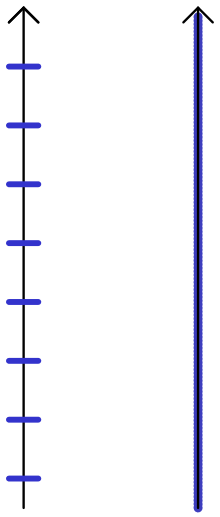
Sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$

On portera une attention particulière à **la rédaction** et à **la propreté** de la copie.
En particulier tout **graphe ou schéma** pertinent et correctement annoté sera **valorisé**.
Les résultats devront être mis en valeur dès que possible.

Indiquez sur votre copie le temps approximatif pris pour le devoir.

Contexte

L'objectif de ce devoir est d'étudier les sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$.
Plus précisément on cherche à montrer le résultat (**très classique** et un ingrédient de nombreux autres exercices) suivant:



Proposition 1 (Sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$)
Soit G un sous-groupe de $(\mathbb{R},+)$.
Alors exactement une des deux propositions suivante est vraie:
(i) G est dense dans $\mathbb{R}$
(ii) il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+$ tel que $G = \alpha\mathbb{Z}$

On utilisera ici comme définition de «dense»:

Une partie A de $\mathbb{R}$ est dite **dense** dans $\mathbb{R}$ ssi

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0,\ ]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap A \neq \emptyset.$$

1 ♠ Sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$

Soit G un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$.
1.1. Que dire si $G = \{0\}$? Dans la suite on suppose $G \neq \{0\}$.
1.2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Montrer que $\alpha\mathbb{Z}$ n'est pas dense dans $\mathbb{R}$.
1.3. Expliquer pourquoi

$$\alpha = \inf\left(G \cap]0, +\infty[\right)$$

est bien défini.
1.4. Montrer que **si** $\alpha = 0$ **alors** G est dense dans $\mathbb{R}$.
1.5. Montrer que **si** $\alpha > 0$ **alors** $G = \alpha\mathbb{Z}$.

2 Application: Période d'une fonction continue périodique

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction périodique.
On note

$$\mathscr{T}_f = \{\tau \in \mathbb{R} | \forall x \in \mathbb{R},\ f(x+\tau) = f(x)\}.$$

2.6. Montrer que $\mathscr{T}_f$ est un sous groupe additif de $\mathbb{R}$.
2.7. En déduire que **si** f est continue et non constante **alors** il existe $T > 0$ tel que $\mathscr{T}_f = T\mathbb{Z}$.
*On appelle alors T **la** période de f.*
2.8. Montrer que $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ est périodique mais n'admet pas de plus petite période.