On portera une attention particulière à **la rédaction** et à **la propreté** de la copie.
En particulier tout **graphe ou schéma** pertinent et correctement annoté sera **valorisé**.
Les résultats devront être mis en valeur dès que possible.

Indiquez sur votre copie le temps approximatif pris pour le devoir.

Contexte

Ce problème est issu d'un DM de 2023-24 (lui-même prolongeant un DM de 2022-23). Il a pour but de **justifier rigoureusement la méthode de la « suite auxiliaire »** utilisée pour déterminer la vitesse de convergence des suites récurrentes du type $u_{n+1} = f(u_n)$.
On établit d'abord un théorème général reliant la primitive F de $\frac{1}{x-f(x)}$ au rang n, via le théorème de l'égalité des accroissements finis et le théorème de Cesàro, puis on l'applique à l'étude des **vitesses sous-géométriques** (obtention de développements asymptotiques à un et deux termes de u_n).
Prérequis : théorème de l'égalité des accroissements finis, théorème de Cesàro, développements limités et développements asymptotiques.

---

1. Suite auxiliaire dans les problèmes télescopiques

1.I. Le cas général

Soit $f\colon [0,1] \to [0,1]$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 \in]0,1]$$
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n).$$

On suppose que :
(i) $f \in \mathcal{C}^1([0,1],[0,1])$
(ii) $f(x) = x + o_{x\to 0}(x)$
(iii) $\forall x \in]0,1],\ 0 < f(x) < x$
on note $g \in \mathcal{C}^1(]0,1] \to \mathbb{R}_+^*)$ la fonction définie pour tout $x \in [0,1]$ par $g(x) = x - f(x)$, c'est à dire

$$f(x) = x - g(x)$$

et on note $F \in \mathcal{C}^2(]0,1],\mathbb{R})$ une primitive de $\frac{1}{g}$, c'est à dire telle que

$$\forall x \in]0,1],\ F' = \frac{1}{x - f(x)}.$$

L'objectif de ce problème est de montrer que

$$-F(u_n) = n + o_{n\to+\infty}(n).$$

1.1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie, strictement décroissante et tend vers 0.
1.2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $c_n \in]u_{n+1}, u_n[$ tel que

$$F(u_n) - F(u_{n+1}) = \frac{g(u_n)}{g(c_n)}.$$

On fixe dans la suite pour tout $n \in \mathbb{N}$ un tel c_n.
1.3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $d_n \in]c_n, u_n[$ tel que

$$\frac{g(c_n)}{g(u_n)} = 1 - g'(d_n)\frac{u_n - c_n}{u_n - u_{n+1}}.$$

On fixe dans la suite pour tout $n \in \mathbb{N}$ un tel d_n.
1.4. Montrer que $g'(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$.
1.5. Conclure que

$$F(u_n) - F(u_{n+1}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

1.6. En utilisant le théorème de Cesàro conclure que

$$-F(u_n) = n + o_{n\to+\infty}(n).$$

1.II. Application : vitesses sous-géométriques

On reprend les notations de la partie précédente.

1.7. Dans cette question on suppose qu'il existe $k > 1$ (non nécessairement entier) et $a_k > 0$ tels que

$$f(x) = x - a_k x^k + o_{x\to0}(x^k).$$

Montrer que

$$u_n = \gamma\, n^{-\frac{1}{k-1}} + o_{n\to+\infty}\left(n^{-\frac{1}{k-1}}\right)$$

où

$$\gamma = ((k-1)a_k)^{-\frac{1}{k-1}}.$$

1.8. Dans le cas où

$$f : x \mapsto \begin{cases} x\left(1 - x^2 e^{-\frac{1}{x^2}}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

déterminer un développement asymptotique à un terme de u_n.

1.9. (**Pour les courageuses et courageux**) Dans cette question on suppose qu'il existe $k > 1$ (non nécessairement entier), $a_k > 0$, $a_{2k-1} \in \mathbb{R}$ tels que

$$f(x) = x - \left(a_k x^k + a_{2k-1} x^{2k-1} + o_{x\to0}(x^{2k-1})\right).$$

Montrer que l'on a le développement asymptotique à deux termes

$$u_n = \gamma_1 n^{-\frac{1}{k-1}} - \gamma_2 n^{-\frac{k}{k-1}} \ln(n) + o_{n\to+\infty}\left(n^{-\frac{k}{k-1}} \ln(n)\right)$$

où

$$\gamma_1 = (a_k(k-1))^{\frac{1}{1-k}}$$
$$\gamma_2 = (a_k(k-1))^{\frac{1}{1-k}} \left(\frac{a_{2k-1}}{((k-1)a_k)^2} + \frac{k}{2(k-1)^2}\right).$$

On pourra admettre et utiliser la version de Cesàro pondérée suivante (cas particulier du théorème de sommation des équivalents, cas divergent (cf spé))

$$\textbf{Si } t_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \tfrac{1}{n} \textbf{ alors } \textstyle\sum_{k=0}^{n-1} t_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n).$$