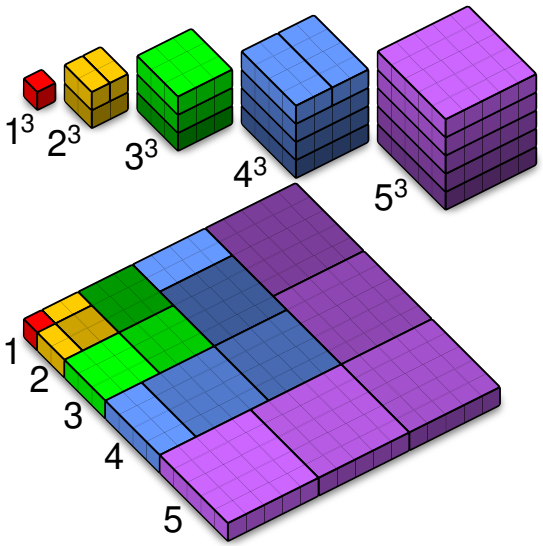
En cas d'erreur de corrigé, n'hésitez pas à me le signaler.

Contexte



Source de l'illustration: Wikipédia

Ce devoir introduit diverses méthodes permettant de calculer les sommes de puissances. En particulier on présente 4 méthodes permettant de montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Pour tous $p, n \in \mathbb{N}$, on note:

$$S_p(n) = \sum_{k=0}^{n} k^p.$$

On rappelle que, dans les cas $p = 0, 1, 2$, les expressions explicites suivantes

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} S_0(n) = (n+1), \\ S_1(n) = \dfrac{n(n+1)}{2}, \\ S_2(n) = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \end{cases}$$

font partie du cours.

1. Somme de puissances

Les différentes sous-parties sont indépendantes entre elles.

1.I. Par récurrence

1.1. Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ S_3(n) = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

- **Initialisation**: Pour $n = 0$ on a bien
$$\sum_{k=0}^{0} k^3 = 0^3 = 0 = \frac{0^2 \times (0+1)^2}{4}.$$
- **Hérédité** Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons que
$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Alors,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} k^3 &= \sum_{k=0}^{n} k^3 + (n+1)^3 \\ &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 \\ &= (n+1)^2 \times \frac{n^2+4n+4}{4} \\ &= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}.\end{aligned}$$

- **Conclusion** La propriété est initialisée et héréditaire, on a donc par récurrence

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ S_3(n) = \frac{n^2(n+1)^2}{4}}.$$

Remarque: cette méthode par récurrence ne nécessite pas de calculs ou astuce particulière, mais nécessite la connaissance a priori de l'expression recherchée.

1.II. Par télescopage

1.2. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} \left((k+1)^4 - k^4\right) = 4S_3(n) + 6S_2(n) + 4S_1(n) + S_0(n).$$

Soit $n \in \mathbb{N}$.
On a par la formule du binôme, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$,

$$\begin{aligned}(k+1)^4 - k^4 &= \left(k^4 + 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1\right) - k^4 \\ &= 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1\end{aligned}$$

d'où en sommant pour k allant de 0 à n, puis par linéarité de la somme

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \left((k+1)^4 - k^4\right) &= \sum_{k=0}^{n} \left(4k^3 + 6k^2 + 4k + 1\right) \\ &= 4\sum_{k=0}^{n} k^3 + 6\sum_{k=0}^{n} k^2 + 4\sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} 1\end{aligned}$$

c'est à dire

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \left((k+1)^4 - k^4\right) = 4S_3(n) + 6S_2(n) + 4S_1(n) + S_0(n)}.$$

1.3. En déduire une expression explicite de $S_3(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.
Par **somme télescopique** on a

$$\sum_{k=0}^{n} \left((k+1)^4 - k^4\right) = (n+1)^4 - 0^4.$$

De la question précédente on déduit donc que

$$S_3(n) = \frac{1}{4}\left((n+1)^4 - 6S_2(n) - 4S_1(n) - S_0(n)\right)$$

c'est à dire, en utilisant les expressions de $S_0(n)$, $S_1(n)$ et $S_2(n)$,

$$\begin{aligned} S_3(n) &= \frac{1}{4}\left((n+1)^4 - 6\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 4\frac{n(n+1)}{2} - (n+1)\right) \\ &= \frac{1}{4}(n+1)\left((n^3+3n^2+3n+1) - (2n^2+n) - 2n - 1\right) \\ &= \frac{1}{4}(n+1)\left(n^3 + (3-2)n^2 + (3-1-2)n + (1-1)\right) \\ &= \frac{1}{4}(n+1)(n+1)n^2 \end{aligned}$$

ce qui se réécrit

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ S_3(n) = \frac{n^2(n+1)^2}{4}}.$$

Remarque: ici, il n'y a pas besoin de connaître le résultat final pour le démontrer, seulement de connaître les sommes des puissances plus petites.
De manière générale, pour un $p \in \mathbb{N}$ quelconque, le même calcul montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(n+1)^{p+1} = \sum_{j=0}^{p} \binom{p+1}{j} S_j(n)$$

et donc

$$S_p(n) = \frac{1}{p+1}\left((n+1)^{p+1} - \sum_{j=0}^{p-1}\binom{p+1}{j}S_j(n)\right).$$

1.III. Somme sur une colonne du triangle de Pascal

1.4. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall p \in [\![0,n]\!], \quad \boxed{\sum_{k=p}^{n}\binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}}$$

et représenter graphiquement cette proposition sur un triangle de Pascal.

La proposition se réécrit

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall n \geq p,\ \sum_{k=p}^{n}\binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}.$$

Soit $p \in \mathbb{N}$ **fixé**.
Pour tout $n \geq p$, notons $\mathcal{H}_n$ la proposition

$$\sum_{k=p}^{n}\binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$$

et montrons par récurrence sur $n \geq p$ que pour tout $n \geq p$, $\mathcal{H}_n$.

- **Initialisation**: Pour $n = p$, on a

$$\sum_{k=p}^{p}\binom{k}{p} = \binom{p}{p} = 1 = \binom{p+1}{p+1}$$

  donc $\mathcal{H}_p$ est vraie.
- **Hérédité**: Soit $n \geq p$ et supposons $\mathcal{H}_n$ c'est à dire

$$\sum_{k=p}^{n}\binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}.$$

Alors, par Chasles, l'hypothèse de récurrence, puis la relation de Pascal,

$$\begin{aligned}\sum_{k=p}^{n+1}\binom{k}{p} &= \sum_{k=p}^{n}\binom{k}{p} + \binom{n+1}{p}\\ &= \binom{n+1}{p+1} + \binom{n+1}{p}\\ &= \binom{(n+1)+1}{p+1}\end{aligned}$$

ce qui est exactement $\mathcal{H}_{n+1}$.

- **Conclusion**: On a montré $\mathcal{H}_p$ et $\forall n \in [\![p, +\infty[\![, \mathcal{H}_n \Rightarrow \mathcal{H}_{n+1}$, donc par récurrence on a

$$\forall n \geq p,\ \sum_{k=p}^{n}\binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}.$$

Et comme $p \in \mathbb{N}$ est arbitraire, on a montré que

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}, \forall n \geq p,\ \sum_{k=p}^{n}\binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}}.$$

Graphiquement on a montré que la somme des éléments d'une colonne du tableau de Pascal est égale au terme immédiatement «en bas à droite».
Il s'agit d'une généralisation de la formule de Pascal, cette dernière étant le cas particulier $n = p + 1$.

1						
1	1					
1	2	1				
1	3	3	1			
1	4	6	4	1		
1	5	10	10	5	1	
1	6	15	20	15	6	1

1.5. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\binom{n+1}{4} = \frac{1}{6}S_3(n) - \frac{1}{2}S_2(n) + \frac{1}{3}S_1(n) + 0S_0(n).$$

Avec la convention $\binom{k}{3} = 0$ pour $k < 3$, on a pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\binom{k}{3} = \frac{k(k-1)(k-2)}{6}$$

c'est à dire en développant

$$\binom{k}{3} = \frac{1}{6}k^3 - \frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{3}k.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$.
En sommant l'égalité précédente pour k allant de 0 à n, on obtient

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{3} = \frac{1}{6}\sum_{k=0}^{n}k^3 - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}k^2 + \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{n}k$$

ce qui donne en utilisant la formule démontrée à la question précédente dans le cas $p = 3$,

$$\boxed{\binom{n+1}{4} = \frac{1}{6}S_3(n) - \frac{1}{2}S_2(n) + \frac{1}{3}S_1(n)}.$$

1.6. En déduire une expression explicite de $S_3(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.
Comme
$$\binom{n+1}{4} = \frac{(n+1)((n+1)-1)((n+1)-2)((n+1)-3)}{4!} = \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{24}$$
de la question précédente et des expressions de $S_0(n), S_1(n), S_2(n)$ on déduit que
$$S_3(n) = 6\left(\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{24} + \frac{1}{2}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{1}{3}\frac{n(n+1)}{2}\right)$$
il suffit ensuite de factoriser et développer:
$$\begin{aligned} S_3(n) &= \frac{1}{4}n(n+1)\left((n-1)(n-2) + 2(2n+1) - 4\right) \\ &= \frac{1}{4}n(n+1)(n^2+n) \end{aligned}$$
c'est à dire
$$\boxed{S_3(n) = \frac{n^2(n+1)^2}{4}}.$$
Remarque: ici encore, il n'y a pas besoin de connaître le résultat final pour le démontrer. La généralisation de la formule de Pascal de la question **1.4.** est très utile à connaître, ainsi que bien sûr sa démonstration et le schéma associé.

1.IV. Par somme double

1.7. Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{i=0}^{k} i^2\right) = \frac{1}{3}S_3(n) + \frac{1}{2}S_2(n) + \frac{1}{6}S_1(n) + 0S_0(n).$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a
$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{i=0}^{k} i^2\right) &= \sum_{k=0}^{n} S_2(k) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} \\ &= \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{3}k^3 + \frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{6}k\right) \\ &= \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{n} k^3 + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} k^2 + \frac{1}{6}\sum_{k=0}^{n} k \end{aligned}$$
et donc
$$\boxed{\sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{i=0}^{k} i^2\right) = \frac{1}{3}S_3(n) + \frac{1}{2}S_2(n) + \frac{1}{6}S_1(n) + 0S_0(n)}.$$

1.8. Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{k=i}^{n} i^2\right) = (n+1)S_2(n) - S_3(n).$$

Soit $n \in \mathbb{N}$.
On a
$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{k=i}^{n} i^2\right) &= \sum_{i=0}^{n}(n-i+1)\,i^2 \\ &= (n+1)\sum_{i=0}^{n} i^2 - \sum_{i=0}^{n} i^3 \end{aligned}$$
et donc
$$\boxed{\sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{k=i}^{n} i^2\right) = (n+1)S_2(n) - S_3(n)}.$$

1.9. En déduire une expression explicite de $S_3(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.
Par **somme triangulaire**, on a

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{k} i^2 = \sum_{0\leq i\leq k\leq n} i^2 = \sum_{i=0}^{n}\sum_{k=i}^{n} i^2$$

et donc d'après les deux questions précédentes,

$$\frac{1}{3}S_3(n) + \frac{1}{2}S_2(n) + \frac{1}{6}S_1(n) + 0S_0(n) = (n+1)S_2(n) - S_3(n).$$

On en déduit

$$S_3(n) = \frac{3}{4}\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)S_2(n) - \frac{1}{6}S_1(n)\right)$$

et donc

$$\begin{aligned} S_3(n) &= \frac{1}{4}\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)n(n+1)\left(n+\frac{1}{2}\right) - \frac{n(n+1)}{4}\right) \\ &= \frac{1}{4}n(n+1)\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right) \\ &= \frac{1}{4}n(n+1)(n+1)n. \end{aligned}$$

On a donc montré

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ S_3(n) = \frac{n^2(n+1)^2}{4}}.$$

Remarque: une fois de plus, il n'y a pas besoin de connaître le résultat final pour le démontrer, seulement de connaître les sommes des puissances plus petites. Cette méthode de somme double peut se généraliser pour obtenir l'identité parfois dite d'Al-Haytham:

$$(n+1)S_p(n) - S_{p+1}(n) = \sum_{k=0}^{n} S_p(k)$$

ou encore

$$S_{p+1}(n) = (n+1)S_p(n) - \sum_{k=0}^{n} S_p(k)$$

1.V. Autonomie

1.10. Déterminer, à l'aide de la méthode de votre choix, une expression explicite de $S_4(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On peut adapter n'importe quelle méthode précédente. Dans tous les cas on obtient,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \boxed{\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} k^4 &= \frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30} \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}\end{aligned}}$$

On propose ici une méthode alternative, très proche de celle de la sous-partie 1.III.
On cherche d'abord des réels $(a_0, \dots, a_4)$ tels que

$$\forall k \in \mathbb{N},\ k^4 = a_4\binom{k}{4} + a_3\binom{k}{3} + a_2\binom{k}{2} + a_1\binom{k}{1} + a_0\binom{k}{0}$$

c'est à dire vérifiant le système triangulaire (par identification polynomiale)

$$\begin{cases} \dfrac{a_4}{24} = 1 \\ -\dfrac{a_4}{4} + \dfrac{a_3}{6} = 0 \\ \dfrac{11}{24}a_4 - \dfrac{1}{2}a_3 + \dfrac{1}{2}a_2 = 0 \\ -\dfrac{1}{4}a_4 + \dfrac{1}{3}a_3 - \dfrac{1}{2}a_2 + a_1 = 0 \\ a_0 = 0. \end{cases}$$

La résolution de ce système triangulaire donne

$$\begin{cases} a_4 = 24 \\ a_3 = 36 \\ a_2 = 14 \\ a_1 = 1 \\ a_0 = 0. \end{cases}$$

Et alors, d'après la formule de Pascal généralisée démontrée en 1.III,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} k^4 &= a_4 \sum_{k=0}^{n} \binom{k}{4} + a_3 \sum_{k=0}^{n} \binom{k}{3} + a_2 \sum_{k=0}^{n} \binom{k}{2} + a_1 \sum_{k=0}^{n} \binom{k}{1} + a_0 \sum_{k=0}^{n} \binom{k}{0} \\ &= a_4 \binom{n+1}{5} + a_3 \binom{n+1}{4} + a_2 \binom{n+1}{3} + a_1 \binom{n+1}{2} + a_0 \binom{n+1}{1} \\ &= 24\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)}{120} + 36\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{24} + 14\frac{(n+1)n(n-1)}{6} \\ &\quad + 1\frac{(n+1)n}{2} + 0(n+1) \end{aligned}$$

on conclut en développant et simplifiant

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} k^4 = \frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30}}.$$

Remarque: Évidemment il existe beaucoup de méthodes, et celle proposée est loin d'être la plus efficace. Mais, quelle que soit la méthode, au vu de l'expression finale, on se doute bien que des calculs sont nécessaires.
Remarque culturelle: Il existe une formule générale, dite *formule de Faulhaber* exprimant ces sommes à l'aide de coefficients binomiaux et des *nombres de Bernoulli*.