Théorème de Beatty

On portera une attention particulière à **la rédaction** et à **la propreté** de la copie.
En particulier tout **graphe ou schéma** pertinent et correctement annoté sera **valorisé**.
Les résultats devront être mis en valeur dès que possible.

Indiquez sur votre copie le temps approximatif pris pour le devoir.

Contexte

Étant donné un réel x on rappelle que la notation $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x, c'est à dire le plus grand entier inférieur à x.
Par commodité on notera aussi $\lceil x \rceil$ le plus petit entier supérieur à x.
Enfin on notera

$$\mathfrak{B}(x) = \{\lfloor nx \rfloor\,,\ n \in \mathbb{N}^*\}\,.$$

On cherche à démontrer la proposition suivante

Proposition 1 (Théorème de Beatty)
Soient α et β deux réels strictement positifs.
On a équivalence entre
(i) La famille $(\mathfrak{B}(\alpha), \mathfrak{B}(\beta))$ forme une partition de $\mathbb{N}^*$.
(ii) Les réels α et β sont *irrationnels* et

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1.$$

---

1. Questions intermédiaires

1.I. Préliminaires

1.1. Soit $x \in]0, 1]$. Que dire de $\mathfrak{B}(x)$?
1.2. Soit $F \subset \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$F = \mathbb{N}^* \ \Leftrightarrow\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \operatorname{card}\left(F \cap [\![1, n]\!]\right) = n.$$

1.3. Soit $x > 1$. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \operatorname{card}\left(\mathfrak{B}(x) \cap [\![1, n]\!]\right) = \left\lceil \frac{n+1}{x} \right\rceil - 1.$$

1.II. Sens direct

Soient α et β deux réels strictement positifs vérifiant *(i)*. La première question montre nécessairement que $\alpha > 1$ et $\beta > 1$.
1.4. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left\lceil \frac{n+1}{\alpha} \right\rceil + \left\lceil \frac{n+1}{\beta} \right\rceil = n + 2.$$

Indication: *Calculer de deux manières différentes* $\operatorname{card}\left((\mathfrak{B}(\alpha) \cup \mathfrak{B}(\beta)) \cap [\![1, n]\!]\right)$
1.5. En déduire que

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1.$$

1.6. Montrer que **si** α et β sont tous les deux rationnels, **alors** $\mathfrak{B}(\alpha) \cap \mathfrak{B}(\beta) \neq \emptyset$.
1.7. En déduire que α et β sont tous les deux irrationnels.

1.III. Sens réciproque

Soient α et β deux réels strictement positifs vérifiant *(ii)*. Cette relation impose nécessairement $\alpha > 1$ et $\beta > 1$.
1.8. Montrer que $\mathfrak{B}(\alpha) \cap \mathfrak{B}(\beta) = \emptyset$.
1.9. Montrer que $\mathfrak{B}(\alpha) \cup \mathfrak{B}(\beta) = \mathbb{N}^*$.