.$$

2.18. Déduire des questions précédentes et de l'encadrement (4) que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et que

$$\forall n \geq 3,\ u_n \geq u_2 - \frac{1}{6}\sum_{k=2}^{n-1}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right).$$

D'après l'encadrement (4) on a pour tout $k \geq 2$

$$0 \leq g_k \leq \frac{1}{6}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)$$

et donc

$$-\frac{1}{6}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right) \leq -g_k \leq 0.$$

Donc d'après la question précédente, pour tout $k \geq 2$ on a

$$-\frac{1}{6}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right) \leq u_{k+1} - u_k \leq 0.$$

Comme $u_2 \leq u_1$ on déduit donc

- Comme pour tout k, $u_{k+1} - u_k \leq 0$, $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante}}$.
- Soit $n \geq 3$. Comme

$$\forall k \in [\![2, n-1]\!],\ -\frac{1}{6}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right) \leq u_{k+1} - u_k$$

en sommant les inégalités pour k allant de 2 à $n-1$

$$\sum_{k=2}\left(-\frac{1}{6}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)\right) \leq \sum_{k=2}^{n-1}(u_{k+1}-u_k)$$

Or par linéarité de la somme $\sum_{k=2}\left(-\frac{1}{6}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)\right)=-\frac{1}{6}\sum_{k=2}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)$ et par somme télescopique

$$\sum_{k=2}^{n-1}(u_{k+1}-u_k)=u_{n-1+1}-u_2$$

d'où

$$-\frac{1}{6}\sum_{k=2}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)\leq u_n-u_2$$

c'est à dire

$$\boxed{u_n\geq u_2-\frac{1}{6}\sum_{k=2}^{n-1}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)}.$$

2.19. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.

Par somme télescopique, pour tout $n\geq 3$

$$\sum_{k=2}^{n-1}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)=\frac{1}{2-1}-\frac{1}{n-1}\leq 1$$

et donc, en majorant la somme dans l'inégalité de la question **2.18.**,

$$u_n\geq u_2-\frac{1}{6}$$

et donc $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est minorée}}$.
Par conséquent la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et minorée.
Par le théorème de convergence monotone, $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est convergente}}$.

2.20. Conclure qu'il existe $C\in\mathbb{R}$ tel que

$$S_n=n\ln(n)-n+\frac{1}{2}\ln(n)+C+o_{n\to+\infty}(1).$$

Notons C la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
On a alors

$$u_n=C+o_{n\to+\infty}(1).$$

De plus, par définition, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$

$$u_n=S_n-\left(n\ln(n)-n+\frac{1}{2}\ln(n)\right)$$

et donc on a bien

$$\boxed{S_n=n\ln(n)-n+\frac{1}{2}\ln(n)+C+o_{n\to+\infty}(1)}.$$

2.IV. À la recherche de la constante

On a montré dans les sous-sections précédentes qu'il existe $C\in\mathbb{R}$ tel que

$$\sum_{k=1}^{n}\ln(k)=n\ln(n)-n+\frac{1}{2}\ln(n)+C+o_{n\to+\infty}(1).$$

2.21. À l'aide de l'exercice 1 montrer que $C=\ln(\sqrt{2\pi})$.

On a

$$\ln(n!)=n\ln(n)-n+\frac{1}{2}\ln(n)+C+o_{n\to+\infty}(1)$$

et par conséquent

$$\ln((2n!)) = (2n)\ln(2n) - 2n + \frac{1}{2}\ln(2n) + C + o_{n\to+\infty}(1).$$

D'où

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\right) &= \ln((2n)!) - 2\ln(n!) - 2n\ln(2)\\ &= \left((2n)\ln(2n) - 2n + \frac{1}{2}\ln(2n) + C\right) - 2\left(n\ln(n) - n + \frac{1}{2}\ln(n) + C\right) - 2n\ln(2) + o_{n\to+\infty}(1)\\ &(2-2)\,n\ln(n) + (2\ln(2) - 2 + 2 - 2\ln(2))\,n + \left(\frac{1}{2} - 1\right)\ln(n) + \left(\frac{1}{2}\ln(2) - C\right) + o_{n\to+\infty}(1)\\ &= -\frac{1}{2}\ln(n) + \left(\frac{1}{2}\ln(2) - C\right) + o_{n\to+\infty}(1).\end{aligned}$$

et donc

$$\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} = \exp\left(-\frac{1}{2}\ln(n)\right)\exp\left(\frac{1}{2}\ln(2) - C\right)\underbrace{\exp(o_{n\to+\infty}(1))}_{=1+o_{n\to+\infty}1}$$

i.e

$$\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \sim \frac{e^{-C}\sqrt{2}}{\sqrt{n}}.$$

Or on sait par l'exercice 1 (intégrale de Wallis) que

- pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$W_{2n} = \frac{\pi}{2}\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}$$

- lorsque $n \to +\infty$,

$$W_{2n} \sim \sqrt{\frac{\pi}{2(2n)}}$$

et donc en particulier

$$\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{n}}.$$

Par transitivité de l'équivalence on obtient

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{n}} \sim \frac{e^{-C}\sqrt{2}}{\sqrt{n}}$$

et donc (en multipliant par $\sqrt{(n)}$)

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \sim e^{-C}\sqrt{2}.$$

Or deux constantes sont équivalentes ssi elles sont égales et donc

$$e^{-C} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

c'est à dire

$$\boxed{C = \ln\left(\sqrt{2\pi}\right)}.$$

On a donc bien montré la **formule de Stirling (♣)**

$$\ln(n!) = n\ln(n) - n + \frac{1}{2}\ln(n) + \ln(\sqrt{2\pi}) + o_{n\to+\infty}(1)$$

ou encore

$$\boxed{n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}.$$