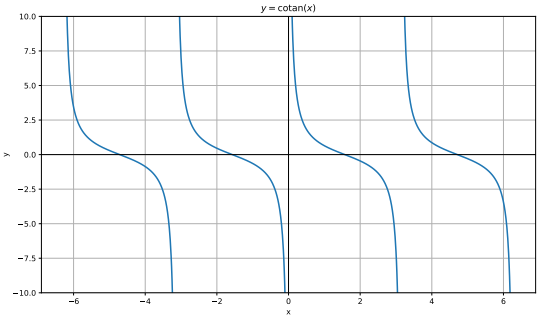
Corrigé du Sommes exponentielles : l'inégalité de Kuzmin–Landau

En cas d'erreur de corrigé, n'hésitez pas à me le signaler.

Contexte

Ce devoir propose une démonstration de l'inégalité de Kuzmin-Landau sur des sommes exponentielles, sommes par exemple utiles en arithmétique.
Cette inégalité affirme qu'étant donnés $x_1, \dots, x_n$ des réels si « les écarts entre les x_k sont loin des entiers » alors « la somme des $e^{2i\pi x_k}$ n'est pas trop grande ».



1 Inégalité de Kuzmin-Landau

Soit $\lambda \in]0, \frac{1}{2}]$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \dots, x_n$ des réels tels que

$$\lambda \leq x_2 - x_1 \leq x_3 - x_2 \leq \cdots \leq x_n - x_{n-1} \leq 1 - \lambda.$$

L'objectif de cet exercice est de majorer la somme

$$\left| \sum_{k=1}^{n} e^{2i\pi x_k} \right|.$$

On définit la fonction cotan sur $]0, \pi[$ par

$$\begin{aligned} \text{cotan} : \quad]0, \pi[&\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{\cos(x)}{\sin(x)}. \end{aligned}$$

1.1. Dresser le tableau de variation de la fonction cotan.

La fonction cotan est dérivable sur l'intervalle $]0, \pi[$ en tant que quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas. Soit $x \in]0, \pi[$. On a

$$\text{cotan}'(x) = -\frac{1}{\sin^2(x)}$$

d'où le tableau de variations suivant :

x	0		π
$\text{cotan}(x)$	‖	$-$	‖
cotan	$+\infty$	↘	$-\infty$

Dans la suite on pose, pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$,

$$\zeta_k = \frac{e^{2i\pi x_k}}{e^{2i\pi x_{k+1}} - e^{2i\pi x_k}}.$$

1.2. Montrer que pour tout $k \in [\![2, n-1]\!]$,

$$|\zeta_k - \zeta_{k-1}| = \frac{1}{2} \left(\text{cotan}\left(\pi(x_k - x_{k-1})\right) - \text{cotan}\left(\pi(x_{k+1} - x_k)\right) \right)$$

Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. On a, par la formule de l'angle moitié,

$$\begin{aligned}\zeta_k &= \frac{1}{e^{2\pi(x_{k+1}-x_k)}-1}\\ &= \frac{1}{e^{\pi(x_{k+1}-x_k)}2i\sin(\pi(x_{k+1}-x_k))}\\ &= \frac{1}{2}\frac{e^{-\pi(x_{k+1}-x_k)}}{\sin(\pi(x_{k+1}-x_k))}\\ &= \frac{1}{2}\frac{\cos(\pi(x_{k+1}-x_k))-i\sin(\pi(x_{k+1}-x_k))}{\sin(\pi(x_{k+1}-x_k))}\\ &= -\frac{1}{2}\operatorname{cotan}(\pi(x_{k+1}-x_k))-\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Soit $k \in [\![2, n-1]\!]$. On a

$$\begin{aligned}|\zeta_k-\zeta_{k-1}| &= \left|\frac{1}{2}\operatorname{cotan}(\pi(x_{k+1}-x_k))+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\operatorname{cotan}(\pi(x_k-x_{k-1}))-\frac{1}{2}\right|,\\ &= \frac{1}{2}\left|\operatorname{cotan}(\pi(x_{k+1}-x_k))-\operatorname{cotan}(\pi(x_k-x_{k-1}))\right|.\end{aligned}$$

De plus par la question **1.1.** la fonction cotan est décroissante sur $]0,\pi[$, et $0 < x_k - x_{k-1} \leq (x_{k+1}-x_k) < 1$ et on en déduit que

$$\operatorname{cotan}(\pi(x_{k+1}-x_k)) \leq \operatorname{cotan}(\pi(x_k-x_{k-1})).$$

Finalement,

$$\forall k \in [\![2, n-1]\!], \boxed{|\zeta_k-\zeta_{k-1}| = \frac{1}{2}(\operatorname{cotan}(\pi(x_k-x_{k-1}))-\operatorname{cotan}(\pi(x_{k+1}-x_k)))}$$

1.3. Montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} e^{2i\pi x_k} = \left((\zeta_{n-1}+1)e^{2i\pi x_n}-\zeta_1 e^{2i\pi x_1}\right)-\sum_{k=2}^{n-1} e^{2i\pi x_k}(\zeta_k-\zeta_{k-1})$$

Par définition on a

$$\sum_{k=1}^{n} e^{2\pi x_k} = \sum_{k=1}^{n-1}\left(e^{2\pi x_{k+1}}-e^{2\pi x_k}\right)\zeta_k + e^{2\pi x_n}$$

et par somme télescopique (méthode de la transformée d'Abel)

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1}\left(e^{2\pi x_{k+1}}-e^{2\pi x_k}\right)\zeta_k &= \sum_{k=1}^{n-1} e^{2\pi x_{k+1}}\zeta_k - \sum_{k=1}^{n} e^{2\pi x_k}\zeta_k\\ &= \sum_{k=2}^{n} e^{2\pi x_k}\zeta_{k-1} - \sum_{k=1}^{n-1} e^{2\pi x_k}\zeta_k\\ &= \sum_{k=2}^{n-1} e^{2\pi x_k}\zeta_{k-1} + e^{2\pi x_n}\zeta_{n-1} - e^{2\pi x_1}\zeta_1 - \sum_{k=2}^{n-1} e^{2\pi x_k}\zeta_k\\ &= e^{2\pi x_n}\zeta_{n-1} - e^{2\pi x_1}\zeta_1 + \sum_{k=2}^{n-1} e^{2\pi x_k}(\zeta_{k-1}-\zeta_k)\end{aligned}$$

d'où

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} e^{2\pi x_k} = \left((\zeta_{n-1}+1)e^{2i\pi x_n}-\zeta_1 e^{2i\pi x_1}\right)-\sum_{k=2}^{n-1} e^{2i\pi x_k}(\zeta_k-\zeta_{k-1})}$$

1.4. Conclure que

$$\left|\sum_{k=1}^{n} e^{2i\pi x_k}\right| \leq \operatorname{cotan}\left(\frac{\pi\lambda}{2}\right).$$

Par l'inégalité triangulaire

$$\left|\sum_{k=1}^{n} e^{2i\pi x_k}\right| \leq \left|(\zeta_{n-1}+1)e^{2i\pi x_n}\right| + \left|\zeta_1 e^{2i\pi x_1}\right| + \sum_{k=2}^{n-1}\left|e^{2i\pi x_k}\left(\zeta_k-\zeta_{k-1}\right)\right|$$
$$= \left|(\zeta_{n-1}+1)\right| + \left|\zeta_1\right| + \sum_{k=2}^{n-1}\left|\zeta_k-\zeta_{k-1}\right|.$$

De plus :

- D'après les calculs intermédiaires de la question **1.2.**, $|\zeta_1| = \left|\frac{e^{-i\pi(x_2-x_1)}}{2i\sin(\pi(x_2-x_1))}\right| = \frac{1}{2\sin(\pi(x_2-x_1))}$.
- De même, $|1+\zeta_{n-1}| = \frac{1}{2\sin(\pi(x_n-x_{n-1}))}$.
- D'après la question **1.2.** et une somme télescopique

$$\sum_{k=2}^{n-1}|\zeta_k-\zeta_{k-1}| = \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n-1}\left(\cot\left(\pi(x_k-x_{k-1})\right)-\cot\left(\pi(x_{k+1}-x_k)\right)\right)$$
$$= \frac{1}{2}\cot(\pi(x_2-x_1)) - \frac{1}{2}\cot(\pi(x_n-x_{n-1})).$$

D'où on déduit

$$\left|\sum_{k=1}^{n} e^{2i\pi x_k}\right| \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sin\left(\pi(x_2-x_1)\right)}+\cot(\pi(x_2-x_1))\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sin\left(\pi(x_n-x_{n-1})\right)}-\cot(\pi(x_n-x_{n-1}))\right).$$

Il reste à utiliser les encadrements $\lambda \leq x_2-x_1 \leq 1-\lambda$ et $\lambda \leq x_n-x_{n-1} \leq 1-\lambda$.

- La fonction cotan est décroissante sur $]0,\pi[$ par conséquent, comme $0<\pi\lambda\leq\pi(x_2-x_1)<\pi$,

$$\cot(\pi(x_2-x_1)) \leq \cot(\pi\lambda)$$

et, de même, comme $0<\pi(x_n-x_{n-1})\leq\pi(1-\lambda)<\pi$

$$-\cot(\pi(x_n-x_{n-1})) \leq -\cot(\pi(1-\lambda)) = -\cot(\pi-\pi\lambda) = \cot(\pi\lambda)$$

- On a $0<\pi\lambda\leq\pi(x_2-x_1)\leq\pi-\pi\lambda<\pi$.
En observant les variations de la fonction sin sur l'intervalle $]0,\pi[$, il vient que

$$\sin(\pi(x_2-x_1)) \geq \sin(\pi\lambda) > 0$$

car $\sin(\pi\lambda)=\sin(\pi-\pi\lambda)$. On a aussi $0<\pi\lambda\leq\pi(x_n-x_{n-1})\leq\pi-\pi\lambda<\pi$ donc, de la même façon,

$$\sin(\pi(x_n-x_{n-1})) \geq \sin(\pi\lambda) > 0.$$

Et donc

$$\left|\sum_{k=1}^{n} e^{2i\pi x_k}\right| \leq \frac{1}{\sin(\pi\lambda)}+\cot(\pi\lambda).$$

Finalement, comme

$$\frac{1}{\sin(\pi\lambda)}+\cot(\pi\lambda) = \frac{\cos(\pi\lambda)+1}{\sin(\pi\lambda)} = \frac{2\cos\left(\frac{\pi\lambda}{2}\right)^2}{2\sin\left(\frac{\pi\lambda}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi\lambda}{2}\right)}$$

on conclut que

$$\boxed{\left|\sum_{k=1}^{n} e^{2i\pi x_k}\right| \leq \cot\left(\frac{\pi\lambda}{2}\right)}.$$