Théorème de Maschke

On portera une attention particulière à **la rédaction** et à **la propreté** de la copie.
En particulier tout **graphe ou schéma** pertinent et correctement annoté sera **valorisé**.
Les résultats devront être mis en valeur dès que possible.

Indiquez sur votre copie le temps approximatif pris pour le devoir.

Contexte

Ce sujet démontre le théorème de Maschke: tout sev stable par un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}(E)$ admet un supplémentaire stable par ce même sous-groupe. La preuve repose sur un procédé de moyennisation d'un projecteur.

---

1 Théorème de Maschke

Soit $\mathbb{K}$ un corps et E un $\mathbb{K}$-ev.
Soit $G \subset \mathrm{GL}(E)$ un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}(E)$.
On suppose que la caractéristique de $\mathbb{K}$ ne divise pas $|G|$, de sorte que $|G|$ est inversible dans $\mathbb{K}$ (hypothèse automatiquement vérifiée si $\mathbb{K}$ est de caractéristique nulle, par exemple $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
Attention aux notations: ici G est un sous-groupe du groupe des automorphismes de E et non un sev de E.
On dit qu'un sev F de E est stable par G ssi il est stable par tout élément de G c'est à dire ssi

$$\forall g \in G, \forall x \in F, g(x) \in F.$$

On considère F un sev de E stable par G.
On cherche à montrer qu'il existe un supplémentaire de F stable par G.

On considère S un supplémentaire quelconque de F dans E, et on note π la projection sur F parallèlement à S.
On pose alors

$$\widetilde{\pi} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \circ \pi \circ g^{-1}.$$

1.1. Montrer que $\widetilde{\pi}$ commute avec tout élément de G.
1.2. Montrer que $\mathrm{Im}(\widetilde{\pi}) = F$.
1.3. Montrer que $\widetilde{\pi}$ est un projecteur.
1.4. Conclure.
