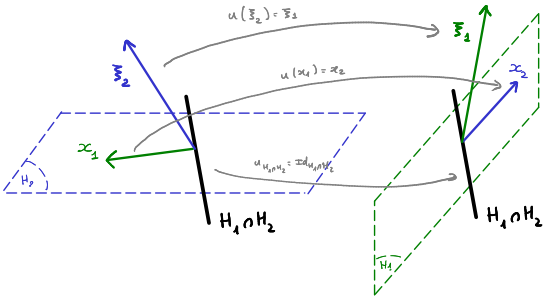
Projecteurs et rang 1

On portera une attention particulière à **la rédaction** et à **la propreté** de la copie.
En particulier tout **graphe ou schéma** pertinent et correctement annoté sera **valorisé**.
Les résultats devront être mis en valeur dès que possible.

Indiquez sur votre copie le temps approximatif pris pour le devoir.

Contexte

- La première partie introduit une relation d'ordre partiel sur l'ensemble des projecteurs.
- La seconde partie utilise la notion de produit tensoriel pour caractériser les endomorphismes de rang 1.
- La troisième partie caractérise les projecteurs minimaux (au sens de la relation d'ordre de la première partie) en tant qu'endomorphismes de rang 1 (à l'aide des résultats de la seconde partie).
- La quatrième partie étudie les automorphismes d'algèbre de $\mathcal{L}(E)$.



Les parties 1 et 2 sont indépendantes entre elles.

Notations

- Dans tout le sujet $\mathbb{K}$ est un corps (tel que $2 \neq 0$), E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (différent de $\{0_E\}$).
- On rappelle que l'on note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E, $\mathrm{GL}(E)$ l'ensemble des endomorphismes bijectifs de E et E^* l'espace des formes linéaires sur E (c'est à dire $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$).
- On notera dans ce sujet $\mathcal{P}$ l'ensemble des projecteurs de E.
  On note aussi $\widetilde{\mathcal{P}} = \mathcal{P} \backslash \{0_{\mathcal{L}(E)}\}$ l'ensemble des projecteurs non nuls de E.
- Pour $\varphi \in E^*$ et $\xi \in E$ on définit $\xi \otimes \varphi \in \mathcal{L}(E)$ par

$$\xi \otimes \varphi : \begin{array}{c} E \to E \\ x \mapsto \varphi(x)\xi. \end{array}$$

- On dit qu'une application de $\mathcal{L}(E)$ vers $\mathcal{L}(E)$ est un automorphisme d'algèbre si c'est un automorphisme linéaire de $(\mathcal{L}(E), +, .)$ et un automorphisme d'anneau de $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$.
  On note $\mathrm{Aut}(\mathcal{L}(E))$ l'ensemble des automorphismes d'algèbre de $\mathcal{L}(E)$.

---

1. Une relation d'ordre sur les projecteurs

On définit une relation d'ordre sur $\mathcal{P}$ par, $\forall (p,q) \in \mathcal{P}^2$

$$p \preceq q \text{ ssi } p \circ q = q \circ p = p.$$

L'objectif de cette partie est de montrer plusieurs caractérisations équivalentes de cette relation d'ordre.
Les questions **1.8.** et **1.9.** sont des exemples complètement indépendants du reste du sujet.

1.1. Montrer que $\preceq$ est bien une relation d'ordre sur $\mathcal{P}$.

1.2. Montrer que pour tout $p \in \mathcal{P}$ on a $0_{\mathcal{L}(E)} \preceq p$ et $p \preceq \mathrm{Id}_E$.

1.3. Soit $(p,q) \in \mathcal{P}^2$. Montrer que

$$p \preceq q \quad \Leftrightarrow (\mathrm{Ker}(p) \supset \mathrm{Ker}(q) \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(p) \subset \mathrm{Im}(q)).$$

1.4. Soit $(p,q) \in \mathcal{P}^2$ tel que $p \preceq q$.
Montrer que $q - p \in \mathcal{P}$.

Dans les question **1.5.** à **1.7.** on considère $(p,q) \in \mathcal{P}^2$ tel que $q - p \in \mathcal{P}$.

1.5. Montrer que $2p = p \circ q + q \circ p$.

1.6. En déduire que $p \circ q = q \circ p \circ q$, et exprimer de manière similaire $q \circ p$.

1.7. Conclure $p \preceq q$.

1.8. Montrer que pour $E = \mathbb{R}^2$ la relation d'ordre $\preceq$ n'est pas totale.

1.9. On considère dans cette question $E = \mathbb{K}[X]$. Pour tout $B \in \mathbb{K}[X]$ de degré $d \geq 1$ on note π_B la projection sur $\mathbb{K}_{d-1}[X]$ parallèlement à $B\mathbb{K}[X] = \{BQ, Q \in \mathbb{K}[X]\}$.

1.9.1. Montrer que pour tout polynôme B (de degré $d \geq 1$), π_B est bien définie.

1.9.2. Soient A et B deux polynômes (de degrés ≥ 1). Montrer que $\pi_A \preceq \pi_B$ ssi $B \in A\mathbb{K}[X]$.

1.9.3. Commenter en termes arithmétiques.

2. Endomorphismes de rang 1 et produit tensoriel

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.
On dit que f est «de rang 1» ssi $\mathrm{Im}(f)$ est une droite vectorielle.
On note alors $\mathrm{rg}(f) = 1$.
L'objectif de cette partie est fournir une caractérisation les endomorphismes de rang 1.

2.10. Vérifier que pour tout $\varphi \in E^*$ et $\xi \in E$, $\xi \otimes \varphi \in \mathcal{L}(E)$.

2.11. Soit $\varphi \in E^*$ et $\xi \in E$.
Déterminer $\mathrm{Ker}(\xi \otimes \varphi)$ et $\mathrm{Im}(\xi \otimes \varphi)$.

2.12. Montrer que pour tout $\varphi \in E^* \backslash \{0_{E^*}\}$ et $\xi \in E \backslash \{0_E\}$, $\mathrm{rg}(\xi \otimes \varphi) = 1$.

2.13. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\mathrm{rg}(f) = 1$. On fixe $\xi \in E \backslash \{0_E\}$ tel que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(\xi)$.

2.13.1. Expliquer pourquoi il existe une et unique application $\varphi : E \to \mathbb{K}$ telle que pour tout $x \in E$, $f(x) = \varphi(x)\xi$.

2.13.2. Montrer que $\varphi \in E^* \backslash \{0_{E^*}\}$.

2.13.3. Montrer que $f = \xi \otimes \varphi$.

2.14. Conclure que

$$\{f \in \mathcal{L}(E) \mid \mathrm{rg}(f) = 1\} = \{\xi \otimes \varphi, (\xi, \varphi) \in (E \backslash \{0_E\}) \times (E^* \backslash \{0_{E^*}\})\}.$$

2.15. Montrer qu'un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ est de rang 1 ssi $\mathrm{Ker}(f)$ est un hyperplan de E.

2.16. Soient $\xi_1, \xi_2 \in E \backslash \{0_E\}$ deux vecteurs non nuls de E.
Montrer qu'il existe $u \in \mathrm{GL}(E)$ tel que $\xi_1 = u(\xi_2)$.

2.17. Soient $\varphi_1, \varphi_2 \in E^* \backslash \{0_E^*\}$ deux formes linéaires non nulles sur E.
Montrer qu'il existe $v \in \mathrm{GL}(E)$ tel que $\varphi_2 = \varphi_1 \circ v$.

2.18. Soient $\xi \in E$, $\varphi \in E^*$, et $w \in \mathcal{L}(E)$.
Montrer que

$$w \circ (\xi \otimes \varphi) = (w(\xi)) \otimes \varphi$$
$$(\xi \otimes \varphi) \circ w = \xi \otimes (\varphi \circ w).$$

2.19. Soient $f_1, f_2 \in \mathcal{L}(E)$ deux endomorphismes de rang 1. Montrer qu'il existe $(u,v) \in (\mathrm{GL}(E))^2$ tels que $f_1 = u \circ f_2 \circ v^{-1}$.

3. Projecteurs minimaux

L'objectif de cette partie est de montrer que les éléments "minimaux" de $\widetilde{\mathcal{P}}$ pour la relation $\preceq$ sont les projecteurs de rang 1.

3.20. Soit $p \in \widetilde{\mathcal{P}}$ de rang 1. Soit $q \in \widetilde{\mathcal{P}}$.
Montrer que **si** $q \preceq p$ **alors** $p = q$.

3.21. Soit $p \in \widetilde{\mathcal{P}}$.

3.21.1. Montrer qu'il existe $\xi \in E\backslash\{0_E\}$ et $\varphi \in E^*\backslash\{0_{E^*}\}$ tels que
- $\xi \in \mathrm{Im}(p)$,
- $\mathrm{Ker}(p) \subset \mathrm{Ker}(\varphi)$,
- $\varphi(\xi) = 1$.

Indication: On pourra utiliser que tout sev strict de E est contenu dans un hyperplan.

3.21.2. Montrer que $\xi \otimes \varphi \in \widetilde{\mathcal{P}}$.

3.21.3. Montrer que $\xi \otimes \varphi \preceq p$.

3.22. Conclure que

$$\forall p \in \widetilde{\mathcal{P}}, \quad \Big(\forall q \in \widetilde{\mathcal{P}},\ q \preceq p \Rightarrow q = p.\Big) \Leftrightarrow \mathrm{rg}(p) = 1.$$

3.23. Soient p_1 et p_2 deux projecteurs de rang 1.
Montrer qu'il existe $u \in \mathrm{GL}(E)$ tel que $p_1 = u \circ p_2 \circ u^{-1}$.

4. Automorphismes d'algèbre de $\mathcal{L}(E)$

L'objectif de cette partie est de décrire $\mathrm{Aut}(\mathcal{L}(E))$.

4.I. Généralités sur les automorphismes d'algèbres

4.24. Montrer que $(\mathrm{Aut}(\mathcal{L}(E)), \circ)$ est un groupe.
On fixe désormais $\Phi \in \mathrm{Aut}(\mathcal{L}(E))$.

4.25. Montrer que $\Phi(\mathrm{GL}(E)) = \mathrm{GL}(E)$.

4.26. Montrer que $\Phi(\mathcal{P}) = \mathcal{P}$.

4.27. Montrer que l'application $\Phi_{\mathcal{P}}$ induite par Φ sur $\mathcal{P}$ est croissante, pour l'ordre $\preceq$ défini à la partie 1.

4.II. Automorphismes intérieurs

Pour $\omega \in \mathrm{GL}(E)$ on note

$$\iota_\omega : \begin{cases} \mathcal{L}(E) \to \mathcal{L}(E) \\ \quad f \mapsto \omega \circ f \circ \omega^{-1} \end{cases}$$

4.28. Montrer que pour tout $\omega \in \mathrm{GL}(E)$, $\iota_\omega \in \mathrm{Aut}(\mathcal{L}(E))$.

4.29. Montrer que l'application $\iota : \mathrm{GL}(E) \to \mathrm{Aut}(\mathcal{L}(E))$ définie par $\iota : \omega \mapsto \iota_\omega$ est un morphisme de groupes.

4.30. Montrer que $\mathrm{Ker}(\iota) = \{\lambda\,\mathrm{Id}_E, \lambda \in \mathbb{K}^\times\}$.

4.III. Tous à l'intérieur !

On cherche désormais à montrer que tout automorphisme d'algèbre s'écrit sous la forme ι_ω pour un certain $\omega \in \mathrm{GL}(E)$.
On fixe donc $\Phi \in \mathrm{Aut}(\mathcal{L}(E))$.

4.31. À l'aide des parties précédentes, montrer que pour tout p projecteur de rang 1, $\Phi(p)$ est un projecteur de rang 1.

4.32. En déduire pour tout f endomorphisme de rang 1, $\Phi(f)$ est un endomorphisme de rang 1.

Dans les questions **4.33.** à **4.41.** on suppose de plus qu'il existe p un projecteur de rang 1 tel que $\Phi(p) = p$. On fixe alors un $(\xi, \varphi) \in E \times E^*$ tels que $p = \xi \otimes \varphi$.

4.33. Justifier l'existence d'un tel couple (ξ, φ). Ce couple est-il unique ?

4.34. Montrer que pour tout $x \in E\backslash\{0_E\}$, $\mathrm{Ker}(\Phi(x \otimes \varphi)) = \mathrm{Ker}(\varphi)$.
Indication: on pourra faire intervenir le projecteur $\mathrm{Id}_E - p$ *associé à* p.

4.35. En déduire que pour tout $x \in E$ il existe $y \in E$ tel que $\Phi(x \otimes \varphi) = y \otimes \varphi$.

4.36. Justifier l'existence d'une unique application $u : E \to E$ telle que pour tout $x \in E$, $\Phi(x \otimes \varphi) = u(x) \otimes \varphi$.

4.37. Montrer que $u \in \mathcal{L}(E)$.

4.38. Montrer que $u \in \mathrm{GL}(E)$.

4.39. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que

$$\forall x \in E, \quad (\Phi(f)(u(x))) \otimes \varphi = u(f(x)) \otimes \varphi.$$

4.40. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, déduire de la question précédente que

$$\Phi(f) \circ u = u \circ f.$$

4.41. Conclure que

$$\Phi = \iota_u.$$

On ne suppose désormais plus l'existence d'un tel p.

4.42. À l'aide des questions précédentes montrer qu'il existe $\omega \in \mathcal{L}(E)$ tel que

$$\Phi = \iota_\omega.$$