En cas d'erreur de corrigé, n'hésitez pas à me le signaler.

Contexte

Ce sujet démontre le théorème de Maschke: tout sev stable par un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}(E)$ admet un supplémentaire stable par ce même sous-groupe. La preuve repose sur un procédé de moyennisation d'un projecteur.

---

1 Théorème de Maschke

Soit $\mathbb{K}$ un corps et E un $\mathbb{K}$-ev.
Soit $G \subset \mathrm{GL}(E)$ un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}(E)$.
On suppose que la caractéristique de $\mathbb{K}$ ne divise pas $|G|$, de sorte que $|G|$ est inversible dans $\mathbb{K}$ (hypothèse automatiquement vérifiée si $\mathbb{K}$ est de caractéristique nulle, par exemple $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
Attention aux notations: ici G est un sous-groupe du groupe des automorphismes de E et non un sev de E.
On dit qu'un sev F de E est stable par G ssi il est stable par tout élément de G c'est à dire ssi

$$\forall g \in G, \forall x \in F, g(x) \in F.$$

On considère F un sev de E stable par G.
On cherche à montrer qu'il existe un supplémentaire de F stable par G.

On considère S un supplémentaire quelconque de F dans E, et on note π la projection sur F parallèlement à S.
On pose alors

$$\widetilde{\pi} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \circ \pi \circ g^{-1}.$$

1.1. Montrer que $\widetilde{\pi}$ commute avec tout élément de G.

Soit $h \in G$.
On a (bilinéarité de la composition d'endomorphismes)

$$\begin{aligned} h \circ \widetilde{\pi} \circ h^{-1} &= h \circ \left(\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \circ \pi \circ g^{-1} \right) \circ h^{-1} \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} h \circ g \circ \pi \circ g^{-1} \circ h^{-1} \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (h \circ g) \circ \pi \circ (h \circ g)^{-1} \end{aligned}$$

Or l'application de translation

$$\tau_h : \begin{array}{c} G \to G \\ g \mapsto h \circ g \end{array}$$

est une bijection de G (car de réciproque $\tau_{h^{-1}}$).
Par changement d'indices,

$$\begin{aligned} \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (h \circ g) \circ \pi \circ (h \circ g)^{-1} &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \circ \pi \circ g^{-1} \\ &= \widetilde{\pi} \end{aligned}$$

On a donc pour tout $h \in G$, $h \circ \widetilde{\pi} \circ h^{-1} = \widetilde{\pi}$.
Donc $\boxed{\widetilde{\pi} \text{ commute avec tout élément de } G.}$

1.2. Montrer que $\mathrm{Im}(\widetilde{\pi}) = F$.

- $\boxed{\subset}$
  Soit $g \in G$.
  On a $\mathrm{Im}(g \circ \pi \circ g^{-1}) \subset \mathrm{Im}(g \circ \pi) = g(\mathrm{Im}(\pi)) = g(F) \subset F$.
  Donc pour tout $g \in G$, $\mathrm{Im}(g \circ \pi \circ g^{-1}) \subset F$.
  D'où
  $$\boxed{\mathrm{Im}(\widetilde{\pi}) \subset F}.$$
- $\boxed{\supset}$
  Soit $x \in F$.
  Comme F stable par G, pour tout $g \in G$, $g^{-1}(x) \in F$.
  D'où pour tout $g \in G$, $\pi(g^{-1}(x)) = g^{-1}(x)$.
  D'où pour tout $g \in G$, $g(\pi(g^{-1}(x))) = g(g^{-1}(x)) = x$.
  D'où
  $$\widetilde{\pi}(x) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \circ \pi \circ g^{-1}(x) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} x = x.$$
  Et donc en particulier $\widetilde{\pi}(x) = x \in \mathrm{Im}(\widetilde{\pi})$.
  D'où
  $$\boxed{F \subset \mathrm{Im}(\widetilde{\pi})}.$$

1.3. Montrer que $\widetilde{\pi}$ est un projecteur.

Soit $x \in E$.
Par la question précédente $\widetilde{\pi}(x) \in F$.
Et donc par le résultat intermédiaire démontré à la question précédente, $\widetilde{\pi}(\widetilde{\pi}(x)) = \widetilde{\pi}(x)$.
On a donc $\widetilde{\pi} \circ \widetilde{\pi} = \widetilde{\pi}$.
Donc $\boxed{\widetilde{\pi} \text{ est un projecteur.}}$

1.4. Conclure.

Soit $S = \mathrm{Ker}(\widetilde{\pi})$.
Alors, comme $\widetilde{\pi}$ est un projecteur $\boxed{S \oplus F = E}$.
Soit $g \in G$. Comme g et $\widetilde{\pi}$ commutent, alors en particulier $\mathrm{Ker}(\widetilde{\pi})$ est stable par g.
Donc $\boxed{S \text{ est stable par } G}$.
