En cas d'erreur de corrigé, n'hésitez pas à me le signaler.

Contexte

Ce problème étudie les symétries (ou réflexions) de Householder et montre comment elles permettent de remplacer le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt. On y travaille dans un espace euclidien, les prérequis étant le produit scalaire, l'orthogonalité, ainsi que les projections et symétries orthogonales.

1 Des symétries pour remplacer Gram-Schmidt

Dans tout le problème E est un espace euclidien muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
Étant donné F un sous-espace de E on note $F^\perp$ son orthogonal.
On rappelle que alors $F \oplus F^\perp = E$, et on appelle projection (resp. symétrie) orthogonale sur F la projection sur F parallèlement à $F^\perp$ (resp. la symétrie par rapport à F parallèlement à $F^\perp$).
On dit qu'une application linéaire $h : E \to E$ est une projection (resp. symétrie) orthogonale si et seulement si il existe F tel que h est la projection orthogonale sur F (resp. symétrie orthogonale par rapport à F).
Pour tout $u \in E$ tel que $\|u\| = 1$, on note

$$\sigma_u : \begin{array}{l} E \to E \\ x \mapsto x - 2\langle x, u\rangle u. \end{array}$$

1.1. Soit $\sigma \in \mathcal{L}(E)$ une symétrie orthogonale.
Montrer que pour tout $x \in E$,

$$\|\sigma(x)\| = \|x\|.$$

Soit F tel que σ est la symétrie orthogonale par rapport à F et p la projection orthogonale sur F.
Soit $x \in E$.
On a alors

$$x = \underbrace{p(x)}_{\in F} + \underbrace{(x - p(x))}_{\in F^\perp}.$$

En particulier

$$\langle p(x), x - p(x)\rangle = 0.$$

Or on a de plus

$$\sigma(x) = 2p(x) - x = p(x) - x + p(x).$$

Par théorème de Pythagore, on a donc

$$\|x\|^2 = \|(x - p(x)) + p(x)\|^2 = \|p(x) - x\|^2 + \|p(x)\|^2$$
$$\|\sigma(x)\|^2 = \|(p(x) - x) + p(x)\|^2 = \|p(x) - x\|^2 + \|p(x)\|^2.$$

Et donc

$$\boxed{\|\sigma(x)\|^2 = \|x\|^2}.$$

1.2. Soit $u \in E$ tel que $\|u\| = 1$.
Montrer que σ_u est une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan que l'on précisera.

Montrons que σ_u est la symétrie orthogonale par rapport à l'hyperplan $\mathrm{Vect}(u)^\perp$.
- Par linéarité du produit scalaire on a bien $\sigma_u \in \mathcal{L}(E)$.
- Soit $x \in \mathrm{Vect}(u)^\perp$.
  On a alors

$$\langle x, u\rangle = 0.$$

  Donc

$$\begin{aligned}\sigma_u(x) &= x - 2\langle x, u\rangle u \\ &= x - 0 \\ &= x.\end{aligned}$$

- Soit $x \in \text{Vect}(u)$.
  Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $x = \lambda u$.
  On a alors (comme $\|u\| = 1$),

$$\begin{aligned}\sigma_u(x) &= \sigma_u(\lambda u) \\ &= \lambda\sigma_u(u) \\ &= \lambda(u - 2\langle u, u\rangle u) \\ &= \lambda(u - 2u) \\ &= -\lambda u \\ &= -x.\end{aligned}$$

On a donc bien σ_u est la symétrie par rapport à $\text{Vect}(u)^\perp$, parallèlement à $\text{Vect}(u)$.
C'est à dire $\boxed{\sigma_u \text{ est la symétrie par rapport à l'hyperplan } \text{Vect}(u)^\perp}$.

1.3. Soient $x, y \in E$ de normes 1, c'est à dire telles que $\|x\| = \|y\| = 1$.
Montrer que $x + y$ et $x - y$ sont orthogonaux.

On a

$$\begin{aligned}\langle x + y, x - y\rangle &= \langle x, x\rangle - \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle - \langle y, y\rangle \\ &= \|x\|^2 - \|y\|^2 \\ &= 0\end{aligned}$$

c'est à dire $\boxed{x + y \text{ et } x - y \text{ sont orthogonaux.}}$.

1.4. Soient e_1, f_1 tels que (e_1, f_1) est libre.
Montrer qu'il existe $u \in \text{Vect}(e_1, f_1)$ tel que $\|u\| = 1$ et tel que

$$\sigma_u(f_1) \in \text{Vect}(e_1).$$

Indication: on pourra commencer par le cas $\|e_1\| = \|f_1\| = 1$.

- Cas $\|e_1\| = \|f_1\| = 1$.
  Comme $f_1 \notin \text{Vect}(e_1)$ on a $f_1 - e_1 \neq 0_E$.
  Posons

$$u = \frac{f_1 - e_1}{\|f_1 - e_1\|}.$$

  On a bien $\|u\| = 1$, $u \in \text{Vect}(e_1, f_1)$ et, d'après la question précédente,

$$\begin{aligned}f_1 - e_1 &\in \text{Vect}(u) \\ f_1 + e_1 &\in \text{Vect}(f_1 - e_1)^\perp = \text{Vect}(u)^\perp\end{aligned}$$

  on en déduit

$$\begin{aligned}\sigma_u(f_1 - e_1) &= -(f_1 - e_1) \\ \sigma_u(f_1 + e_1) &= (f_1 + e_1)\end{aligned}$$

  et en particulier, par linéarité de σ_u,

$$\begin{aligned}\sigma_u(f_1) &= \sigma_u\left(\frac{f_1 - e_1 + f_1 + e_1}{2}\right) \\ &= \frac{\sigma_u(f_1 - e_1) + \sigma_u(f_1 + e_1)}{2} \\ &= \frac{-(f_1 - e_1) + (f_1 + e_1)}{2} \\ &= e_1.\end{aligned}$$

- Cas général
  Comm (e_1, f_1) est libre, en particulier les deux vecteurs sont non nuls.
  Posons

$$\begin{aligned}\widetilde{e_1} &= \frac{e_1}{\|e_1\|}\\ \widetilde{f_1} &= \frac{f_1}{\|f_1\|}.\end{aligned}$$

On a alors $\|\widetilde{e_1}\| = \|\widetilde{f_1}\| = 1$ et $(\widetilde{e_1}, \widetilde{f_1})$ est libre.
En posant $u = \frac{\widetilde{f_1}-\widetilde{e_1}}{\|\widetilde{f_1}-\widetilde{e_1}\|}$ comme dans le cas précédent on obtient bien

$$\begin{aligned}\|u\| &= 1\\ u &\in \mathrm{Vect}(\widetilde{e_1}, \widetilde{f_1})\\ \sigma_u(\widetilde{f_1}) &= \widetilde{e_1}.\end{aligned}$$

Or $\mathrm{Vect}(\widetilde{e_1}, \widetilde{f_1}) = \mathrm{Vect}(e_1, f_1)$ et

$$\begin{aligned}\sigma_u(f_1) &= \sigma_u(\|f_1\|\widetilde{f_1})\\ &= \|f_1\|\sigma_u(\widetilde{f_1})\\ &= \|f_1\|\widetilde{e_1}. \qquad = \frac{\|f_1\|}{\|e_1\|}e_1.\end{aligned}$$

On a donc bien

$$\boxed{\begin{aligned}\|u\| &= 1\\ u &\in \mathrm{Vect}(e_1, f_1)\\ \sigma_u(f_1) &\in \mathrm{Vect}(e_1).\end{aligned}}.$$

Dans la suite du sujet, on fixe $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E.

1.5. Soit $k \in [\![1, n]\!]$.
Soit f_k tel que $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k, f_k)$ est libre.
Montrer qu'il existe $u \in E$ tel que $\|u\| = 1$ et tel que

$$\begin{aligned}\forall j \in [\![1, k-1]\!],\ \sigma_u(e_j) &= e_j\\ \sigma_u(f_k) &\in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_{k-1}, e_k).\end{aligned}$$

Comme $f_k \notin \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k)$ on a en particulier $f_k \notin \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_{k-1})$.
Posons

$$\widetilde{f_k} = f_k - \sum_{j=1}^{k-1}\langle f_k, e_j\rangle e_j.$$

Alors on a pour tout $j \in [\![1, k-1]\!]$,

$$\widetilde{f_k} \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_{k-1})^\perp$$

car $\langle \widetilde{f_k}, e_j\rangle = \langle f_k, e_j\rangle - \langle f_k, e_j\rangle = 0$.
De plus comme $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_{k-1}, e_k, f_k)$ est libre, on a $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_{k-1}, e_k, \widetilde{f_k})$ est libre.
En particulier $(e_k, \widetilde{f_k})$ est libre.
Comme à la question précédente, posons

$$u = \frac{\dfrac{\widetilde{f_k}}{\|\widetilde{f_k}\|} - e_k}{\left\|\dfrac{\widetilde{f_k}}{\|\widetilde{f_k}\|} - e_k\right\|}$$

ce qui a bien un sens car, $(e_k, \widetilde{f_k})$ étant libre, on a $\widetilde{f_k} \neq 0_E$ et $\dfrac{\widetilde{f_k}}{\|\widetilde{f_k}\|} \neq e_k$.

Alors, e_k et $\dfrac{\widetilde{f_k}}{\|\widetilde{f_k}\|}$ étant unitaires,

$$\sigma_u\left(\frac{\widetilde{f_k}}{\|\widetilde{f_k}\|}\right) = e_k$$

donc par linéarité

$$\sigma_u(\widetilde{f_k}) = \|\widetilde{f_k}\|\, e_k \in \mathrm{Vect}(e_k).$$

Or comme $e_k \in \mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_{k-1})^\perp$ et $\widetilde{f_k} \in \mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_{k-1})^\perp$, on a aussi (linéarité)

$$u \in \mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_{k-1})^\perp.$$

Donc

$$\boxed{\forall j \in [\![1,k-1]\!],\ \sigma_u(e_j) = e_j}.$$

Et donc

$$\begin{aligned}\sigma_u\left(f_k\right) &= \sigma_u\left(\widetilde{f_k} + \sum_{j=1}^{k-1}\langle f_k, e_j\rangle e_j\right)\\ &= \sigma_u\left(\widetilde{f_k}\right) + \sum_{j=1}^{k-1}\langle f_k, e_j\rangle \sigma_u(e_j)\\ &= \sigma_u\left(\widetilde{f_k}\right) + \sum_{j=1}^{k-1}\langle f_k, e_j\rangle e_j.\end{aligned}$$

et en particulier

$$\boxed{\sigma_u(f_k) \in \mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_{k-1},e_k)}.$$

1.6. Soit $(f_1,\dots,f_n)$ une famille quelconque de vecteurs de E.
Déduire des questions précédentes qu'il existe $h \in \mathcal{L}(E)$ tel que

$$\forall k \in [\![1,n]\!],\ h(f_k) \in \mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_k)$$

et

$$\forall x \in E,\ \|h(x)\| = \|x\|.$$

Construisons itérativement $h_0, h_1, \dots, h_n \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant l'invariant de boucle suivant:

$$\forall k \in [\![0,n]\!], \begin{cases} \forall x \in E,\ \|h_k(x)\| = \|x\| \\ \forall j \in [\![1,k]\!],\ h_k(f_j) \in \mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_j). \end{cases}$$

- **Initialisation**
  On pose $h_0 = \mathrm{Id}_E$ qui convient bien.
- **Hérédité**
  Soit $k \in [\![0,n-1]\!]$, supposons construit un tel h_k.
  On procède par disjonction de cas.
  ▷ Si $h_k(f_{k+1}) \in \mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_{k+1})$ alors on pose

  $$h_{k+1} = h_k$$

  qui convient bien.
  ▷ Si $h_k(f_{k+1}) \notin \mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_{k+1})$ alors par la question précédente il existe $u \in E$ tel que $\|u\| = 1$ et tel que

  $$\begin{aligned}&\forall j \in [\![1,k]\!],\ \sigma_u(e_j) = e_j\\ &\sigma_u(h_k(f_{k+1})) \in \mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_{k+1}).\end{aligned}$$

  Posons alors

  $$h_{k+1} = \sigma_u \circ h_k.$$

  On a bien,
  ∗ Pour tout $x \in E$,

  $$\|h_{k+1}(x)\| = \|\sigma_u(h_k(x))\| = \|h_k(x)\| = \|x\|.$$

  ∗ Pour tout $j \in [\![1,k]\!]$ on a en particulier

  $$\sigma_u(\mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_j)) = \mathrm{Vect}(\sigma_u(e_1),\dots,\sigma_u(e_j)) = \mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_j)$$

  et comme $h_k(f_j) \in \mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_j)$ on en déduit que

$$h_{k+1}(f_j) = \sigma_u(h_k(f_j)) \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_j).$$

∗ Pour $j = k+1$,

$$h_{k+1}(f_{k+1}) = \sigma_u(h_k(f_{k+1})) \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_{k+1}).$$

Et donc h_{k+1} convient.

- **Conclusion**
  On a donc construit h_n vérifiant l'invariant de boucle.
  En posant $h = h_n$ on a donc bien

$$\boxed{\begin{cases} \forall x \in E,\ \|h(x)\| = \|x\| \\ \forall j \in [\![1, n]\!],\ h(f_j) \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_j). \end{cases}}$$