En cas d'erreur de corrigé, n'hésitez pas à me le signaler.

Contexte

(cf énoncé pour le contexte)

1 ♠ Sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$

Soit G un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$.

1.1. Que dire si $G = \{0\}$? Dans la suite on suppose $G \neq \{0\}$.

Si $G = \{0\}$ alors $G = 0\mathbb{Z}$ et, de plus, G n'est pas dense dans $\mathbb{R}$.

1.2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Montrer que $\alpha\mathbb{Z}$ n'est pas dense dans $\mathbb{R}$.

On a $\alpha\mathbb{Z} = |\alpha|\mathbb{Z}$ et par exemple

$$|\alpha|\mathbb{Z} \cap \left]\frac{1}{3}|\alpha|, \frac{2}{3}|\alpha|\right[= \emptyset$$

(intervalle non vide car $|\alpha| > 0$).
Et donc $\boxed{\alpha\mathbb{Z} \text{ n'est pas dense dans } \mathbb{R}}$.

1.3. Expliquer pourquoi

$$\alpha = \inf\left(G \cap]0, +\infty[\right)$$

est bien défini.

On a $G \cap]0, +\infty[$ **est non-vide**. En effet soit $x \in G \backslash \{0\}$ (existe car $G \neq \{0\}$). Si $x > 0$ alors $x \in G \cap]0, +\infty[$, sinon comme G stable par opposé, $-x \in G \cap]0, +\infty[$.
De plus $G \cap]0, +\infty[$ **est minoré** par 0.
D'où d'après la propriété de la borne supérieure (inférieure) de $\mathbb{R}$, on en déduit $\boxed{\inf\left(G \cap]0, +\infty[\right) \text{ est bien défini}}$.

1.4. Montrer que **si** $\alpha = 0$ **alors** G est dense dans $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$.
Par définition de la borne inférieure, il existe $g \in G \cap]0, +\infty[$ tel que $\boxed{g < \varepsilon}$.
Alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $ng \in G$.
En particulier $\left\lfloor \frac{x}{g} \right\rfloor g \in G$.
Or $\frac{x}{g} - 1 < \left\lfloor \frac{x}{g} \right\rfloor \leq \frac{x}{g}$ d'où comme $g > 0$, $x - g < \left\lfloor \frac{x}{g} \right\rfloor g \leq x$. On a donc

$$x - \varepsilon < x - g < \underbrace{\left\lfloor \frac{x}{g} \right\rfloor g}_{\in G} < x + g < x + \varepsilon.$$

On a donc bien montré $\boxed{G \text{ est dense dans } \mathbb{R}}$.

1.5. Montrer que **si** $\alpha > 0$ **alors** $G = \alpha\mathbb{Z}$.

- Commençons par montrer que $\alpha \in G$.
  Supposons par l'absurde $\alpha \notin G$. Par définition de la borne inférieure, comme $\alpha < 2\alpha$ il existe $g \in G \cap]0, +\infty[$ tel que $g < 2\alpha$.
  Comme $\alpha < g$ (car α minore G et $\alpha \notin G$) il existe alors $h \in G \cap]0, +\infty[$ tel que $h < g$.
  Comme G est un groupe additif on a alors $g - h \in G$.
  Or $g - h > 0$ et $g - h < \alpha$. On aboutit donc à la **contradiction** $g - h \in G \cap]0, +\infty[$ et $g - h < \inf(G \cap]0, +\infty[)$.
  Donc $\alpha \in G$. Et comme G est un groupe on a donc $\boxed{\alpha\mathbb{Z} \subset G}$.
- Montrons ensuite que tout élément de G est de la forme $k\alpha$, $k \in \mathbb{Z}$.

Soit $g \in G$. Soit $k = \left\lfloor \frac{g}{\alpha} \right\rfloor$. Alors $k \leq \frac{g}{\alpha} < k+1$, d'où, comme $\alpha > 0$, $k\alpha \leq g < k\alpha + \alpha$ et donc

$$0 \leq g - k\alpha < \alpha.$$

Or $g - k\alpha \in G$ car G est un groupe, et par définition de α, $0 < g - k\alpha < \alpha$ est impossible. Et donc $g = k\alpha$.
D'où $\boxed{G \subset \alpha\mathbb{Z}}$.
On a donc bien par double inclusion $G = \alpha\mathbb{Z}$.

2 Application: Période d'une fonction continue périodique

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction périodique.
On note

$$\mathscr{T}_f = \{\tau \in \mathbb{R} | \forall x \in \mathbb{R},\ f(x+\tau) = f(x)\}.$$

2.6. Montrer que $\mathscr{T}_f$ est un sous groupe additif de $\mathbb{R}$.

- On a $0 \in \mathscr{T}_f$ car
$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x+0) = f(x).$$
- Soient $(\tau_1, \tau_2) \in \mathscr{T}_f^2$.
Alors
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x + (\tau_1 + \tau_2)) = f(x + \tau_1 + \tau_2) = f(x + \tau_1) = f(x)$$
d'où $\tau_1 + \tau_2 \in \mathscr{T}_f$.
- Soit $\tau \in \mathscr{T}_f$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, en appliquant la relation $f(y+\tau) = f(y)$ à $y = x - \tau$, on obtient $f(x) = f(x-\tau)$, c'est-à-dire
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x + (-\tau)) = f(x)$$
d'où $-\tau \in \mathscr{T}_f$.

$\mathscr{T}_f$ est donc non vide, stable par somme et par opposé.
Donc $\boxed{\mathscr{T}_f \text{ est un sous-groupe additif de } \mathbb{R}}$.

2.7. En déduire que **si** f est continue et non constante **alors** il existe $T > 0$ tel que $\mathscr{T}_f = T\mathbb{Z}$.

Par le résultat démontré précédemment (classification des sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$) on a $\mathscr{T}_f$ est soit dense soit de la forme $\alpha\mathbb{Z}$.
- **Si $\mathscr{T}_f$ est dense**: Soit $x \in \mathbb{R}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ il existe $\tau_n \in \mathscr{T}_f$ tel que $|x - \tau_n| < \frac{1}{n}$. Et donc en particulier
$$\lim_{n \to +\infty} \tau_n = x.$$
(On vient de redémontrer un sens de la caractérisation séquentielle de la densité).
Par **continuité** de f (ou plus précisément par caractérisation séquentielle de la continuité), on a alors
$$\lim_{n \to +\infty} f(\tau_n) = f(x).$$
Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(\tau_n) = f(0 + \tau_n) = f(0)$.
On en déduit donc
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(0)$$
c'est à dire f **est constante**.
- **Si** il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\mathscr{T}_f = \alpha\mathbb{Z}$. Alors comme f est périodique il existe au moins un élément non nul de $\mathscr{T}_f$.
De plus, quitte à considérer $-\alpha$ on peut se ramener à $\alpha > 0$.
Par conséquent **il existe** $T > 0$ **tel que** $\mathscr{T}_f = T\mathbb{Z}$.

On a donc montré que $\boxed{\text{si } f \text{ est continue et non constante alors il existe } T > 0 \text{ tel que } \mathscr{T}_f = T\mathbb{Z}.}$

*On appelle alors T **la** période de f.*

2.8. Montrer que $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ est périodique mais n'admet pas de plus petite période.

On a
- La somme de deux rationnels est rationnelle, ce qui peut se réécrire
$$\forall r \in \mathbb{Q}, \forall x \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{Q} \Rightarrow x + r \in \mathbb{Q}.$$
- La somme d'un irrationnel et d'un rationnel est irrationnelle, ce qui peut se réécrire
$$\forall r \in \mathbb{Q}, \forall x \in \mathbb{R},\ x \notin \mathbb{Q} \Rightarrow x + r \notin \mathbb{Q}.$$

C'est à dire

$$\forall r \in \mathbb{Q},\ \forall x \in \mathbb{R},\ \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x+r) = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x)$$

et donc $\boxed{\text{tout rationnel strictement positif est période de } \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}}$.

On en déduit:

- $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ **est périodique** (il existe des rationnels strictement positifs, par exemple 1),
- $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ n'admet **pas de plus petite période** (il n'existe pas de plus petit rationnel strictement positif, car pour tout $r \in \mathbb{Q}_+^*$ on a $r/2 \in \mathbb{Q}_+^*$ et $r/2 < r$).