En cas d'erreur de corrigé, n'hésitez pas à me le signaler.

Contexte

Ce problème est issu d'un DM de 2023-24 (lui-même prolongeant un DM de 2022-23). Il a pour but de **justifier rigoureusement la méthode de la « suite auxiliaire »** utilisée pour déterminer la vitesse de convergence des suites récurrentes du type $u_{n+1} = f(u_n)$.
On établit d'abord un théorème général reliant la primitive F de $\frac{1}{x-f(x)}$ au rang n, via le théorème de l'égalité des accroissements finis et le théorème de Cesàro, puis on l'applique à l'étude des **vitesses sous-géométriques** (obtention de développements asymptotiques à un et deux termes de u_n).
Prérequis : théorème de l'égalité des accroissements finis, théorème de Cesàro, développements limités et développements asymptotiques.

---

1. Suite auxiliaire dans les problèmes télescopiques

1.I. Le cas général

Soit $f\colon [0,1] \to [0,1]$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 \in]0,1]$$
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n).$$

On suppose que :
(i) $f \in \mathcal{C}^1([0,1],[0,1])$
(ii) $f(x) = x + o_{x\to 0}(x)$
(iii) $\forall x \in]0,1],\ 0 < f(x) < x$
on note $g \in \mathcal{C}^1(]0,1] \to \mathbb{R}_+^*)$ la fonction définie pour tout $x \in [0,1]$ par $g(x) = x - f(x)$, c'est à dire

$$f(x) = x - g(x)$$

et on note $F \in \mathcal{C}^2(]0,1],\mathbb{R})$ une primitive de $\frac{1}{g}$, c'est à dire telle que

$$\forall x \in]0,1],\ F' = \frac{1}{x - f(x)}.$$

L'objectif de ce problème est de montrer que

$$-F(u_n) = n + o_{n\to+\infty}(n).$$

1.1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie, strictement décroissante et tend vers 0.

Comme l'intervalle $]0,1]$ est stable par f la suite est bien définie et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]0,1]$.
De plus comme pour tout $x \in]0,1]$, $f(x) < x$ on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} < u_n$ et donc la suite est strictement décroissante.
Comme la suite est minorée par 0, par le théorème de convergence monotone elle converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ et par passage à la limite des inégalités larges $\ell \in [0,1]$.
Enfin comme $u_{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$, et par continuité de f, $f(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(\ell)$, par passage à la limite de la relation de récurrence,

$$\ell = f(\ell).$$

Comme le seul point fixe de f est 0 ($f(0) = 0$ et si $x \neq 0, f(x) < x$) on en conclut,

$$\boxed{u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}.$$

1.2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $c_n \in]u_{n+1}, u_n[$ tel que

$$F(u_n) - F(u_{n+1}) = \frac{g(u_n)}{g(c_n)}.$$

On fixe dans la suite pour tout $n \in \mathbb{N}$ un tel c_n.

Soit $n \in \mathbb{N}$.
La fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$, d'où par le Théorème de l'Égalité des Accroissements Finis, comme F est continue en tout point de $[u_{n+1}, u_n]$ et dérivable en tout point de $]u_{n+1}, u_n[$, il existe $c_n \in]u_{n+1}, u_n[$ tel que

$$\frac{F(u_n) - F(u_{n+1})}{u_n - u_{n+1}} = F'(c_n)$$

ce qui se réécrit, comme $F' = \frac{1}{g}$ et

$$u_n - u_{n+1} = g(u_n) > 0$$

en

$$\boxed{F(u_n) - F(u_{n+1}) = \frac{g(u_n)}{g(c_n)}}.$$

1.3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $d_n \in]c_n, u_n[$ tel que

$$\frac{g(c_n)}{g(u_n)} = 1 - g'(d_n)\frac{u_n - c_n}{u_n - u_{n+1}}.$$

On fixe dans la suite pour tout $n \in \mathbb{N}$ un tel d_n.

Soit $n \in \mathbb{N}$.
Comme $g = \mathrm{Id}_{[0,1]} - f$ est de classe $\mathcal{C}^1$, par le Théorème de l'Égalité des Accroissements Finis, il existe $d_n \in]c_n, u_n[$ tel que

$$g(u_n) - g(c_n) = g'(d_n)(u_n - c_n)$$

d'où comme $g(u_n) = (u_n - u_{n+1}) > 0$

$$1 - \frac{g(c_n)}{g(u_n)} = g'(d_n)\frac{u_n - c_n}{u_n - u_{n+1}}$$

et donc

$$\boxed{\frac{g(c_n)}{g(u_n)} = 1 - g'(d_n)\frac{u_n - c_n}{u_n - u_{n+1}}}.$$

1.4. Montrer que $g'(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$.

On a $g'(0) = 1 - f'(0) = 0$ et g est de classe $\mathcal{C}^1$ donc par continuité de g',

$$\boxed{g'(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0}.$$

1.5. Conclure que

$$F(u_n) - F(u_{n+1}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

On sait que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq u_{n+1} \leq c_n \leq d_n \leq u_n$$

par conséquent,

$$d_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

d'où par composition

$$g'(d_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

et comme

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{u_n - c_n}{u_n - u_{n+1}} \in [0, 1]$$

on en déduit par la question **1.3.** que

$$\frac{g(c_n)}{g(u_n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

Par opérations sur les limites et la question **1.2.** on en déduit donc

$$\boxed{F(u_n) - F(u_{n+1}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1}.$$

1.6. En utilisant le théorème de Cesàro conclure que

$$-F(u_n) = n + o_{n\to+\infty}(n).$$

Par le théorème de Cesàro, on en déduit

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(F(u_k) - F(u_{k+1})) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

c'est à dire par télescopage

$$\frac{1}{n}(F(u_0) - F(u_n)) = 1 + o_{n\to+\infty}(1)$$

et donc, comme $F(u_0) = o_{n\to+\infty}(n)$,

$$\boxed{-F(u_n) = n + o_{n\to+\infty}(n)}.$$

1.II. Application : vitesses sous-géométriques

On reprend les notations de la partie précédente.

1.7. Dans cette question on suppose qu'il existe $k > 1$ (non nécessairement entier) et $a_k > 0$ tels que

$$f(x) = x - a_k x^k + o_{x\to0}(x^k).$$

Montrer que

$$u_n = \gamma\ n^{-\frac{1}{k-1}} + o_{n\to+\infty}\left(n^{-\frac{1}{k-1}}\right)$$

où

$$\gamma = ((k-1)a_k)^{-\frac{1}{k-1}}\ .$$

Remarquons tout d'abord que par la question **1.1.** on a

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

car f vérifie toutes les hypothèses de la partie précédente.
Posons pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{v_n = {u_{n+1}}^{1-k} - {u_n}^{1-k}}.$$

L'objectif est de montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge puis d'utiliser Cesàro.
Constatons tout d'abord que pour x au voisinage de 0 (comme $k-1>0$)

$$\begin{aligned}(f(x))^{1-k} - x^{1-k} &= \left(x - a_k x^k + o_{x\to0}(x^k)\right)^{1-k} - x^{1-k}\\ &= x^{1-k}\left(\left(1 - a_k x^{k-1} + o_{x\to0}(x^{k-1})\right)^{1-k} - 1\right)\\ &= x^{1-k}\left(\left(1 - (1-k)a_k x^{k-1} + o_{x\to0}(x^{k-1})\right) - 1\right)\\ &= -(1-k)a_k + o_{x\to0}(1).\end{aligned}$$

donc, comme $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, pour n au voisinage de $+\infty$,

$$v_n = (u_{n+1})^{1-k} - {u_n}^{1-k} = (f(u_n))^{1-k} - {u_n}^{1-k} = (k-1)a_k + o_{n\to+\infty}(1).$$

et donc par Cesàro,

$$\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}(u_{j+1}^{1-k} - u_j^{1-k}) = (k-1)a_k + o_{n\to+\infty}(1)$$

et donc par télescopage, et comme u_0^{1-k} est une constante (donc un $o_{n\to+\infty}(n)$),

$$u_n^{1-k} = (k-1)a_k\ n + o_{n\to+\infty}(n)$$

et donc

$$\boxed{u_n = \gamma n^{\frac{1}{1-k}}(1 + o_{n\to+\infty}(1))}$$

où

$$\boxed{\gamma = ((k-1)a_k)^{\frac{1}{1-k}}}.$$

Remarque méthodologique : en pratique il est conseillé de reposer la suite auxiliaire bien choisie et de redémontrer sa convergence, plutôt que d'utiliser le théorème général démontré précédemment.
Les questions précédentes montrent que cette méthode de « l'intégrale » pour les suites récurrentes fonctionnera toujours (si les hypothèses sont vérifiées).
Ainsi pour le très grand classique « $u_{n+1} = \sin(u_n)$ », comme $\sin(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + o_{x\to 0}(x^3)$, on pose $v_n = {u_{n+1}}^{-2} - {u_n}^{-2}$, on montre que $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\frac{1}{3}$ d'où on déduit par Cesàro $u_n = \sqrt{\frac{3}{n}} + o_{n\to+\infty}\left(\sqrt{\frac{1}{n}}\right)$.

1.8. Dans le cas où

$$f : x \mapsto \begin{cases} x\left(1 - x^2 e^{-\frac{1}{x^2}}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

déterminer un développement asymptotique à un terme de u_n.

De même, par la question **1.1.**, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 car la fonction f vérifie toutes les hypothèses de l'énoncé (par croissance comparée $x^2 e^{-\frac{1}{x^2}} = o_{x\to 0}(x)$).
De plus en posant $g(x) = x - f(x)$ on a pour tout $x > 0$,

$$g(x) = x^3 e^{-\frac{1}{x^2}} > 0$$

et

$$\frac{1}{g(x)} = \frac{1}{x^3} e^{\frac{1}{x^2}}$$

et donc

$$F : \begin{array}{c}]0, +\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto -\dfrac{1}{2} e^{\frac{1}{x^2}} \end{array}$$

est bien une primitive de $\frac{1}{g}$.
Par la question **1.6.** (en en refaisant la preuve dans ce cas particulier, comme on l'a fait à la question **1.7.**) on en déduit

$$\frac{1}{2} e^{\frac{1}{{u_n}^2}} = n + o_{n\to+\infty}(n)$$

d'où

$${u_n}^{-2} = \ln\left(2n + o_{n\to+\infty}(n)\right) = \ln(2n) + o_{n\to+\infty}(1)$$

et donc

$$u_n = \left(\ln(2n) + o_{n\to+\infty}(1)\right)^{-\frac{1}{2}}$$

d'où

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{\ln(2n)}}\left(1 + o_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\ln(2n)}\right)\right)$$

i.e

$$\boxed{u_n = \frac{1}{\sqrt{\ln(2n)}} + o_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\ln(2n)^{\frac{3}{2}}}\right)}.$$

1.9. (**Pour les courageuses et courageux**) Dans cette question on suppose qu'il existe $k > 1$ (non nécessairement entier), $a_k > 0$, $a_{2k-1} \in \mathbb{R}$ tels que

$$f(x) = x - \left(a_k x^k + a_{2k-1} x^{2k-1} + o_{x\to 0}(x^{2k-1})\right).$$

Montrer que l'on a le développement asymptotique à deux termes

$$u_n = \gamma_1 n^{-\frac{1}{k-1}} - \gamma_2 n^{-\frac{k}{k-1}} \ln(n) + o_{n\to+\infty}\left(n^{-\frac{k}{k-1}} \ln(n)\right)$$

où

$$\gamma_1 = (a_k(k-1))^{\frac{1}{1-k}}$$
$$\gamma_2 = (a_k(k-1))^{\frac{1}{1-k}}\left(\frac{a_{2k-1}}{((k-1)a_k)^2} + \frac{k}{2(k-1)^2}\right).$$

On pourra admettre et utiliser la version de Cesàro pondérée suivante (cas particulier du théorème de sommation des équivalents, cas divergent (cf spé))

$$\textbf{Si } t_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \tfrac{1}{n} \textbf{ alors } \textstyle\sum_{k=0}^{n-1} t_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n).$$

Tout d'abord par la question **1.7.** on a $u_n \to 0$ et même

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} ((k-1)a_k)^{-\frac{1}{k-1}} \; n^{-\frac{1}{k-1}}.$$

L'idée est de pousser le développement un ordre plus loin et de réinjecter cet équivalent (méthode de *bootstrap*). Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, de même que précédemment,

$$v_n = u_{n+1}^{1-k} - u_n^{1-k}.$$

et en poussant le développement à l'ordre supérieur, quand $x \to 0$,

$$\begin{aligned}
&(f(x))^{1-k} - x^{1-k} = x^{1-k}\left(\left(\frac{f(x)}{x}\right)^{1-k} - 1\right)\\
&= x^{1-k}\left(\left(1-(a_k x^{k-1} + a_{2k-1}x^{2k-2} + o(x^{2k-2}))\right)^{1-k} - 1\right)\\
&= x^{1-k}\left(1-(1-k)\left(a_k x^{k-1} + a_{2k-1}x^{2k-2} + o(x^{2k-2})\right) + \frac{(1-k)(1-k-1)}{2}\left(a_k x^{k-1} + a_{2k-1}x^{2k-2} + o(x^{2k-2})\right)^2 + o(x^{2k-2}) - 1\right)\\
&= x^{1-k}\left(a_k(k-1)x^{k-1} + \left((k-1)a_{2k-1} + \frac{(k-1)k}{2}{a_k}^2\right)x^{2k-2} + o(x^{2k-2})\right)\\
&= a_k(k-1) + \left((k-1)a_{2k-1} + \frac{k(k-1)}{2}{a_k}^2\right)x^{k-1}(1+o(1))
\end{aligned}$$

et donc en posant

$$\begin{aligned}
C_1 &= a_k(k-1)\\
C_2 &= \left((k-1)a_{2k-1} + \frac{k(k-1)}{2}{a_k}^2\right)
\end{aligned}$$

comme $u_n \to 0$ on a

$$v_n = C_1 + C_2 u_n^{k-1}(1 + o_{n\to+\infty}(1)).$$

Posons désormais pour $n \in \mathbb{N}$,

$$w_n = v_n - C_1.$$

Alors

$$w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} C_2 u_n^{k-1}$$

d'où comme on a déjà vu que

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} C_1^{\frac{1}{1-k}} n^{\frac{1}{1-k}}$$

on en conclut que

$$w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{C_2}{C_1}\frac{1}{n}.$$

D'où par sommation des équivalents, cas divergent, on conclut que

$$\sum_{i=0}^{n-1} w_i \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{C_2}{C_1}\ln(n).$$

Or

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n-1} w_i &= \sum_{i=0}^{n-1}(u_{i+1}^{1-k} - u_i^{1-k} - C_1)\\
&= u_n^{1-k} - u_0^{1-k} - C_1 n
\end{aligned}$$

et donc (comme $u_0^{1-k} = o_{n\to+\infty}(\ln(n))$) on conclut que

$$\boxed{u_n^{1-k} = C_1 n + \frac{C_2}{C_1}\ln(n) + o_{n\to+\infty}(\ln(n))}$$

et donc

$$\begin{aligned}
u_n &= C_1^{\frac{1}{1-k}} n^{\frac{1}{1-k}}\left(1 + \frac{C_2}{(C_1)^2}\frac{\ln(n)}{n} + o_{n\to+\infty}\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)\right)^{\frac{1}{1-k}}\\
&= C_1^{\frac{1}{1-k}} n^{\frac{1}{1-k}}\left(1 + \frac{1}{1-k}\frac{C_2}{(C_1)^2}\frac{\ln(n)}{n} + o_{n\to+\infty}\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)\right)
\end{aligned}$$

et donc finalement comme

$$\frac{1}{1-k}\frac{C_2}{C_1^2}C_1^{\frac{1}{1-k}} = -\left(\frac{a_{2k-1}}{((k-1)a_k)^2} + \frac{k}{2(k-1)^2}\right)(a_k(k-1))^{\frac{1}{1-k}}$$

on obtient bien

$$\boxed{u_n = (a_k(k-1))^{\frac{1}{1-k}} n^{-\frac{1}{k-1}} - (a_k(k-1))^{\frac{1}{1-k}}\left(\frac{a_{2k-1}}{((k-1)a_k)^2} + \frac{k}{2(k-1)^2}\right) n^{-\frac{k}{k-1}}\ln(n) + o_{n\to+\infty}\left(n^{-\frac{k}{k-1}}\ln(n)\right)}.$$