En cas d'erreur de corrigé, n'hésitez pas à me le signaler.

Contexte

Étant donné un réel x on rappelle que la notation $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x, c'est à dire le plus grand entier inférieur à x.
Par commodité on notera aussi $\lceil x \rceil$ le plus petit entier supérieur à x.
Enfin on notera

$$\mathfrak{B}(x) = \{\lfloor nx \rfloor,\ n \in \mathbb{N}^*\}.$$

On cherche à démontrer la proposition suivante

Proposition 1 (Théorème de Beatty)
Soient α et β deux réels strictement positifs.
On a équivalence entre
(i) La famille $(\mathfrak{B}(\alpha), \mathfrak{B}(\beta))$ forme une partition de $\mathbb{N}^*$.
(ii) Les réels α et β sont *irrationnels* et

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1.$$

---

1. Questions intermédiaires

1.I. Préliminaires

1.1. Soit $x \in]0, 1]$. Que dire de $\mathfrak{B}(x)$?

Si $x = 1$, $\mathfrak{B}(1) = \mathbb{N}^*$.
Si $x \in]0, 1[$ on a pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, en posant $n = \left\lceil \frac{k}{x} \right\rceil \in \mathbb{N}^*$ on a

$$\frac{k}{x} \leq n < \frac{k}{x} + 1$$

d'où comme $x > 0$,

$$k \leq nx < k + x$$

et comme $x \leq 1$,

$$k \leq nx < k + 1$$

et par conséquent

$$\lfloor nx \rfloor = k.$$

De plus si $x < 1$ on a $\lfloor 1x \rfloor = 0$ et comme $\mathfrak{B}(x) \subset \mathbb{N}$, on en déduit pour $x \in]0, 1[$.

$$\boxed{\mathfrak{B}(x) = \mathbb{N}}.$$

1.2. Soit $F \subset \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$F = \mathbb{N}^* \ \Leftrightarrow\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \operatorname{card}(F \cap [\![1, n]\!]) = n.$$

- $\boxed{\Rightarrow}$ Si $F = \mathbb{N}^*$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\mathbb{N}^* \cap [\![1, n]\!] = [\![1, n]\!]$ et donc est de cardinal n.
- $\boxed{\Leftarrow}$ Soit F tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\operatorname{card}(F \cap [\![1, n]\!]) = n$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, comme $F \cap [\![1, n]\!] \subset [\![1, n]\!]$ et a le même cardinal on en déduit

  $$\forall n \in \mathbb{N}^*, F \cap [\![1, n]\!] = [\![1, n]\!]$$

  et donc, comme $([\![1, n]\!])_{n \in \mathbb{N}^*}$ est un **recouvrement** de $\mathbb{N}^*$,

  $$F = F \cap \mathbb{N}^* = F \cap \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} [\![1, n]\!] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} (F \cap [\![1, n]\!]) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} [\![1, n]\!] = \mathbb{N}^*.$$

On a donc bien montré que

$$\boxed{F = \mathbb{N}^* \ \Leftrightarrow\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \operatorname{card}(F \cap [\![1, n]\!]) = n}.$$

1.3. Soit $x > 1$. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \operatorname{card}\left(\mathfrak{B}(x) \cap [\![1, n]\!]\right) = \left\lceil \frac{n+1}{x} \right\rceil - 1.$$

Soit $k \in \mathbb{N}^*$.
On a les équivalences, par définition de $\lfloor \cdot \rfloor$, $\lceil \cdot \rceil$, comme $x > 0$ et que k et n sont entiers

$$\begin{aligned} \lfloor kx \rfloor \leq n &\Leftrightarrow kx < n+1 \\ &\Leftrightarrow k < \frac{n+1}{x} \\ &\Leftrightarrow k+1 \leq \left\lceil \frac{n+1}{x} \right\rceil \\ &\Leftrightarrow k \leq \left\lceil \frac{n+1}{x} \right\rceil - 1. \end{aligned}$$

On en déduit que $\lfloor kx \rfloor \in [\![1, n]\!]$ ssi $k \in \left[\!\left[1, \left\lceil \frac{n+1}{x} \right\rceil - 1\right]\!\right]$. De plus l'application

$$\begin{aligned} \mathbb{N}^* &\to \mathfrak{B}(x) \\ k &\mapsto \lfloor kx \rfloor \end{aligned}$$

est bijective. En effet par définition elle est surjective, et si $k_1 \neq k_2$ alors $|k_2 - k_1| \geq 1$ d'où $|k_2 x - k_1 x| \geq x \geq 1$ et donc $\lfloor k_1 x \rfloor \neq \lfloor k_2 x \rfloor$.
D'où

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \operatorname{card}\left(\mathfrak{B}(x) \cap [\![1, n]\!]\right) = \left\lceil \frac{n+1}{x} \right\rceil - 1}.$$

1.II. Sens direct

Soient α et β deux réels strictement positifs vérifiant *(i)*. La première question montre nécessairement que $\alpha > 1$ et $\beta > 1$.

1.4. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \left\lceil \frac{n+1}{\alpha} \right\rceil + \left\lceil \frac{n+1}{\beta} \right\rceil = n + 2.$$

Indication: *Calculer de deux manières différentes* $\operatorname{card}\left((\mathfrak{B}(\alpha) \cup \mathfrak{B}(\beta)) \cap [\![1, n]\!]\right)$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Tout d'abord, comme $\mathfrak{B}(\alpha)$ et $\mathfrak{B}(\beta)$ forment un recouvrement, on a d'après la question **1.2.** (ou bien directement)

$$\operatorname{card}\left((\mathfrak{B}(\alpha) \cup \mathfrak{B}(\beta)) \cap [\![1, n]\!]\right) = n.$$

- Ensuite, comme $\mathfrak{B}(\alpha)$ et $\mathfrak{B}(\beta)$ sont disjoints, on a en particulier $\mathfrak{B}(\alpha) \cap [\![1, n]\!]$ et $\mathfrak{B}(\beta) \cap [\![1, n]\!]$ **disjoints**. Et en utilisant la question **1.3.** on obtient donc

$$\begin{aligned} \operatorname{card}\left((\mathfrak{B}(\alpha) \cup \mathfrak{B}(\beta)) \cap [\![1, n]\!]\right) &= \operatorname{card}\left((\mathfrak{B}(\alpha) \cap [\![1, n]\!]) \cup (\mathfrak{B}(\beta) \cap [\![1, n]\!])\right) \\ &= \operatorname{card}\left(\mathfrak{B}(\alpha) \cap [\![1, n]\!]\right) + \operatorname{card}\left(\mathfrak{B}(\beta) \cap [\![1, n]\!]\right)) \\ &= \left\lceil \frac{n+1}{\alpha} \right\rceil - 1 + \left\lceil \frac{n+1}{\beta} \right\rceil - 1 \end{aligned}$$

D'où on obtient bien

$$\boxed{\left\lceil \frac{n+1}{\alpha} \right\rceil + \left\lceil \frac{n+1}{\beta} \right\rceil = n + 2}.$$

1.5. En déduire que

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1.$$

On a montré à la question précédente que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \left\lceil \frac{n+1}{\alpha} \right\rceil + \left\lceil \frac{n+1}{\beta} \right\rceil = n + 2$$

et donc (car pour tout n, $n+2>0$),

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \frac{1}{n+2}\left\lceil\frac{n+1}{\alpha}\right\rceil+\frac{1}{n+2}\left\lceil\frac{n+1}{\beta}\right\rceil=1. \tag{1}$$

Soit $x>0$. On a

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \frac{n+1}{x}\leq\left\lceil\frac{n+1}{x}\right\rceil<\frac{n+1}{x}+1$$

et donc (car pour tout n, $n+2>0$),

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \frac{n+1}{n+2}\frac{1}{x}\leq\frac{1}{n+2}\left\lceil\frac{n+1}{x}\right\rceil<\frac{n+1}{n+2}\frac{1}{x}+\frac{1}{n+2}.$$

Lorsque $n\to+\infty$ on a $\frac{n+1}{n+2}\to 1$ et $\frac{1}{n+2}\to 0$. Par conséquent les deux termes encadrants tendent tous les deux vers $\frac{1}{x}$.
Par le **théorème des gendarmes** on en déduit

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+2}\left\lceil\frac{n+1}{x}\right\rceil=\frac{1}{x}.$$

En particulier pour $x=\alpha$ et $x=\beta$, en **passant à la limite** l'égalité (1)

$$\boxed{\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1}.$$

1.6. Montrer que **si** α et β sont tous les deux rationnels, **alors** $\mathfrak{B}(\alpha)\cap\mathfrak{B}(\beta)\neq\emptyset$.

Supposons α et β rationnels et $(p_\alpha,q_\alpha,p_\beta,q_\beta)\in(\mathbb{N}^*)^4$ tel que $\alpha=\frac{p_\alpha}{q_\alpha}$ et $\beta=\frac{p_\beta}{q_\beta}$.
Alors,

$$(q_\alpha p_\beta)\alpha=p_\alpha p_\beta$$
$$(q_\beta p_\alpha)\beta=p_\alpha p_\beta$$

et donc comme $p_\alpha p_\beta\in\mathbb{N}^*$, on a

$$p_\alpha p_\beta=\lfloor(q_\alpha p_\beta)\alpha\rfloor\in\mathfrak{B}(\alpha)$$
$$p_\alpha p_\beta=\lfloor(q_\beta p_\alpha)\beta\rfloor\in\mathfrak{B}(\beta)$$

et donc $\boxed{\mathfrak{B}(\alpha)\cap\mathfrak{B}(\beta)\neq\emptyset}$.

1.7. En déduire que α et β sont tous les deux irrationnels.

Par **contraposée**, comme $\mathfrak{B}(\alpha)\cap\mathfrak{B}(\beta)=\emptyset$ **l'un des deux est irrationnel**. Or d'après la question **1.5.** (on vérifie que l'on n'utilise pas cette question pour démontrer la **1.5.**), on a $\beta=\frac{\alpha}{\alpha-1}$ d'où si α est rationnel alors β l'est aussi.
De même comme $\alpha=\frac{\beta}{\beta-1}$ si β est rationnel, α l'est aussi.
Donc $\boxed{\alpha \text{ et } \beta \text{ sont tous les deux irrationnels}}$.

1.III. Sens réciproque

Soient α et β deux réels strictement positifs vérifiant *(ii)*. Cette relation impose nécessairement $\alpha>1$ et $\beta>1$.
1.8. Montrer que $\mathfrak{B}(\alpha)\cap\mathfrak{B}(\beta)=\emptyset$.

Supposons par l'absurde $\mathfrak{B}(\alpha)\cap\mathfrak{B}(\beta)\neq\emptyset$ et soit $k\in\mathfrak{B}(\alpha)\cap\mathfrak{B}(\beta)$.
Par définition des ensembles il existe donc $n_\alpha,n_\beta\in\mathbb{N}^*$ tels que

$$\lfloor n_\alpha\alpha\rfloor=\lfloor n_\beta\beta\rfloor=k.$$

D'où

$$k\leq n_\alpha\alpha<k+1$$
$$k\leq n_\beta\beta<k+1$$

et comme α et β sont **irrationnels** on a en fait l'inégalité stricte

$$k<n_\alpha\alpha<k+1$$
$$k<n_\beta\beta<k+1.$$

Par stricte positivité de α et β on a donc

$$\frac{k}{\alpha} < n_\alpha < \frac{k+1}{\alpha}$$
$$\frac{k}{\beta} < n_\beta < \frac{k+1}{\beta}$$

et en sommant on obtient donc

$$k\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right) < n_\alpha + n_\beta < (k+1)\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)$$

et comme $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1$ on en déduit

$$k < n_\alpha + n_\beta < k+1$$

ce qui est **absurde** car tous les termes sont entiers.
On a donc montré

$$\boxed{\mathfrak{B}(\alpha)\cap\mathfrak{B}(\beta)=\emptyset}.$$

1.9. Montrer que $\mathfrak{B}(\alpha)\cup\mathfrak{B}(\beta)=\mathbb{N}^*$.

D'après la **question 1.2.** il suffit de montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\text{card}\left((\mathfrak{B}(\alpha)\cup\mathfrak{B}(\beta))\cap[\![1,n]\!]\right)=n$.
Soit $n\in\mathbb{N}^*$.
Comme d'après la **question précédente** $\mathfrak{B}(\alpha)$ et $\mathfrak{B}(\beta)$ sont disjoints, on a

$$\text{card}\left((\mathfrak{B}(\alpha)\cup\mathfrak{B}(\beta))\cap[\![1,n]\!]\right)=\text{card}\left(\mathfrak{B}(\alpha)\cap[\![1,n]\!]\right)+\text{card}\left(\mathfrak{B}(\beta)\cap[\![1,n]\!]\right)$$

et d'après la **question 1.3.** on en déduit donc

$$\text{card}\left((\mathfrak{B}(\alpha)\cup\mathfrak{B}(\beta))\cap[\![1,n]\!]\right)=\left\lceil\frac{n+1}{\alpha}\right\rceil-1+\left\lceil\frac{n+1}{\beta}\right\rceil-1.$$

Or par définition de $\lceil\cdot\rceil$,

$$\frac{n+1}{\alpha}\le\left\lceil\frac{n+1}{\alpha}\right\rceil<\frac{n+1}{\alpha}+1$$
$$\frac{n+1}{\beta}\le\left\lceil\frac{n+1}{\beta}\right\rceil<\frac{n+1}{\beta}+1.$$

Or comme $\frac{n+1}{\alpha}$ (resp. $\frac{n+1}{\beta}$) est **irrationnel** et que $\left\lceil\frac{n+1}{\alpha}\right\rceil$ (resp. $\left\lceil\frac{n+1}{\beta}\right\rceil$) est rationnel les inégalités sont en fait strictes:

$$\frac{n+1}{\alpha}<\left\lceil\frac{n+1}{\alpha}\right\rceil<\frac{n+1}{\alpha}+1$$
$$\frac{n+1}{\beta}<\left\lceil\frac{n+1}{\beta}\right\rceil<\frac{n+1}{\beta}+1.$$

En sommant on obtient

$$(n+1)\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)<\left\lceil\frac{n+1}{\alpha}\right\rceil+\left\lceil\frac{n+1}{\beta}\right\rceil<(n+1)\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)+2$$

et comme $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1$ cela se réécrit

$$n+1<\left\lceil\frac{n+1}{\alpha}\right\rceil+\left\lceil\frac{n+1}{\beta}\right\rceil<n+3$$

et donc comme tous les termes sont **entiers**,

$$\left\lceil\frac{n+1}{\alpha}\right\rceil+\left\lceil\frac{n+1}{\beta}\right\rceil=n+2.$$

et par conséquent $\text{card}\left((\mathfrak{B}(\alpha)\cup\mathfrak{B}(\beta))\cap[\![1,n]\!]\right)=n+2-2=n$.
On a donc bien montré que

$$\boxed{\mathfrak{B}(\alpha)\cup\mathfrak{B}(\beta)=\mathbb{N}^*}.$$