On portera une attention particulière à **la rédaction** et à **la propreté** de la copie.
En particulier tout **graphe ou schéma** pertinent et correctement annoté sera **valorisé**.
Les résultats devront être mis en valeur dès que possible.

Indiquez sur votre copie le temps approximatif pris pour le devoir.

Contexte

Ce DM propose trois exercices indépendants:
- ♣ Le premier exercice consiste en la démonstration du théorème de Décomposition en Éléments Simples (DÉS) vu en cours.
- Le second, extrait d'un début de problème de concours, étudie une méthode d'intégration numérique.
- Le dernier exercice, très classique, utilise des suites d'intégrales définies par récurrence pour calculer des limites de sommes.

---

1. ♣ Démonstration de la DÉS

1.1. Soit $A \in \mathbb{K}[X]$ et $B \in \mathbb{K}[X]$ non constant.
Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\deg(A) < n\deg(B)$.
Montrer qu'il existe une et unique famille $(A_0, \dots, A_{n-1}) \in \left(\mathbb{K}_{\deg(B)-1}[X]\right)^n$ telle que

$$A = \sum_{k=0}^{n-1} A_k B^k.$$

Commenter.
Remarque: il existe au moins deux preuves différentes: une arithmétique et l'autre d'algèbre linéaire.

1.2. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Soient $Q_1, Q_2 \in \mathbb{K}[X]$ non nuls et premiers entre eux.
On suppose de plus que $\deg(P) < \deg(Q_1Q_2)$.
Montrer qu'il existe $P_1, P_2 \in \mathbb{K}[X]$ tels que

$$\frac{P}{Q_1Q_2} = \frac{P_1}{Q_1} + \frac{P_2}{Q_2}$$

et

$$\deg(P_1) < \deg(Q_1)\ , \quad \deg(P_2) < \deg(Q_2).$$

Que dire de l'unicité de P_1 et P_2 ?

1.3. Pour $r \in \mathbb{N}^*$ on note $\mathcal{H}_r$ la proposition
« Pour tous $Q_1, \dots, Q_r$ irréductibles unitaires deux à deux distincts, pour tous $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ entiers strictement positifs, pour tout P tel que $\deg(P) < \deg\left(\prod_{k=1}^r {Q_k}^{\alpha_k}\right)$, il existe une et unique famille de polynômes $(A_{k,j})_{\substack{1\le k\le r\\ 1\le j\le \alpha_k}}$ telle que

$$\frac{P}{\prod_{k=1}^r {Q_k}^{\alpha_k}} = \sum_{k=1}^{r}\sum_{j=1}^{\alpha_k} \frac{A_{k,j}}{{Q_k}^j}$$

et

$$\forall k \in [\![1, r]\!], \forall j \in [\![1, \alpha_k]\!],\ \deg(A_{k,j}) < \deg(Q_k).$$

»
Montrer par récurrence sur $r \in \mathbb{N}^*$ que pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{H}_r$.

1.4. En déduire l'existence et l'unicité de la décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle.

2. Méthode d'intégration numérique de Simpson

L'objectif de cet exercice est de donner une approximation de l'intégrale d'une fonction f de classe $\mathcal{C}^3$ sur un intervalle fini $[a, b]$, où a et b sont deux réels tels que $a < b$.
On commence par s'intéresser au cas de polynômes de degré 2.

2.1. Dans cette question, on étudie les polynômes suivants:

$$P_0(X) = 2X^2 - 3X + 1,\ P_1(X) = 2X^2 - X,\ \text{et } P_2(X) = 4X - 4X^2.$$

2.1.1. Donner les racines de ces trois polynômes et les valeurs de $\int_0^1 P_i(x)\mathrm{d}x$, pour $i \in \{0, 1, 2\}$.

2.1.2. Soit Q un polynôme de degré inférieur ou égal à 2.
Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$Q(x) = Q(0)P_0(x) + Q(1)P_1(x) + Q\left(\frac{1}{2}\right)P_2(x).$$

En déduire que

$$\int_0^1 Q(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{6}\left(Q(0) + Q(1) + 4Q\left(\frac{1}{2}\right)\right).$$

Dans la suite de cette partie, on choisit deux réels c et d dans $[a, b]$ tels que $c < d$.

2.2. Soit P un polynôme de degré inférieur ou égal à 2.
Calculer

$$\int_c^d P(y)\mathrm{d}y - \frac{(d-c)}{6}\left(P(c) + P(d) + 4P\left(\frac{c+d}{2}\right)\right).$$

Dans la suite de cette partie, on fixe f une fonction de classe $\mathcal{C}^3$ sur $[a, b]$ et on se propose d'étudier la différence

$$\int_c^d f(y)\mathrm{d}y - \frac{(d-c)}{6}\left(f(c) + f(d) + 4f\left(\frac{c+d}{2}\right)\right).$$

Pour cela, on pose, pour tout $h \in [0, d-c]$,

$$\varphi(h) = \int_c^{c+h} f(y)\mathrm{d}y - \frac{h}{6}\left(f(c) + f(c+h) + 4f\left(c + \frac{h}{2}\right)\right).$$

2.4. Justifier que φ est une fonction de classe $\mathcal{C}^3$ sur $[0, d-c]$ et calculer ses dérivées jusqu'à l'ordre 3.

2.5. Montrer qu'il existe une constante $M \geq 0$, indépendante de c et d, telle que, pour tout $h \in [0, d-c]$,

$$\left|\varphi^{(3)}(h)\right| \leq Mh.$$

2.6. En déduire que pour tout $h \in [0, d-c]$,

$$\left|\varphi''(h)\right| \leq \frac{M}{2}h^2$$

.

2.7. En procédant de même, établir que

$$\left|\int_c^d f(y)\mathrm{d}y - \frac{(d-c)}{6}\left(f(c) + f(d) + 4f\left(\frac{c+d}{2}\right)\right)\right| \leq \frac{M}{24}(d-c)^4.$$

2.8. Soit n entier strictement positif. Pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, on pose

$$f_i = f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right) + f\left(a + (i+1)\frac{b-a}{n}\right) + 4f\left(a + \left(i + \frac{1}{2}\right)\frac{b-a}{n}\right).$$

Montrer qu'il existe une constante M, indépendante de n, telle que

$$\left|\int_a^b f(y)\mathrm{d}y - \frac{(b-a)}{6n}\sum_{i=0}^{n-1} f_i\right| \leq \frac{M(b-a)^4}{24}\frac{1}{n^3}.$$

2.9. Commenter.

3. Calcul de sommes à l'aide d'intégrales

On considère dans cet exercice les suites $(\mathfrak{L}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\mathfrak{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\mathfrak{C}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathfrak{L}_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}; \qquad \mathfrak{I}_n = \sum_{\substack{1\leq k\leq n \\ k \text{impair}}} \frac{1}{k^2}, \quad \mathfrak{C}_n = \sum_{1\leq k\leq n} \frac{1}{k^2}.$$

On cherche à déterminer leurs limites respectives lorsque $n \to +\infty$.

Les deux parties sont indépendantes.

3.I. Une somme alternée

Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx.$$

3.1. Quelles sont les valeurs de I_0 et I_1 ?

3.2. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$I_{k+1} + I_k = \frac{1}{k+1}.$$

3.3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} = I_0 + (-1)^n I_{n+1}.$$

3.4. On cherche dans cette question à déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3.4.1. Montrer que pour tout $x \in [0,1]$

$$0 \leq \frac{x}{1+x} \leq \frac{1}{2}.$$

3.4.2. En déduire que pour tout $n \geq 1$ on a

$$0 \leq I_n \leq \frac{1}{2n}$$

3.4.3. Conclure que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = 0.$$

3.5. Déduire des questions précédentes que la suite $(\mathfrak{L}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que

$$\lim_{n\to+\infty} \mathfrak{L}_n = \ln(2).$$

3.II. Inverses des carrés

Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose

$$J_n = \int_0^\pi t\cos(nt)\mathrm{d}t.$$

3.6. Quelle est la valeur de J_0 ? Montrer que pour $n \geq 1$ on a

$$J_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\dfrac{2}{n^2} & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

On définit la fonction $\mathrm{sinc} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$\mathrm{sinc}: \begin{array}{c} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ \frac{\sin(x)}{x} & \text{sinon.} \end{cases} \end{array}.$$

3.7. Représenter sans justification le graphe de la fonction sinc sur l'intervalle $[-3\pi, 3\pi]$.

3.8. Montrer que $\mathrm{sinc} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

3.9. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$\forall t \in]-2\pi, 2\pi[, \quad \sum_{k=1}^{n} t\cos(kt) = -\frac{t}{2} + \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{\mathrm{sinc}\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

3.10. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\mathfrak{I}_n = \sum_{\substack{1\leq k\leq n \\ k \text{ impair}}} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{2}\int_0^\pi \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{\mathrm{sinc}\left(\frac{t}{2}\right)}\mathrm{d}t.$$

3.11. À l'aide d'une intégration par parties bien choisie, montrer que si $f \in \mathcal{C}^1([0,\pi], \mathbb{R})$ alors

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^\pi f(t)\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)\mathrm{d}t = 0.$$

3.12. En déduire que la suite $(\mathfrak{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et que

$$\lim_{n\to+\infty} \mathfrak{I}_n = \frac{\pi^2}{8}.$$

3.13. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathfrak{C}_{2n} = \frac{1}{4}\mathfrak{C}_n + \mathfrak{I}_{2n}.$$

3.14. Montrer que la suite $(\mathfrak{C}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et conclure que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}}.$$