On portera une attention particulière à **la rédaction** et à **la propreté** de la copie.
En particulier tout **graphe ou schéma** pertinent et correctement annoté sera **valorisé**.
Les résultats devront être mis en valeur dès que possible.

Indiquez sur votre copie le temps approximatif pris pour le devoir.

Contexte

Ce problème étudie les symétries (ou réflexions) de Householder et montre comment elles permettent de remplacer le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt. On y travaille dans un espace euclidien, les prérequis étant le produit scalaire, l'orthogonalité, ainsi que les projections et symétries orthogonales.

1 Des symétries pour remplacer Gram-Schmidt

Dans tout le problème E est un espace euclidien muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
Étant donné F un sous-espace de E on note $F^\perp$ son orthogonal.
On rappelle que alors $F \oplus F^\perp = E$, et on appelle projection (resp. symétrie) orthogonale sur F la projection sur F parallèlement à $F^\perp$ (resp. la symétrie par rapport à F parallèlement à $F^\perp$).
On dit qu'une application linéaire $h : E \to E$ est une projection (resp. symétrie) orthogonale si et seulement si il existe F tel que h est la projection orthogonale sur F (resp. symétrie orthogonale par rapport à F).
Pour tout $u \in E$ tel que $\|u\| = 1$, on note

$$\sigma_u : \begin{array}{l} E \to E \\ x \mapsto x - 2\langle x, u \rangle u. \end{array}$$

1.1. Soit $\sigma \in \mathcal{L}(E)$ une symétrie orthogonale.
Montrer que pour tout $x \in E$,

$$\|\sigma(x)\| = \|x\|.$$

1.2. Soit $u \in E$ tel que $\|u\| = 1$.
Montrer que σ_u est une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan que l'on précisera.

1.3. Soient $x, y \in E$ de normes 1, c'est à dire telles que $\|x\| = \|y\| = 1$.
Montrer que $x + y$ et $x - y$ sont orthogonaux.

1.4. Soient e_1, f_1 tels que (e_1, f_1) est libre.
Montrer qu'il existe $u \in \mathrm{Vect}(e_1, f_1)$ tel que $\|u\| = 1$ et tel que

$$\sigma_u(f_1) \in \mathrm{Vect}(e_1).$$

Indication: on pourra commencer par le cas $\|e_1\| = \|f_1\| = 1$.

Dans la suite du sujet, on fixe $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E.

1.5. Soit $k \in [\![1, n]\!]$.
Soit f_k tel que $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_k, f_k)$ est libre.
Montrer qu'il existe $u \in E$ tel que $\|u\| = 1$ et tel que

$$\begin{array}{r} \forall j \in [\![1, k-1]\!],\ \sigma_u(e_j) = e_j \\ \sigma_u(f_k) \in \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_{k-1}, e_k). \end{array}$$

1.6. Soit $(f_1, \ldots, f_n)$ une famille quelconque de vecteurs de E.
Déduire des questions précédentes qu'il existe $h \in \mathcal{L}(E)$ tel que

$$\forall k \in [\![1, n]\!],\ h(f_k) \in \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_k)$$

et

$$\forall x \in E,\ \|h(x)\| = \|x\|.$$