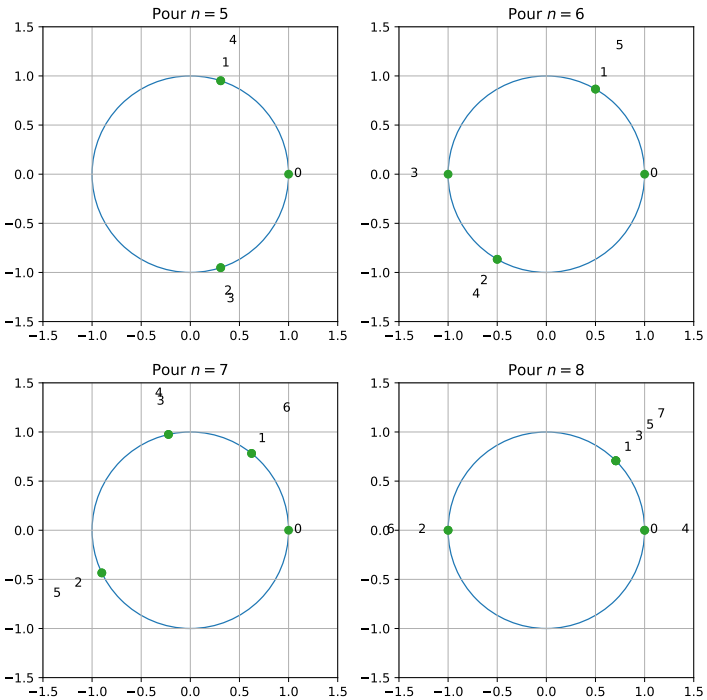
En cas d'erreur de corrigé, n'hésitez pas à me le signaler.

Contexte

L'objectif de ce DM facultatif est de s'entraîner à rechercher en autonomie des exercices proches des méthodes du cours mais nécessitant un peu plus de technicité, et par la même occasion de démontrer des résultats mathématiquement « intéressants ».
Plus précisément, ce sujet propose de travailler sur les **sommes et complexes** pour calculer les modules des sommes de Gauss, qui ont de nombreuses applications en arithmétique.

---

1 Sommes quadratiques de Gauss



Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On définit

$$\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$$

et

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{k^2}$$

appelée n-ième somme quadratique de Gauss.
On cherche à déterminer

$$|S_n|$$

selon la valeur de n.

1.1. Montrer que

$$|S_n|^2 = \sum_{(k,\ell)\in[\![0,n-1]\!]^2} \omega^{(k-\ell)(k+\ell)}.$$

On a

$$\begin{aligned} |S_n|^2 &= S_n\overline{S_n} \\ &= \left(\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{k^2}\right)\left(\sum_{\ell=0}^{n-1} \omega^{-\ell^2}\right) \\ &= \sum_{(k,\ell)\in[\![0,n-1]\!]^2} \omega^{k^2-\ell^2} \end{aligned}$$

d'où

$$\boxed{|S_n|^2 = \sum_{(k,\ell)\in[\![0,n-1]\!]^2} \omega^{(k-\ell)(k+\ell)}}.$$

1.2. En déduire que

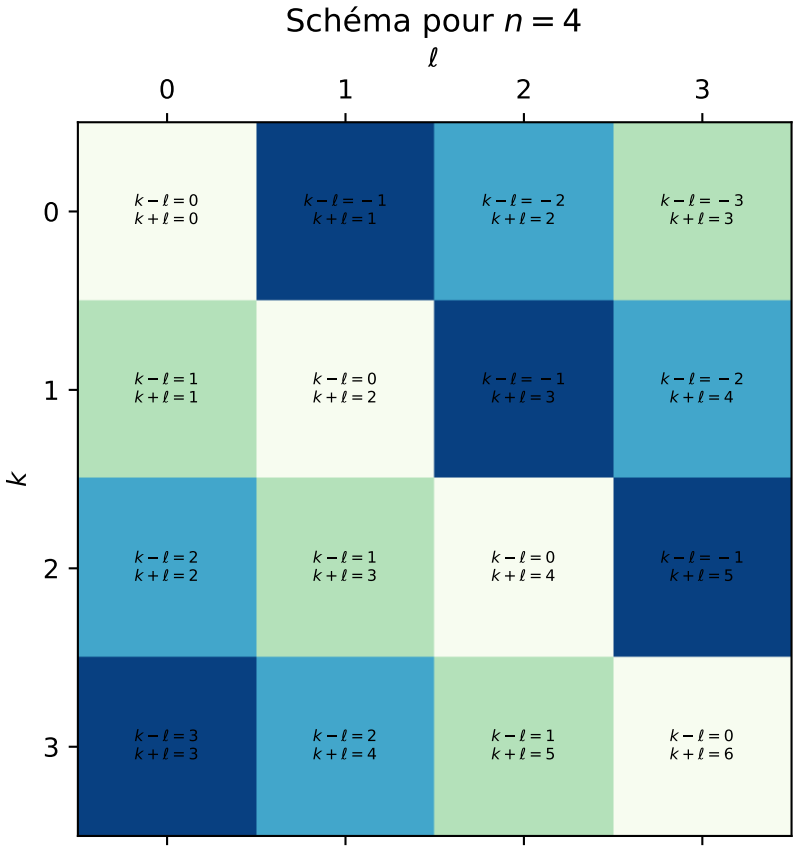
$$|S_n|^2 = \sum_{r=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{r(2k-r)}.$$

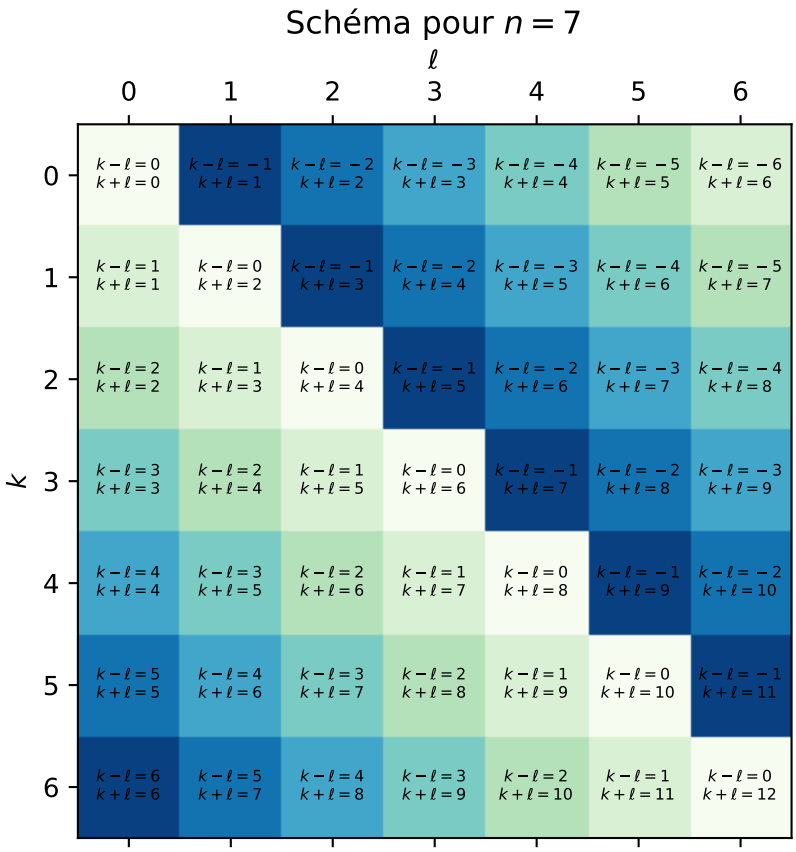
L'utilisation de schémas est fortement conseillée.

Comme $\omega^n = 1$, pour tout entier N, la valeur de ω^N ne dépend que de la classe d'équivalence de N modulo n (c'est à dire si $N_1 \equiv N_2[n]$ alors $\omega^{N_1} = \omega^{N_2}$).
On regroupe donc par exemple selon la classe d'équivalence de $k - \ell$ modulo n (ce qui revient à sommer sur les "diagonales").

$$\begin{aligned}\sum_{(k,\ell)\in[\![0,n-1]\!]^2} \omega^{(k-\ell)(k+\ell)} &= \sum_{r=0}^{n-1}\left(\sum_{\substack{(k,\ell)\in[\![0,n-1]\!]^2\\ k-\ell\equiv r[n]}} \omega^{(k-\ell)(k+\ell)}\right)\\ &= \sum_{r=0}^{n-1}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\omega^{r(2k-r)}\right)\end{aligned}$$

la dernière égalité ayant lieu car pour k, ℓ, r trois entiers, si $k - \ell \equiv r[n]$ alors $(k-\ell)(k+\ell) \equiv r(2k-r)[n]$ et donc $\omega^{(k-\ell)(k+\ell)} = \omega^{r(2k-r)}$.





On a donc bien

$$\boxed{|S_n|^2 = \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{r(2k-r)}}$$

1.3. En déduire que

$$|S_n|^2 = n \sum_{\substack{r \in [\![0,n-1]\!] \\ n \mid 2r}} \omega^{-r^2}.$$

On obtient alors

$$\sum_{r=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{r(2k-r)} = \sum_{r=0}^{n-1} \omega^{-r^2} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\omega^{2r}\right)^k$$

Or pour tout entier $p \in \mathbb{Z}$ on a (sommes géométriques)

- Si $n \mid p$, $\omega^p = 1$ d'où

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(\omega^p\right)^k = n$$

- Si $n \nmid p$, $\omega^p \neq 1$ d'où

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(\omega^p\right)^k = \frac{1-\omega^{np}}{1-\omega^p} = 0$$

Par conséquent

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(\omega^{2r}\right)^k = n\delta_{n|2r} = \begin{cases} n & \text{si } n \mid 2r \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

et donc

$$\boxed{|S_n|^2 = n \sum_{\substack{r \in [\![0,n-1]\!] \\ n \mid 2r}} \omega^{-r^2}}.$$

1.4. Conclure.

On procède par disjonction de cas.

- Si n est impair alors l'unique entier $r \in [\![0, n-1]\!]$ tel que $n \mid 2r$ est 0 d'où $|S_n|^2 = n$.
- Si n est pair alors les deux seuls entiers $r \in [\![0, n-1]\!]$ tels que $n \mid 2r$ sont 0 et $\frac{n}{2}$. Posons $m = \frac{n}{2}$.
  Procédons de nouveau à une disjonction de cas
  - ▷ Si m est pair, alors $n \mid m^2$ donc $\omega^{-m^2} = 1$, d'où $|S_n|^2 = n\left(1 + \omega^{-m^2}\right) = 2n$.
  - ▷ Si m est impair, alors $m+1$ est pair d'où $n \mid m^2 + m$ d'où $-m^2 \equiv m[n]$. Par conséquent $\omega^{-m^2} = \omega^m = -1$. D'où $|S_n|^2 = 0$.

On obtient finalement

$$\boxed{|S_n| = \begin{cases} \sqrt{n} & \text{si } n \equiv 1[2] \\ \sqrt{2n} & \text{si } n \equiv 0[4] \\ 0 & \text{si } n \equiv 2[4] \end{cases}}$$

Remarque: Gauss a obtenu (mais cela est beaucoup plus difficile que juste le module) une expression explicite pour S_n pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n = \begin{cases} (1+i)\sqrt{n} & \text{si } n \equiv 0[4] \\ \sqrt{n} & \text{si } n \equiv 1[4] \\ 0 & \text{si } n \equiv 2[4] \\ i\sqrt{n} & \text{si } n \equiv 3[4], \end{cases}$$

ces sommes étant très utiles, par exemple en arithmétique.