Sommes quadratiques de Gauss

On portera une attention particulière à **la rédaction** et à **la propreté** de la copie.
En particulier tout **graphe ou schéma** pertinent et correctement annoté sera **valorisé**.
Les résultats devront être mis en valeur dès que possible.

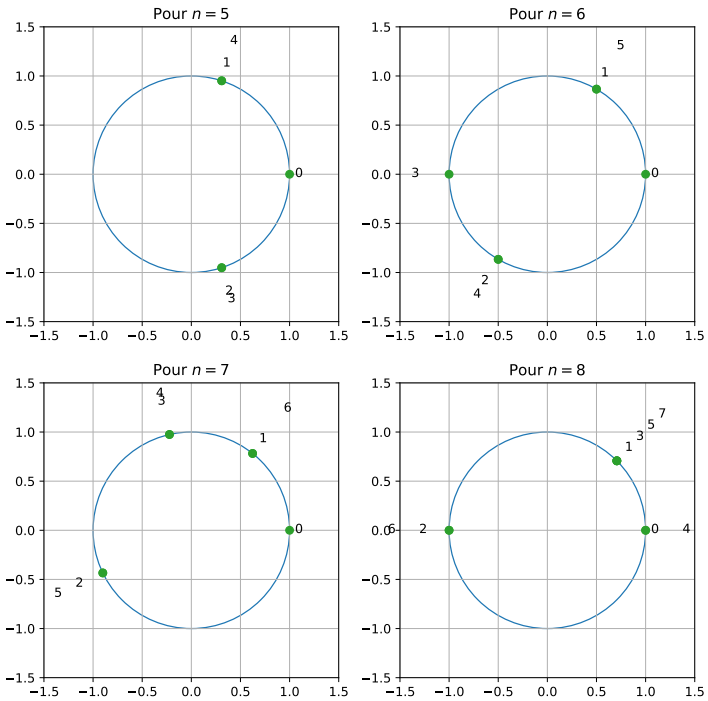
Indiquez sur votre copie le temps approximatif pris pour le devoir.

Contexte

L'objectif de ce DM facultatif est de s'entraîner à rechercher en autonomie des exercices proches des méthodes du cours mais nécessitant un peu plus de technicité, et par la même occasion de démontrer des résultats mathématiquement « intéressants ».
Plus précisément, ce sujet propose de travailler sur les **sommes et complexes** pour calculer les modules des sommes de Gauss, qui ont de nombreuses applications en arithmétique.

---

1 Sommes quadratiques de Gauss



Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On définit

$$\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$$

et

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{k^2}$$

appelée n-ième somme quadratique de Gauss.
On cherche à déterminer

$$|S_n|$$

selon la valeur de n.

1.1. Montrer que

$$|S_n|^2 = \sum_{(k,\ell)\in[\![0,n-1]\!]^2} \omega^{(k-\ell)(k+\ell)}.$$

1.2. En déduire que

$$|S_n|^2 = \sum_{r=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{r(2k-r)}.$$

L'utilisation de schémas est fortement conseillée.

1.3. En déduire que

$$|S_n|^2 = n \sum_{\substack{r\in[\![0,n-1]\!]\\ n|2r}} \omega^{-r^2}.$$

1.4. Conclure.
