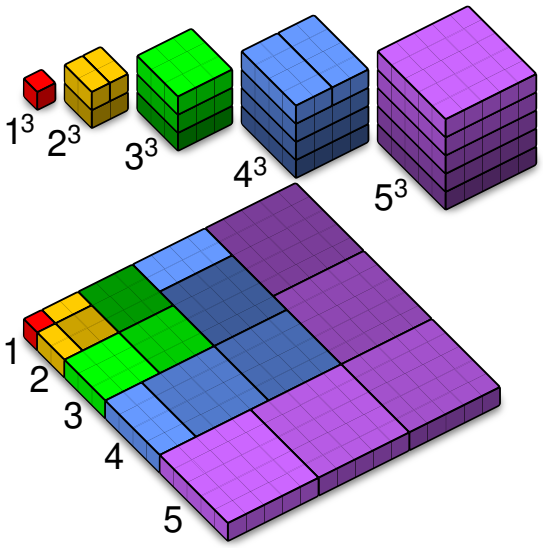
Sommes de puissances

On portera une attention particulière à **la rédaction** et à **la propreté** de la copie.
En particulier tout **graphe ou schéma** pertinent et correctement annoté sera **valorisé**.
Les résultats devront être mis en valeur dès que possible.

Indiquez sur votre copie le temps approximatif pris pour le devoir.

Contexte



Source de l'illustration: Wikipédia

Ce devoir introduit diverses méthodes permettant de calculer les sommes de puissances. En particulier on présente 4 méthodes permettant de montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Pour tous $p, n \in \mathbb{N}$, on note:

$$S_p(n) = \sum_{k=0}^{n} k^p.$$

On rappelle que, dans les cas $p = 0, 1, 2$, les expressions explicites suivantes

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} S_0(n) = (n+1), \\ S_1(n) = \dfrac{n(n+1)}{2}, \\ S_2(n) = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \end{cases}$$

font partie du cours.

---

1. Somme de puissances

Les différentes sous-parties sont indépendantes entre elles.

1.I. Par récurrence

1.1. Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ S_3(n) = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

1.II. Par télescopage

1.2. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} \left((k+1)^4 - k^4\right) = 4S_3(n) + 6S_2(n) + 4S_1(n) + S_0(n).$$

1.3. En déduire une expression explicite de $S_3(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1.III. Somme sur une colonne du triangle de Pascal

1.4. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall p \in [\![0, n]\!], \quad \boxed{\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}}$$

et représenter graphiquement cette proposition sur un triangle de Pascal.

1.5. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\binom{n+1}{4} = \frac{1}{6}S_3(n) - \frac{1}{2}S_2(n) + \frac{1}{3}S_1(n) + 0S_0(n).$$

1.6. En déduire une expression explicite de $S_3(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1.IV. Par somme double

1.7. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{i=0}^{k} i^2 \right) = \frac{1}{3}S_3(n) + \frac{1}{2}S_2(n) + \frac{1}{6}S_1(n) + 0S_0(n).$$

1.8. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{k=i}^{n} i^2 \right) = (n+1)S_2(n) - S_3(n).$$

1.9. En déduire une expression explicite de $S_3(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1.V. Autonomie

1.10. Déterminer, à l'aide de la méthode de votre choix, une expression explicite de $S_4(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.