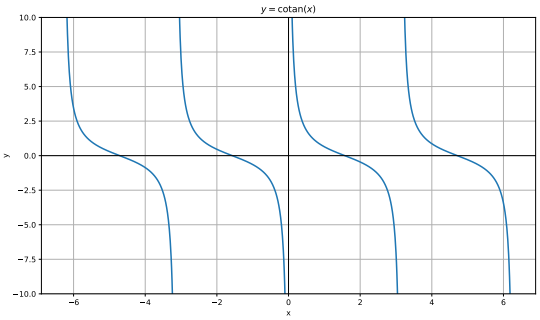
Sommes exponentielles : l'inégalité de Kuzmin–Landau

On portera une attention particulière à **la rédaction** et à **la propreté** de la copie.
En particulier tout **graphe ou schéma** pertinent et correctement annoté sera **valorisé**.
Les résultats devront être mis en valeur dès que possible.

Indiquez sur votre copie le temps approximatif pris pour le devoir.

Contexte

Ce devoir propose une démonstration de l'inégalité de Kuzmin-Landau sur des sommes exponentielles, sommes par exemple utiles en arithmétique.
Cette inégalité affirme qu'étant donnés $x_1, \dots, x_n$ des réels si « les écarts entre les x_k sont loin des entiers » alors « la somme des $e^{2i\pi x_k}$ n'est pas trop grande ».



---

1 Inégalité de Kuzmin-Landau

Soit $\lambda \in]0, \frac{1}{2}]$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \dots, x_n$ des réels tels que

$$\lambda \leq x_2 - x_1 \leq x_3 - x_2 \leq \cdots \leq x_n - x_{n-1} \leq 1 - \lambda.$$

L'objectif de cet exercice est de majorer la somme

$$\left| \sum_{k=1}^{n} e^{2i\pi x_k} \right|.$$

On définit la fonction cotan sur $]0, \pi[$ par

$$\begin{aligned} \text{cotan} : \quad]0, \pi[&\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{\cos(x)}{\sin(x)}. \end{aligned}$$

1.1. Dresser le tableau de variation de la fonction cotan.

Dans la suite on pose, pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$,

$$\zeta_k = \frac{e^{2i\pi x_k}}{e^{2i\pi x_{k+1}} - e^{2i\pi x_k}}.$$

1.2. Montrer que pour tout $k \in [\![2, n-1]\!]$,

$$|\zeta_k - \zeta_{k-1}| = \frac{1}{2} \left(\text{cotan}\left(\pi(x_k - x_{k-1})\right) - \text{cotan}\left(\pi(x_{k+1} - x_k)\right) \right)$$

1.3. Montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} e^{2i\pi x_k} = \left((\zeta_{n-1} + 1) e^{2i\pi x_n} - \zeta_1 e^{2i\pi x_1} \right) - \sum_{k=2}^{n-1} e^{2i\pi x_k} \left(\zeta_k - \zeta_{k-1} \right)$$

1.4. Conclure que

$$\left| \sum_{k=1}^{n} e^{2i\pi x_k} \right| \leq \text{cotan}\left(\frac{\pi\lambda}{2} \right).$$