**En cas d'erreur de corrigé, n'hésitez pas à me le signaler.**

## Contexte

Ce DM propose trois exercices indépendants:
- ♣ Le premier exercice consiste en la démonstration du théorème de Décomposition en Éléments Simples (DÉS) vu en cours.
- Le second, extrait d'un début de problème de concours, étudie une méthode d'intégration numérique.
- Le dernier exercice, très classique, utilise des suites d'intégrales définies par récurrence pour calculer des limites de sommes.

---

# 1. ♣ Démonstration de la DÉS

**1.1.** Soit $A \in \mathbb{K}[X]$ et $B \in \mathbb{K}[X]$ non constant.
Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\deg(A) < n\deg(B)$.
Montrer qu'il existe une et unique famille $(A_0, \dots, A_{n-1}) \in \left(\mathbb{K}_{\deg(B)-1}[X]\right)^n$ telle que

$$A = \sum_{k=0}^{n-1} A_k B^k.$$

Commenter.
*Remarque: il existe au moins deux preuves différentes: une arithmétique et l'autre d'algèbre linéaire.*

▶ **Version algèbre linéaire**
Posons $d = \deg(B) \geq 1$.
Soit $n \in \mathbb{N}$.
La famille

$$(1, X, \dots, X^{d-1}, B, XB, \dots, X^{d-1}B, B^2, XB^2, \dots, X^{d-1}B^2, B^3, \dots, X^{d-1}B^{n-1})$$

est échelonnée exactement en degré car pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$ et $j \in [\![0, d-1]\!]$

$$\deg(X^j B^k) = dk + j.$$

Par conséquent il s'agit d'une base de $\mathbb{K}_{nd-1}[X]$.
Soit $A \in \mathbb{K}_{nd-1}[X]$ (c'est-à-dire tel que $\deg(A) < n\deg(B)$).
On a alors existence et unicité de coefficients $(a_{kj})_{\substack{0\leq k\leq n-1\\ 0\leq j\leq d-1}}$ tels que

$$A = \sum_{\substack{0\leq k\leq n-1\\ 0\leq j\leq d-1}} a_{kj} X^j B^k$$

c'est-à-dire tels que

$$\boxed{A = \sum_{k=0}^{n-1} \left( \sum_{j=0}^{d-1} a_{kj} X^j \right) B^k}$$

ce qui est bien le résultat souhaité avec pour tout $k$, $A_k = \sum_{j=0}^{d-1} a_{kj} X^j \in \mathbb{K}_{d-1}[X]$.

▶ **Version arithmétique**
Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que pour tout $A$ tel que $\deg(A) < n\deg(B)$ une telle décomposition existe.
▷ **Initialisation**
Pour $n = 0$ on a bien $0 = 0$ (le polynôme nul est une somme sur l'ensemble vide)
▷ **Hérédité**
Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons la propriété vérifiée au rang $n$.
Soit $A$ tel que $\deg(A) < (n+1)\deg(B)$.
Par division euclidienne par $B$ il existe $A_0$ et $Q$ tels que

$$A = A_0 + QB$$

et

$$\deg(A_0) < \deg(B).$$

De plus $\deg(QB) \leq \deg(A)$ (car $QB = A - A_0$) et donc $\deg(Q) + \deg(B) < (n+1)\deg(B)$ i.e

$$\deg(Q) < n\deg(B).$$

Par hypothèse de récurrence on en déduit qu'il existe $(A_1, \dots, A_n)$ de degrés strictement inférieurs à $\deg(B)$ tels que

$$Q = \sum_{k=0}^{n-1} A_{k+1} B^k$$

et alors

$$A = A_0 + \left( \sum_{k=0}^{n-1} A_{k+1} B^{k+1} \right)$$

c'est-à-dire

$$A = \sum_{k=0}^{(n+1)-1} A_k B^k.$$

▷ **Conclusion**
La propriété étant initialisée et héréditaire, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $A$ tel que $\deg(A) < n \deg(B)$ l'existence de $A_0, \dots, A_{n-1}$ tels que

$$\boxed{A = \sum_{k=0}^{n-1} A_k B^k}.$$

Pour l'unicité, soient $n \in \mathbb{N}$, $A_0, \dots, A_{n-1}$ et $\tilde{A}_0, \dots, \tilde{A}_{n-1}$ de degrés strictement inférieurs à $\deg(B)$ tels que

$$\sum_{k=0}^{n-1} A_k B^k = \sum_{k=0}^{n-1} \tilde{A}_k B^k.$$

On peut alors procéder par récurrence et divisions euclidiennes, ou bien en supposant par l'absurde que $\{k \in [\![0, n-1]\!] | A_k \neq \tilde{A}_k\}$ est non vide et en posant

$$k_0 = \min(\{k \in [\![0, n-1]\!] | A_k \neq \tilde{A}_k\})$$

qui est alors bien défini, on a

$$(A_{k_0} - \tilde{A}_{k_0}) B^{k_0} + \sum_{k=k_0+1}^{n-1} (A_k - \tilde{A}_k) B^k = 0$$

d'où (intégrité)

$$(A_{k_0} - \tilde{A}_{k_0}) + B \sum_{k=k_0+1}^{n-1} (A_k - \tilde{A}_k) B^{k-(k_0+1)} = 0$$

et

$$B \mid A_{k_0} - \tilde{A}_{k_0}$$

or

$$\deg(A_{k_0} - \tilde{A}_{k_0}) < \deg(B)$$

et donc $A_{k_0} - \tilde{A}_{k_0} = 0$ ce qui est absurde.
D'où $\boxed{\text{l'unicité}}$.

► **Remarques**:
▷ la preuve d'algèbre linéaire est semblable à la démonstration de l'existence et unicité de la division euclidienne en tant que projecteur.
▷ la preuve arithmétique est exactement la même que celle de l'écriture d'un entier $a$ en base $b$. On parle par ailleurs d'« écriture de $A$ en base $B$ ».

**1.2.** Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Soient $Q_1, Q_2 \in \mathbb{K}[X]$ non nuls et premiers entre eux.
On suppose de plus que $\deg(P) < \deg(Q_1 Q_2)$.
Montrer qu'il existe $P_1, P_2 \in \mathbb{K}[X]$ tels que

$$\frac{P}{Q_1 Q_2} = \frac{P_1}{Q_1} + \frac{P_2}{Q_2}$$

et

$$\deg(P_1) < \deg(Q_1) \ , \quad \deg(P_2) < \deg(Q_2).$$

Que dire de l'unicité de $P_1$ et $P_2$ ?

Par Bézout il existe $(U, V) \in \mathbb{K}[X]$ tels que

$$P = Q_1 U + Q_2 V$$

ce qui équivaut dans $\mathbb{K}(X)$ à

$$\frac{P}{Q_1Q_2} = \frac{U}{Q_2} + \frac{V}{Q_1}.$$

et plus précisément une fois fixé un couple de Bézout particulier $(U,V)$ l'ensemble des couples de Bézout satisfaisant une telle relation est l'ensemble

$$\{(U + AQ_2, V - AQ_1), A \in \mathbb{K}[X]\}.$$

On est donc ramené à chercher un $A \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\deg(V - AQ_1) < \deg(Q_1)$ et $\deg(U + AQ_2) < \deg(Q_2)$ (et alors $P_1 = V - AQ_1$ et $P_2 = U + AQ_2$).
On a $\deg(V - AQ_1) < \deg(Q_1)$ si et seulement si $A$ est le quotient de la division euclidienne de $V$ par $Q_1$. Il existe donc un unique $A$ vérifiant la première condition, et il vérifie la seconde car alors

$$\deg\left(\frac{P_2}{Q_2}\right) \leq \max\left(\deg\left(\frac{P}{Q_1Q_2}\right), \deg\left(\frac{P_1}{Q_1}\right)\right) < 0.$$

**1.3.** Pour $r \in \mathbb{N}^*$ on note $\mathcal{H}_r$ la proposition
« Pour tous $Q_1, \dots, Q_r$ irréductibles unitaires deux à deux distincts, pour tous $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ entiers strictement positifs, pour tout $P$ tel que $\deg(P) < \deg\left(\prod_{k=1}^r {Q_k}^{\alpha_k}\right)$, il existe une et unique famille de polynômes $(A_{k,j})_{\substack{1\leq k\leq r\\ 1\leq j\leq \alpha_k}}$ telle que

$$\frac{P}{\prod_{k=1}^r {Q_k}^{\alpha_k}} = \sum_{k=1}^{r}\sum_{j=1}^{\alpha_k} \frac{A_{k,j}}{{Q_k}^j}$$

et

$$\forall k \in [\![1,r]\!], \forall j \in [\![1,\alpha_k]\!],\ \deg(A_{k,j}) < \deg(Q_k).$$

»
Montrer par récurrence sur $r \in \mathbb{N}^*$ que pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{H}_r$.

- **Initialisation**
  Pour $r = 1$, soit $Q_1$ irréductible, $\alpha_1 \in \mathbb{N}^*$ et $P$ tel que $\deg(P) < \deg({Q_1}^{\alpha_1}) = \alpha_1 \deg(Q_1)$.
  On constate que pour $(A_{1,j})_{j\in[\![1,\alpha_1]\!]}$ une famille de polynômes de degrés strictement inférieurs à $\deg(Q_1)$ on a

  $$\frac{P}{{Q_1}^{\alpha_1}} = \sum_{j=1}^{\alpha_1} \frac{A_{1,j}}{{Q_1}^j} \Leftrightarrow P = \sum_{k=0}^{\alpha_1-1} A_{1,\alpha_1-k}{Q_1}^k.$$

  Par la question **1.1.**, il y a existence et unicité d'une telle écriture en base $Q_1$.
- **Hérédité**
  Soit $r \geq 1$ et supposons $\mathcal{H}_r$.
  Soient $Q_1, \dots, Q_r, Q_{r+1}$ deux à deux distincts, $\alpha_1, \dots, \alpha_r, \alpha_{r+1}$ entiers strictement positifs et $P$ tel que $\deg(P) < \sum_{k=1}^{r+1} \alpha_k \deg(Q_k)$.
  Comme $\prod_{k=1}^r {Q_k}^{\alpha_k}$ et ${Q_{r+1}}^{\alpha_{r+1}}$ sont premiers entre eux (car sans facteur irréductible commun), par la question **1.2.** on peut écrire

  $$\frac{P}{\left(\prod_{k=1}^r {Q_k}^{\alpha_k}\right){Q_{r+1}}^{\alpha_{r+1}}} = \frac{\widetilde{P}}{\prod_{k=1}^r {Q_k}^{\alpha_k}} + \frac{P_{r+1}}{{Q_{r+1}}^{\alpha_{r+1}}}$$

  où $\deg(\widetilde{P}) < \deg\left(\prod_{k=1}^r {Q_k}^{\alpha_k}\right)$ et $\deg(P_{r+1}) < \deg\left({Q_{r+1}}^{\alpha_{r+1}}\right)$.
  On applique ensuite l'hypothèse de récurrence $\mathcal{H}_r$ à la fraction rationnelle $\frac{\widetilde{P}}{\left(\prod_{k=1}^r {Q_k}^{\alpha_k}\right)}$ (qui vérifie bien les hypothèses) et $\mathcal{H}_1$ à la fraction rationnelle $\frac{P_{r+1}}{{Q_{r+1}}^{\alpha_{r+1}}}$ (qui vérifie bien les hypothèses).
  L'unicité découle successivement de l'unicité de la question **1.2.**, puis de celles données par $\mathcal{H}_r$ et $\mathcal{H}_1$.
- **Conclusion**
  On a montré $\mathcal{H}_1$ et, pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{H}_r \Rightarrow \mathcal{H}_{r+1}$.
  Par récurrence on a donc

  $$\boxed{\forall r \in \mathbb{N}^*, \mathcal{H}_r}.$$

**1.4.** En déduire l'existence et l'unicité de la décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle.

Pour $F \in \mathbb{K}(X)$ en notant $E$ sa partie entière il suffit d'appliquer le résultat précédent à $F - E$.

## 2. Méthode d'intégration numérique de Simpson

L'objectif de cet exercice est de donner une approximation de l'intégrale d'une fonction $f$ de classe $\mathcal{C}^3$ sur un intervalle fini $[a,b]$, où $a$ et $b$ sont deux réels tels que $a < b$.

On commence par s'intéresser au cas de polynômes de degré 2.
**2.1.** Dans cette question, on étudie les polynômes suivants:

$$P_0(X) = 2X^2 - 3X + 1,\ P_1(X) = 2X^2 - X,\ \text{et}\ P_2(X) = 4X - 4X^2.$$

**2.1.1.** Donner les racines de ces trois polynômes et les valeurs de $\int_0^1 P_i(x)\mathrm{d}x$, pour $i \in \{0,1,2\}$.

Il s'agit de trinômes du second degré.
On obtient:

- $P_0$ admet $\frac{1}{2}$ et 1 comme racines et
$$\int_0^1 P_0(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{6}$$
- $P_1$ admet 0 et $\frac{1}{2}$ comme racines et
$$\int_0^1 P_1(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{6}$$
- $P_2$ admet 0 et 1 comme racines et
$$\int_0^1 P_2(x)\mathrm{d}x = \frac{4}{6}$$

**2.1.2.** Soit $Q$ un polynôme de degré inférieur ou égal à 2.
Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$Q(x) = Q(0)P_0(x) + Q(1)P_1(x) + Q\left(\frac{1}{2}\right)P_2(x).$$

En déduire que

$$\int_0^1 Q(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{6}\left(Q(0) + Q(1) + 4Q\left(\frac{1}{2}\right)\right).$$

On peut écrire $Q(x) = ax^2 + bx + c$ et développer des deux côtés.
Plus simplement avec

$$R(x) = Q(x) - \left(Q(0)P_0(x) + Q(1)P_1(x) + Q\left(\frac{1}{2}\right)P_2(x)\right)$$

on observe que

$$R(0) = R\left(\frac{1}{2}\right) = R(1) = 0.$$

Comme $R$ est un polynôme de degré $\leq 2$ admettant au moins 3 racines on en déduit que pour tout $x$, $R(x) = 0$.
En intégrant l'égalité entre 0 et 1 et en utilisant la question précédente on obtient le résultat.
*Remarque: il s'agit bien entendu des polynômes d'interpolation de Lagrange aux points* 0, $\frac{1}{2}$ *et* 1.

Dans la suite de cette partie, on choisit deux réels $c$ et $d$ dans $[a,b]$ tels que $c < d$.
**2.2.** Soit $P$ un polynôme de degré inférieur ou égal à 2.
Calculer

$$\int_c^d P(y)\mathrm{d}y - \frac{(d-c)}{6}\left(P(c) + P(d) + 4P\left(\frac{c+d}{2}\right)\right).$$

En effectuant le changement de variables $y = (d-c)x + c$ on obtient

$$\int_c^d P(y)\mathrm{d}y = (d-c)\int_0^1 P\left((d-c)x + c\right)\mathrm{d}x.$$

En posant $Q(x) = P\left((d-c)x + c\right)$ qui est bien un polynôme de degré inférieur ou égal à 2 et en appliquant la question précédente on obtient que

$$\int_c^d P(y)\mathrm{d}y = \frac{(d-c)}{6}\left(P(c) + P(d) + 4P\left(\frac{c+d}{2}\right)\right).$$

Dans la suite de cette partie, on fixe $f$ une fonction de classe $\mathcal{C}^3$ sur $[a,b]$ et on se propose d'étudier la différence

$$\int_c^d f(y)\mathrm{d}y - \frac{(d-c)}{6}\left(f(c) + f(d) + 4f\left(\frac{c+d}{2}\right)\right).$$

Pour cela, on pose, pour tout $h \in [0, d-c]$,

$$\varphi(h) = \int_c^{c+h} f(y)\mathrm{d}y - \frac{h}{6}\left(f(c) + f(c+h) + 4f\left(c + \frac{h}{2}\right)\right).$$

**2.4.** Justifier que $\varphi$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^3$ sur $[0, d-c]$ et calculer ses dérivées jusqu'à l'ordre 3.

La fonction $h \mapsto \int_c^{c+h} f(y)\mathrm{d}y$ a pour dérivée $h \mapsto f(c+h)$, qui est de classe $\mathcal{C}^3$ ; elle est donc de classe $\mathcal{C}^4$, et en particulier $\mathcal{C}^3$.
De plus $f$ est de classe $\mathcal{C}^3$, et les fonctions affines sont de classe $\mathcal{C}^\infty$, donc en particulier de classe $\mathcal{C}^3$.
Donc, par opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^3$, $\varphi$ est de classe $\mathcal{C}^3$.
Un calcul montre que, pour tout $h \in [0, d-c]$

- $$\varphi'(h) = \left(1 - \frac{1}{6}\right) f(c+h) - \frac{1}{6}f(c) - \frac{4}{6}f\left(c + \frac{h}{2}\right) - h\left(\frac{1}{6} \times 0 + \frac{4}{2 \times 6}f'\left(c + \frac{h}{2}\right) + \frac{1}{6}f'(c+h)\right)$$
- $$\varphi''(h) = \left(1 - \frac{2}{6}\right) f'(c+h) - \frac{2 \times 4}{6 \times 2}f'\left(c + \frac{h}{2}\right) - h\left(\frac{1}{6} \times 0 + \frac{4}{2^2 \times 6}f''\left(c + \frac{h}{2}\right) + \frac{1}{6}f''(c+h)\right)$$
- $$\varphi'''(h) = \left(1 - \frac{3}{6}\right) f''(c+h) - \frac{3 \times 4}{6 \times 2^2}f''\left(c + \frac{h}{2}\right) - h\left(\frac{1}{6} \times 0 + \frac{4}{2^3 \times 6}f'''\left(c + \frac{h}{2}\right) + \frac{1}{6}f'''(c+h)\right)$$

*Remarque: Pour simplifier les calculs, on peut remarquer que la formule de Leibniz donne pour tout entier $k$ et toute fonction $F$ dérivable $k$ fois*

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}h^k}\left(hF(h)\right) = hF^{(k)}(h) + kF^{(k-1)}(h).$$

**2.5.** Montrer qu'il existe une constante $M \geq 0$, indépendante de $c$ et $d$, telle que, pour tout $h \in [0, d-c]$,

$$\left|\varphi^{(3)}(h)\right| \leq Mh.$$

On a vu dans la question précédente que

$$\varphi^{(3)}(h) = \underbrace{\frac{1}{2}\left(f''(c+h) - f''\left(c + \frac{h}{2}\right)\right)}_{A} \underbrace{- h\left(\frac{1}{12}f'''\left(c + \frac{h}{2}\right) + \frac{1}{6}f'''(c+h)\right)}_{B}.$$

On traite séparément les termes $A$ et $B$.
($A$) Par l'inégalité des accroissements finis, comme $f''$ est de classe $\mathcal{C}^1$, il existe une constante $C$ (on peut prendre $C = \sup_{[a,b]} |f'''|$, indépendante de $c$ et $d$) telle que pour tout $h \in [0, d-c]$

$$\left|f''(c+h) - f''\left(c + \frac{h}{2}\right)\right| \leq C\left|h - \frac{h}{2}\right| = \frac{C}{2}h.$$

($B$) Comme $f'''$ est continue, par le théorème des bornes atteintes, elle est bornée et atteint ses bornes.
Avec $K = \sup_{[a,b]}(|f'''|)$ par inégalité triangulaire on obtient alors

$$\left|\frac{1}{12}f'''\left(c + \frac{h}{2}\right) + \frac{1}{6}f'''(c+h)\right| \leq \frac{1}{12}K + \frac{1}{6}K.$$

En regroupant les deux résultats, comme par inégalité triangulaire, $|\varphi^{(3)}(h)| \leq |A| + |B|$, avec $M = \frac{C}{4} + \frac{1}{12}K + \frac{1}{6}K$ on obtient le résultat.

**2.6.** En déduire que pour tout $h \in [0, d-c]$,

$$\left|\varphi''(h)\right| \leq \frac{M}{2}h^2$$

.

Il faut ici faire attention, il y a une étape de plus par rapport à l'intégration d'une inégalité.
Soit $h \in [0, d-c]$.
Alors, par le théorème fondamental de l'analyse

$$\varphi''(h) - \varphi''(0) = \int_0^h \varphi'''(t)\mathrm{d}t$$

. Tout d'abord, à l'aide de l'expression explicite de $\varphi''$ obtenue on vérifie que

$$\varphi''(0) = 0.$$

Puis, par inégalité triangulaire

$$|\varphi''(h)| = \left| \int_0^h \varphi'''(t) \mathrm{d}t \right| \leq \int_0^h |\varphi'''(t)| \, \mathrm{d}t$$

et en intégrant l'inégalité de la question précédente

$$\int_0^h |\varphi'''(t)| \, \mathrm{d}t \leq \int_0^h M t \mathrm{d}t = M \frac{h^2}{2}.$$

**2.7.** En procédant de même, établir que

$$\left| \int_c^d f(y) \mathrm{d}y - \frac{(d-c)}{6} \left( f(c) + f(d) + 4f\left( \frac{c+d}{2} \right) \right) \right| \leq \frac{M}{24} (d-c)^4.$$

On procède de même en vérifiant que $\varphi'(0) = 0$ et en utilisant l'inégalité triangulaire puis la croissance de l'intégrale, pour montrer que pour tout $h \in [0, d-c]$

$$|\varphi'(h)| \leq M \frac{h^3}{6}.$$

Puis, de même, comme $\varphi(0) = 0$, par inégalité triangulaire puis la croissance de l'intégrale, on a pour tout $h \in [0, d-c]$

$$|\varphi(h)| \leq M \frac{h^4}{24}.$$

On applique alors ce résultat à $h = d - c$ pour obtenir le résultat demandé.

**2.8.** Soit $n$ entier strictement positif. Pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, on pose

$$f_i = f\left( a + i\frac{b-a}{n} \right) + f\left( a + (i+1)\frac{b-a}{n} \right) + 4f\left( a + \left( i + \frac{1}{2} \right) \frac{b-a}{n} \right).$$

Montrer qu'il existe une constante $M$, indépendante de $n$, telle que

$$\left| \int_a^b f(y) \mathrm{d}y - \frac{(b-a)}{6n} \sum_{i=0}^{n-1} f_i \right| \leq \frac{M(b-a)^4}{24} \frac{1}{n^3}.$$

Comme pour les sommes de Riemann on découpe l'intégrale en une somme d'intégrales. Plus précisément, par la relation de Chasles

$$\int_a^b f(y) \mathrm{d}y = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a+i\frac{b-a}{n}}^{a+(i+1)\frac{b-a}{n}} f(y) \mathrm{d}y.$$

Et par inégalité triangulaire on a alors

$$\left| \int_a^b f(y) \mathrm{d}y - \frac{(b-a)}{6n} \sum_{i=0}^{n-1} f_i \right| \leq \sum_{i=0}^{n-1} \left| \int_{a+i\frac{b-a}{n}}^{a+(i+1)\frac{b-a}{n}} f(y) \mathrm{d}y - \frac{b-a}{6n} f_i \right|$$

Et pour tout $i$, en posant $c_i = a + i\frac{b-a}{n}$ et $d_i = a + (i+1)\frac{b-a}{n}$ on a

$$\int_{a+i\frac{b-a}{n}}^{a+(i+1)\frac{b-a}{n}} f(y) \mathrm{d}y - \frac{b-a}{6n} f_i = \int_{c_i}^{d_i} f(y) \mathrm{d}y - \frac{d_i - c_i}{6} \left( f(c_i) + f(d_i) + 4f\left( \frac{c_i + d_i}{2} \right) \right)$$

on applique alors la question précédente à ce terme.
On obtient finalement

$$\sum_{i=0}^{n-1} \left| \int_{a+i\frac{b-a}{n}}^{a+(i+1)\frac{b-a}{n}} f(y) \mathrm{d}y - \frac{b-a}{6n} f_i \right| \leq \sum_{i=0}^{n-1} \frac{M}{24} \left( \frac{b-a}{n} \right)^4$$

ce qui est bien le résultat recherché.

**2.9.** Commenter.

On peut commenter qu'il s'agit d'une méthode d'intégration numérique plus précise que la méthode de Riemann: au lieu d'approcher sur chaque subdivision $f$ par une constante (méthode de Riemann) ou par une fonction affine (méthode des trapèzes), on approche $f$ par un trinôme du second degré.
La méthode est plus précise dans le sens où, si $f$ est $\mathcal{C}^3$, l'erreur effectuée est majorée par un terme en $\frac{1}{n^3}$, tandis que la méthode de Riemann est en $\frac{1}{n}$ et celle des trapèzes en $\frac{1}{n^2}$.

# 3. Calcul de sommes à l'aide d'intégrales

On considère dans cet exercice les suites $(\mathfrak{L}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\mathfrak{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\mathfrak{C}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathfrak{L}_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}; \qquad \mathfrak{I}_n = \sum_{\substack{1\leq k\leq n \\ k \text{impair}}} \frac{1}{k^2}, \quad \mathfrak{C}_n = \sum_{1\leq k\leq n} \frac{1}{k^2}.$$

On cherche à déterminer leurs limites respectives lorsque $n \to +\infty$.

*Les deux parties sont indépendantes.*

## 3.I. Une somme alternée

Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx.$$

**3.1.** Quelles sont les valeurs de $I_0$ et $I_1$ ?

On a

$$I_0 = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\mathrm{d}x = [\ln(1+x)]_0^1 = \boxed{\ln(2)}$$

et

$$I_1 = \int_0^1 \frac{x}{1+x}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1+x-1}{1+x}\mathrm{d}x = \int_0^1 1\mathrm{d}x - I_0 = \boxed{1-\ln(2)}$$

**3.2.** Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$I_{k+1} + I_k = \frac{1}{k+1}.$$

Soit $k \in \mathbb{N}$.
On a par linéarité

$$\begin{aligned} I_{k+1} + I_k &= \int_0^1 \frac{x^{k+1}}{1+x}\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{x^k}{1+x}\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \frac{x^{k+1}+x^k}{1+x}\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \frac{x^k(x+1)}{1+x}\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 x^k \mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{x^{k+1}}{k+1}\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{k+1}. \end{aligned}$$

On a donc bien pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\boxed{I_{k+1} + I_k = \frac{1}{k+1}}$.

**3.3.** En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} = I_0 + (-1)^n I_{n+1}.$$

On a donc pour tout $k \in \mathbb{N}$, (en multipliant l'égalité précédente par $(-1)^{k+1}$)

$$(-1)^{k+1} I_{k+1} - (-1)^k I_k = \frac{(-1)^{k+1}}{k+1}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$.
En sommant l'égalité précédente,

$$\sum_{k=0}^{n} \left( (-1)^{k+1} I_{k+1} - (-1)^k I_k \right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k+1}$$

c'est-à-dire par télescopage

$$(-1)^{n+1} I_{n+1} - (-1)^0 I_0 = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k+1}$$

d'où

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} = I_0 + (-1)^n I_{n+1}}.$$

**3.4.** On cherche dans cette question à déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
**3.4.**1. Montrer que pour tout $x \in [0,1]$

$$0 \leq \frac{x}{1+x} \leq \frac{1}{2}.$$

Soit $x \in [0,1]$.
On a $0 \leq \frac{x}{1+x}$ car $x \geq 0$ et $1+x > 0$.
De plus comme $1+x \leq 2$ on a $\frac{1}{1+x} \geq \frac{1}{2}$ et donc $\frac{x}{1+x} = 1 - \frac{1}{1+x} \leq 1 - \frac{1}{2}$.
On obtient donc bien

$$\boxed{0 \leq \frac{x}{1+x} \leq \frac{1}{2}}.$$

*Remarque: il y avait évidemment beaucoup d'autres méthodes pour établir cette inégalité.*

**3.4.**2. En déduire que pour tout $n \geq 1$ on a

$$0 \leq I_n \leq \frac{1}{2n}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On a par l'inégalité précédente (et par positivité de $x^{n-1}$ pour $x \in [0,1]$)

$$\forall x \in [0,1], \quad 0 \leq \frac{x^n}{1+x} \leq \frac{1}{2} x^{n-1}$$

et donc par croissance de l'intégrale

$$0 \leq I_n \leq \frac{1}{2} \int_0^1 x^{n-1} \mathrm{d}x$$

c'est-à-dire

$$\boxed{0 \leq I_n \leq \frac{1}{2n}}.$$

**3.4.**3. Conclure que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = 0.$$

Par théorème des gendarmes on a donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} I_n = 0}.$$

**3.5.** Déduire des questions précédentes que la suite $(\mathfrak{L}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que

$$\lim_{n\to+\infty} \mathfrak{L}_n = \ln(2).$$

On a vu que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} = I_0 + (-1)^n I_{n+1}$$

et de plus (produit de suite bornée et suite tendant vers 0) d'après la question précédente

$$\lim_{n\to+\infty} (-1)^n I_{n+1} = 0.$$

On en déduit

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \mathfrak{L}_n = I_0 = \ln(2)}.$$

## 3.II. Inverses des carrés

Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose

$$J_n = \int_0^\pi t\cos(nt)\mathrm{d}t.$$

**3.6.** Quelle est la valeur de $J_0$ ? Montrer que pour $n \geq 1$ on a

$$J_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\dfrac{2}{n^2} & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

On a

$$J_0 = \int_0^\pi t\cos(0)\mathrm{d}t = \boxed{\frac{\pi^2}{2}}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Par intégration par parties

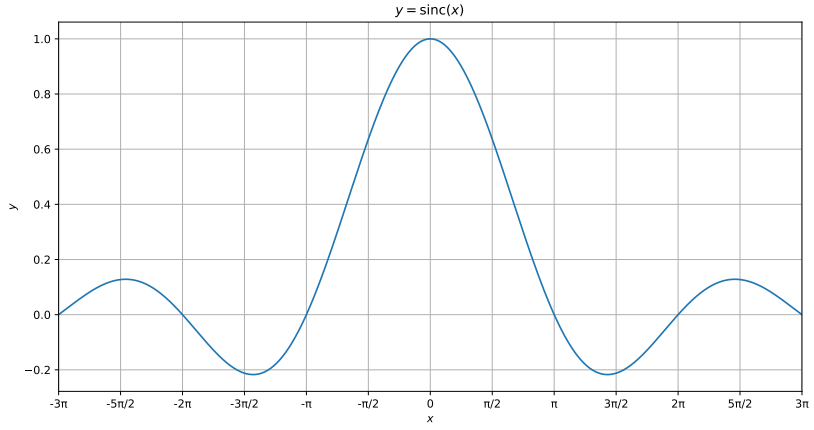
$$\begin{aligned} J_n &= \left[t\frac{\sin(nt)}{n}\right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{\sin(nt)}{n}\mathrm{d}t \\ &= 0 - \frac{1}{n}\int_0^\pi \sin(nt)\mathrm{d}t \\ &= 0 - \frac{1}{n}\left[-\frac{\cos(nt)}{n}\right]_0^\pi \\ &= \frac{1}{n^2}\left(\cos(n\pi) - \cos(0)\right) \\ &= \frac{1}{n^2}\left((-1)^n - 1\right) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\dfrac{2}{n^2} & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases} \end{aligned}$$

On définit la fonction sinc : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$\begin{array}{rccc} & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ \mathrm{sinc}: & x & \mapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ \frac{\sin(x)}{x} & \text{sinon.} \end{cases} \end{array}.$$

**3.7.** Représenter sans justification le graphe de la fonction sinc sur l'intervalle $[-3\pi, 3\pi]$.

On obtient




**3.8.** Montrer que $\text{sinc} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Par caractère local de la dérivabilité et de la continuité, sinc est dérivable de dérivée continue sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. Et pour tout $x \neq 0$, $\text{sinc}'(x) = \frac{x\cos(x)-\sin(x)}{x^2}$.
On a donc

- sinc est continue en 0 car $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$,
- $\lim_{x\to 0} \text{sinc}'(x) = 0$ car

$$\frac{x\cos(x)-\sin(x)}{x^2} = \frac{x\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)-\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)}{x^2} = -\frac{x}{3}+o(x).$$

Par le théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$ on en déduit donc que $\boxed{\text{sinc} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})}$.

**3.9.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$\forall t \in ]-2\pi, 2\pi[, \quad \sum_{k=1}^{n} t\cos(kt) = -\frac{t}{2} + \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{\text{sinc}\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

Soit $t \in ]-2\pi, 2\pi[$.
Si $t = 0$ on a bien
$\sum_{k=0}^{n} 0 = -\frac{0}{2} + \frac{0}{1}$.
Sinon, par somme géométrique ($e^{it} \neq 1$) et formule de l'angle moitié (uniquement sur le dénominateur), on a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \cos(kt) &= \text{Re}\left(\sum_{k=1}^{n} e^{ikt}\right) \\
&= \text{Re}\left(\frac{e^{i(n+1)t}-1}{e^{it}-1}\right) \\
&= \text{Re}\left(\frac{e^{i(n+1)t}-1}{e^{i\frac{t}{2}}2i\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\right) \\
&= \frac{1}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\text{Re}\left(-ie^{i(n+\frac{1}{2})t}+ie^{-i\frac{t}{2}}\right) \\
&= \frac{1}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\left(\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)-\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right) \\
&= \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} - \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

En multipliant par $t$ on obtient alors

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} t\cos(kt) = -\frac{t}{2} + \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{\text{sinc}\left(\frac{t}{2}\right)}}.$$

**3.10.** En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\mathfrak{I}_n = \sum_{\substack{1\leq k\leq n\\ k \text{ impair}}} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{2}\int_0^\pi \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{\operatorname{sinc}\left(\frac{t}{2}\right)}\mathrm{d}t.$$

En intégrant l'égalité de la question **3.9.** entre 0 et $\pi$ on obtient

$$\sum_{k=1}^{n}\int_0^\pi t\cos(kt)\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\int_0^\pi t\mathrm{d}t + \int_0^\pi \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{\operatorname{sinc}\left(\frac{t}{2}\right)}\mathrm{d}t$$

et donc d'après la question **3.6.**

$$\sum_{\substack{1\leq k\leq n\\ k \text{ impair}}} \frac{-2}{k^2} = -\frac{\pi^2}{4} + \int_0^\pi \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{\operatorname{sinc}\left(\frac{t}{2}\right)}\mathrm{d}t$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\sum_{\substack{1\leq k\leq n\\ k \text{ impair}}} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{2}\int_0^\pi \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{\operatorname{sinc}\left(\frac{t}{2}\right)}\mathrm{d}t}.$$

**3.11.** À l'aide d'une intégration par parties bien choisie, montrer que si $f \in \mathcal{C}^1([0,\pi],\mathbb{R})$ alors

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^\pi f(t)\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)\mathrm{d}t = 0.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Par IPP (comme $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$),

$$\int_0^\pi f(t)\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)\mathrm{d}t = \left[f(t)\frac{-\cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{\left(n+\frac{1}{2}\right)}\right]_0^\pi - \int_0^\pi f'(t)\frac{-\cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{\left(n+\frac{1}{2}\right)}\mathrm{d}t$$

d'où

$$\left|\int_0^\pi f(t)\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)\mathrm{d}t\right| \leq \frac{2\|f\|_\infty}{n+\frac{1}{2}} + \frac{\|f'\|_\infty(\pi-0)}{n+\frac{1}{2}}$$

et par conséquent, par encadrement,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\int_0^\pi f(t)\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)\mathrm{d}t = 0}.$$

**3.12.** En déduire que la suite $(\mathfrak{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et que

$$\lim_{n\to+\infty}\mathfrak{I}_n = \frac{\pi^2}{8}.$$

La fonction $t \mapsto \operatorname{sinc}(t/2)$ ne s'annulant pas sur $[0,\pi]$ (car elle ne s'annule pas en 0 et sin ne s'annule pas sur $]0,\pi/2]$), on en déduit que

$$f:\begin{array}{c}[0,\pi]\to\mathbb{R}\\ t\mapsto \dfrac{1}{\operatorname{sinc}\left(\frac{t}{2}\right)}\end{array}$$

est de classe $\mathcal{C}^1$.
Par conséquent d'après la question **3.11.**,

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^\pi f(t)\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)\mathrm{d}t = 0$$

et donc d'après la question **3.10.**

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \mathfrak{I}_n = \frac{\pi^2}{8}}.$$

**3.13.** Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathfrak{C}_{2n} = \frac{1}{4}\mathfrak{C}_n + \mathfrak{I}_{2n}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$.
On a

$$\begin{aligned}
\mathfrak{C}_{2n} &= \sum_{1\leq k\leq 2n} \frac{1}{k^2} \\
&= \sum_{\substack{1\leq k\leq 2n \\ k \text{ pair}}} \frac{1}{k^2} + \sum_{\substack{1\leq k\leq 2n \\ k \text{ impair}}} \frac{1}{k^2} \\
&= \sum_{1\leq j\leq n} \frac{1}{(2j)^2} + \sum_{\substack{1\leq k\leq 2n \\ k \text{ impair}}} \frac{1}{k^2} \\
&= \frac{1}{4}\sum_{1\leq j\leq n} \frac{1}{j^2} + \sum_{\substack{1\leq k\leq 2n \\ k \text{ impair}}} \frac{1}{k^2}
\end{aligned}$$

et par conséquent

$$\boxed{\mathfrak{C}_{2n} = \frac{1}{4}\mathfrak{C}_n + \mathfrak{I}_{2n}}.$$

**3.14.** Montrer que la suite $(\mathfrak{C}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et conclure que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathfrak{C}_n \leq 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = 1 + 1 - \frac{1}{n} \leq 2$$

et de plus

$$\mathfrak{C}_{n+1} - \mathfrak{C}_n = \frac{1}{(n+1)^2} \geq 0.$$

Par conséquent la suite $(\mathfrak{C}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée et croissante, par le théorème de convergence monotone elle est donc convergente.
Notons $\ell$ sa limite.
Alors en passant à la limite le résultat de la question **3.13.** (comme tous les termes convergent) on obtient

$$\ell = \frac{1}{4}\ell + \frac{\pi^2}{8}$$

c'est-à-dire $\ell = \frac{4}{3}\frac{\pi^2}{8}$
ou encore,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}}.$$