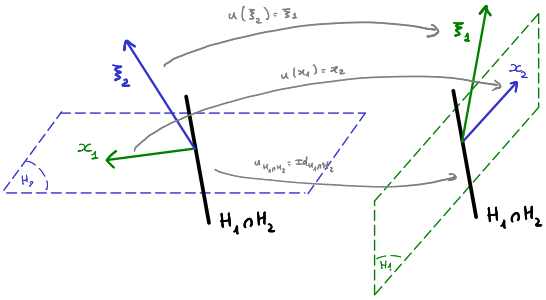
En cas d'erreur de corrigé, n'hésitez pas à me le signaler.

Contexte

- ▷ La première partie introduit une relation d'ordre partiel sur l'ensemble des projecteurs.
- ▷ La seconde partie utilise la notion de produit tensoriel pour caractériser les endomorphismes de rang 1.
- ▷ La troisième partie caractérise les projecteurs minimaux (au sens de la relation d'ordre de la première partie) en tant qu'endomorphismes de rang 1 (à l'aide des résultats de la seconde partie).
- ▷ La quatrième partie étudie les automorphismes d'algèbre de $\mathcal{L}(E)$.



Les parties 1 et 2 sont indépendantes entre elles.

Notations

- Dans tout le sujet $\mathbb{K}$ est un corps (tel que $2 \neq 0$), E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (différent de $\{0_E\}$).
- On rappelle que l'on note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E, $\mathrm{GL}(E)$ l'ensemble des endomorphismes bijectifs de E et E^* l'espace des formes linéaires sur E (c'est à dire $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$).
- On notera dans ce sujet $\mathcal{P}$ l'ensemble des projecteurs de E.
  On note aussi $\widetilde{\mathcal{P}} = \mathcal{P} \backslash \{0_{\mathcal{L}(E)}\}$ l'ensemble des projecteurs non nuls de E.
- Pour $\varphi \in E^*$ et $\xi \in E$ on définit $\xi \otimes \varphi \in \mathcal{L}(E)$ par

$$\xi \otimes \varphi : \begin{array}{c} E \to E \\ x \mapsto \varphi(x)\xi. \end{array}$$

- On dit qu'une application de $\mathcal{L}(E)$ vers $\mathcal{L}(E)$ est un automorphisme d'algèbre si c'est un automorphisme linéaire de $(\mathcal{L}(E), +, .)$ et un automorphisme d'anneau de $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$.
  On note $\mathrm{Aut}(\mathcal{L}(E))$ l'ensemble des automorphismes d'algèbre de $\mathcal{L}(E)$.

---

1. Une relation d'ordre sur les projecteurs

On définit une relation d'ordre sur $\mathcal{P}$ par, $\forall (p,q) \in \mathcal{P}^2$

$$p \preceq q \text{ ssi } p \circ q = q \circ p = p.$$

L'objectif de cette partie est de montrer plusieurs caractérisations équivalentes de cette relation d'ordre.
Les questions **1.8.** et **1.9.** sont des exemples complètement indépendants du reste du sujet.

1.1. Montrer que $\preceq$ est bien une relation d'ordre sur $\mathcal{P}$.

- **Réflexivité:** Soit $p \in \mathcal{P}$. Comme p est un projecteur on a $p \circ p = p \circ p = p$ et donc $p \preceq p$.
- **Transitivité:** Soient $p, q, r \in \mathcal{P}$, tels que $p \preceq q$ et $q \preceq r$.
  Alors comme $p = p \circ q$ et $q \circ r = q$,
  $$p \circ r = (p \circ q) \circ r = p \circ (q \circ r) = p \circ q = p$$
  et comme $p = q \circ p$ et $r \circ q = q$,
  $$r \circ p = r \circ (q \circ p) = (r \circ q) \circ p = q \circ p = p$$
  d'où $p \preceq r$.
- **Antisymétrie:** Soient $p, q \in \mathcal{P}$ tels que $p \preceq q$ et $q \preceq p$.
  Alors $p \circ q = q \circ p = p$ et $q \circ p = p \circ q = q$ et donc en particulier $p = q$.

On a donc bien montré que $\boxed{\preceq \text{ est une relation d'ordre}}$ sur $\mathcal{P}$.

1.2. Montrer que pour tout $p \in \mathcal{P}$ on a $0_{\mathcal{L}(E)} \preceq p$ et $p \preceq \mathrm{Id}_E$.

Soit $p \in \mathcal{P}$.
On a $0_{\mathcal{L}(E)} \circ p = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et comme p est linéaire en particulier $p \circ 0_{\mathcal{L}(E)} = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
Donc $\boxed{0_{\mathcal{L}(E)} \preceq p}$.
De même on a $p \circ \mathrm{Id}_E = \mathrm{Id}_E \circ p = p$ et donc $\boxed{p \preceq \mathrm{Id}_E}$.

1.3. Soit $(p,q) \in \mathcal{P}^2$. Montrer que

$$p \preceq q \quad \Leftrightarrow (\mathrm{Ker}(p) \supset \mathrm{Ker}(q) \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(p) \subset \mathrm{Im}(q)).$$

On procède par double implication.

- $\boxed{\Rightarrow}$ Supposons $p \preceq q$.
  - ▷ Comme $p = p \circ q$ on a en particulier $\mathrm{Ker}(p) = \mathrm{Ker}(p \circ q) \supset \mathrm{Ker}(q)$. (En effet si $q(x) = 0_E$ alors $p(q(x)) = p(0_E) = 0_E$).
  - ▷ Comme $p = q \circ p$ on a en particulier $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Im}(q \circ p) \subset \mathrm{Im}(q)$. (En effet si $y \in \mathrm{Im}(q \circ p)$ alors il existe $x \in E$ tel que $y = q(p(x))$ et donc $y \in \mathrm{Im}(q)$).

  On a donc bien montré
  $$\boxed{p \preceq q \quad \Rightarrow (\mathrm{Ker}(p) \supset \mathrm{Ker}(q) \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(p) \subset \mathrm{Im}(q))}.$$
- $\boxed{\Leftarrow}$ Supposons $\mathrm{Ker}(p) \supset \mathrm{Ker}(q)$ et $\mathrm{Im}(p) \subset \mathrm{Im}(q)$.
  - ▷ Soit $x \in E$. Alors $p(x) \in \mathrm{Im}(p) \subset \mathrm{Im}(q)$ et comme q est un projecteur $\mathrm{Im}(q) = \mathrm{Ker}(q - \mathrm{Id}_E)$ (à redémontrer si nécessaire).
    Donc $q(p(x)) = p(x)$.
    On en déduit que $q \circ p = p$.
  - ▷ Soit $x \in E$. Alors comme q est un projecteur, $x - q(x) \in \mathrm{Ker}(q)$.
    Comme $\mathrm{Ker}(q) \subset \mathrm{Ker}(p)$ on en déduit que $p(x - q(x)) = 0_E$ c'est à dire (linéarité de p), $p(x) = p(q(x))$.
    On en déduit donc que $p \circ q = p$.

  Remarque: il y avait évidemment d'autres méthodes pour montrer ce résultat, par exemple en décomposant x selon la somme directe du noyau et de l'image des projecteurs, cf TD.
  On a donc bien montré
  $$\boxed{p \preceq q \quad \Leftarrow (\mathrm{Ker}(p) \supset \mathrm{Ker}(q) \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(p) \subset \mathrm{Im}(q))}.$$

1.4. Soit $(p,q) \in \mathcal{P}^2$ tel que $p \preceq q$.
Montrer que $q - p \in \mathcal{P}$.

On a
$$(q-p)^2 = q^2 - q \circ p - p \circ p + p^2$$

comme p et q sont des projecteurs $p^2 = p$ et $q^2 = q$ et comme $p \prec q$, $p \circ q = q \circ p = p$, d'où

$$(q-p)^2 = q - p - p + p = (q-p)$$

et par la caractérisation des projecteurs, $\boxed{q-p \text{ est un projecteur}}$.

Dans les question **1.5.** à **1.7.** on considère $(p, q) \in \mathcal{P}^2$ tel que $q - p \in \mathcal{P}$.

1.5. Montrer que $2p = p \circ q + q \circ p$.

Comme $(q-p)$ est un projecteur,

$$(q-p)^2 = (q-p)$$

c'est à dire en développant

$$q^2 - q \circ p - p \circ q + p^2 = q - p$$

et comme de plus p et q sont des projecteurs on obtient

$$q - q \circ p - p \circ q + p = q - p$$

c'est à dire

$$\boxed{2p = q \circ p + p \circ q}.$$

1.6. En déduire que $p \circ q = q \circ p \circ q$, et exprimer de manière similaire $q \circ p$.

En composant l'égalité de la question **1.5.** à droite par q on obtient

$$2\ p \circ q = q \circ p \circ q + p \circ q \circ q.$$

Comme q est un projecteur $q \circ q = q$ d'où

$$2\ p \circ q = q \circ p \circ q + p \circ q$$

et donc

$$\boxed{p \circ q = q \circ p \circ q}.$$

De même, en composant l'égalité de la question **1.5.** à gauche par q,

$$2q \circ p = q \circ q \circ p + q \circ p \circ q = q \circ p + q \circ p \circ q$$

et donc

$$\boxed{q \circ p = q \circ p \circ q}.$$

1.7. Conclure $p \preceq q$.

De la question **1.6.** on déduit en particulier que

$$p \circ q = q \circ p.$$

Et en utilisant cette égalité et de la question **1.5.** on déduit que

$$2p = p \circ q + p \circ q$$

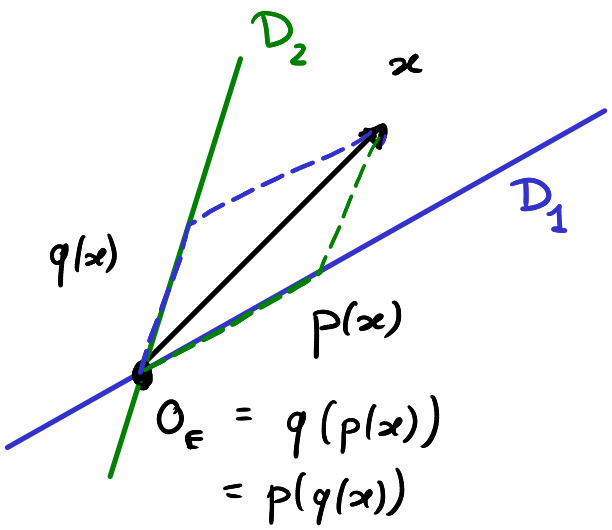
d'où $2p = 2p \circ q$ et comme $2 \neq 0$,

$$p = p \circ q.$$

On a donc bien $\boxed{p \preceq q}$.

1.8. Montrer que pour $E = \mathbb{R}^2$ la relation d'ordre $\preceq$ n'est pas totale.

Soient D_1 et D_2 deux droites vectorielles telles que $D_1 \oplus D_2 = \mathbb{R}^2$ (par exemple $D_1 = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)$ et $D_2 = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$).
Notons p la projection sur D_1 parallèlement à D_2 et q la projection sur D_2 parallèlement à D_1.
Alors $p \circ q = q \circ p = 0_{\mathcal{L}(E)}$ (en utilisant par exemple que $q = \text{Id}_{\mathbb{R}^2} - p$) et $p \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$, $q \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$.
Donc $p \not\preceq q$ et $q \not\preceq p$.
D'où $\boxed{\text{la relation n'est pas totale}}$.



1.9. On considère dans cette question $E = \mathbb{K}[X]$. Pour tout $B \in \mathbb{K}[X]$ de degré $d \geq 1$ on note π_B la projection sur $\mathbb{K}_{d-1}[X]$ parallèlement à $B\mathbb{K}[X] = \{BQ, Q \in \mathbb{K}[X]\}$.
1.9.1. Montrer que pour tout polynôme B (de degré $d \geq 1$), π_B est bien définie.

Montrons tout d'abord que ce sont bien des sevs.
- $\mathbb{K}_{d-1}[X]$ est bien un sev de $\mathbb{K}[X]$.
- On a $0 = B0 \in B\mathbb{K}[X]$. De plus soient $(P_1, P_2) \in (B\mathbb{K}[X])^2$, $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$.
  Il existe alors $(Q_1, Q_2) \in (\mathbb{K}[X])^2$ tels que
  $$P_1 = BQ_1$$
  $$P_2 = BQ_2$$
  et donc
  $$(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2) = B(\lambda_1 Q_1 + \lambda_2 Q_2) \in B\mathbb{K}[X].$$
  Ainsi $B\mathbb{K}[X]$ est bien un sev de $\mathbb{K}[X]$.

On souhaite ensuite montrer que $(B\mathbb{K}[X]) \oplus \mathbb{K}_{d-1}[X] = \mathbb{K}[X]$ c'est à dire que pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$ il existe un et unique couple $(Q, R) \in \mathbb{K}[X]$ tel que
$$A = BQ + R$$
$$\deg(R) < \deg(B)$$
il s'agit de l'existence et unicité de la division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$.
Alternativement on peut redémontrer cette existence et unicité par des méthodes d'algèbre linéaire:
- On a $\{0\} \subset (B\mathbb{K}[X]) \cap \mathbb{K}_{d-1}[X]$.
  Soit $P \in (B\mathbb{K}[X]) \cap \mathbb{K}_{d-1}[X]$.
  Alors il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = BQ$ et $\deg(P) \leq d-1$.
  Or $\deg(BQ) = \deg(B) + \deg(Q) = d + \deg(Q)$. On a donc $Q = 0$ d'où $P = 0$.
  Ainsi
  $$\boxed{(B\mathbb{K}[X]) \cap \mathbb{K}_{d-1}[X] = \{0\}}$$
  (d'où l'unicité).
- On a $(B\mathbb{K}[X]) \oplus \mathbb{K}_{d-1}[X] \subset \mathbb{K}[X]$.
  Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.
  Considérons l'ensemble $P + (B\mathbb{K}[X]) = \{A + BQ, Q \in \mathbb{K}[X]\}$.
  L'ensemble des degrés des polynômes de $P + (B\mathbb{K}[X])$ est un sous-ensemble non vide de $\mathbb{N} \cup \{-\infty\}$ et admet donc un plus petit élément.
  Soit $R \in P + (B\mathbb{K}[X])$ de degré minimal.
  Supposons par l'absurde que $\deg(R) \geq \deg(B)$. Avec $n = \deg(R)$, r_n le coefficient dominant de R et b_d le coefficient dominant de B on a alors $R - \frac{r_n}{b_d} X^{n-d} B$ de degré au plus $n-1$ et appartenant à $P + (B\mathbb{K}[X])$, ce qui est absurde.
  D'où $R \in \mathbb{K}_{d-1}[X]$.
  Ainsi (détailler si nécessaire),
  $$\boxed{\mathbb{K}[X] = (B\mathbb{K}[X]) + \mathbb{K}_{d-1}[X]}.$$
  (d'où l'existence).
  Remarque: on remarquera qu'il s'agit de la même preuve que pour l'existence de la division euclidienne dans $\mathbb{Z}$, en remplaçant le stathme *de la valeur absolue dans* $\min(|a - bq|)$ *par celui du degré dans* $\min(\deg(A - BQ))$.

Et on a donc bien montré que

$$\boxed{(B\mathbb{K}[X]) \oplus \mathbb{K}_{d-1}[X] = \mathbb{K}[X]}.$$

Remarque: dans le cas où B est de degré 0 (c'est à dire constant non nul), le résultat reste vrai en remplaçant $\mathbb{K}_{d-1}[X]$ par $\{0\}$, c'est à dire en prenant comme supplémentaire l'ensemble des polynômes de degré strictement inférieur à celui de B.

1.9.2. Soient A et B deux polynômes (de degrés ≥ 1). Montrer que $\pi_A \preceq \pi_B$ ssi $B \in A\mathbb{K}[X]$.

- Supposons $B \in A\mathbb{K}[X]$.
  Soit $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $B = AQ$.

  $$\mathrm{Ker}(\pi_A) = (A\mathbb{K}[X]) \supset (A(Q\mathbb{K}[X])) = (B\mathbb{K}[X]) = \mathrm{Ker}(\pi_B)$$

  et comme $Q \neq 0$ (car $B \neq 0$), $\deg(B) \geq \deg(A)$ d'où

  $$\mathrm{Im}(\pi_A) = \mathbb{K}_{\deg(A)-1}[X] \subset \mathbb{K}_{\deg(B)-1}[X] = \mathrm{Im}(\pi_B).$$

  Par la question **1.3.** on en déduit donc que

  $$\boxed{\pi_A \preceq \pi_B}.$$

- Supposons que $\pi_A \preceq \pi_B$.
  Alors, en particulier par la question **1.3.**, on a

  $$\mathrm{Ker}(\pi_A) \supset \mathrm{Ker}(\pi_B).$$

  c'est à dire

  $$(B\mathbb{K}[X]) \subset (A\mathbb{K}[X]).$$

  Comme en particulier $B = B1 \in (B\mathbb{K}[X])$, on a donc

  $$\boxed{B \in A\mathbb{K}[X]}$$

Remarque: on vérifie aisément que le résultat reste vrai si A ou B de degré 0.

1.9.3. Commenter en termes arithmétiques.

Pour un polynôme B non nul, et $P \in \mathbb{K}[X]$, le polynôme $\pi_B(P)$ est en fait le reste de la division euclidienne de P par B.
La division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$ a donc une interprétation en terme linéaires (décomposition selon une somme directe de sevs). Il en est de même de la divisibilité, car $A|B$ ssi le sev $A\mathbb{K}[X]$ contient le sev $B\mathbb{K}[X]$.
De plus on a montré que $\pi_A \preceq \pi_B$ ssi $A|B$, c'est à dire que l'application $P \mapsto \pi_P$ est "croissante" de $(\mathbb{K}[X], |)$ vers $(\mathcal{P}, \preceq)$, l'ordre issu de la divisibilité (modulo les inversibles i.e les polynômes constants pour obtenir un ordre) se traduisant donc en des inclusions sur les noyaux et images.

2. Endomorphismes de rang 1 et produit tensoriel

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.
On dit que f est «de rang 1» ssi $\mathrm{Im}(f)$ est une droite vectorielle.
On note alors $\mathrm{rg}(f) = 1$.
L'objectif de cette partie est fournir une caractérisation les endomorphismes de rang 1.

2.10. Vérifier que pour tout $\varphi \in E^*$ et $\xi \in E$, $\xi \otimes \varphi \in \mathcal{L}(E)$.

Soit $\varphi \in E^*$ et $\xi \in E$.
On a bien $\xi \otimes \varphi$ de E vers E.
Montrons qu'elle est linéaire.
Soient $(x_1, x_2) \in E^2$ et $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$.
On a par linéarité de φ et règles de calculs dans E

$$\begin{aligned}(\xi \otimes \varphi)(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) &= \varphi(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)\,\xi \\ &= (\lambda_1 \varphi(x_1) + \lambda_2 \varphi(x_2))\,\xi \\ &= \lambda_1(\varphi(x_1)\xi) + \lambda_2(\varphi(x_2)\xi) \\ &= \lambda_1(\xi \otimes \varphi)(x_1) + \lambda_2(\xi \otimes \varphi)(x_2).\end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{\xi \otimes \varphi \in \mathcal{L}(E)}$.

2.11. Soit $\varphi \in E^*$ et $\xi \in E$.
Déterminer $\text{Ker}(\xi \otimes \varphi)$ et $\text{Im}(\xi \otimes \varphi)$.

Il faut distinguer plusieurs cas.
- Si $\varphi = 0_{E^*}$ ou $\xi = 0_E$ alors $\xi \otimes \varphi = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et donc $\boxed{\text{Ker}(\xi \otimes \varphi) = E}$ tandis que $\boxed{\text{Im}(\xi \otimes \varphi) = \{0_E\}}$.
- Si $\varphi \neq 0_{E^*}$ et $\xi \neq 0_E$.
  - ▷ On a pour tout $x \in E$, $(\xi \otimes \varphi)(x) = \varphi(x)\xi \in \text{Vect}(\xi)$, d'où $\text{Im}(\xi \otimes \varphi) \subset \text{Vect}(\xi)$.
    De plus avec $x \in E$ tel que $\varphi(x) \neq 0$ (existe car $\varphi \neq 0_{E^*}$) on a pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $(\xi \otimes \varphi)(\frac{\lambda}{\varphi(x)}x) = \varphi(\frac{\lambda}{\varphi(x)}x)\xi = \frac{\lambda}{\varphi(x)}\varphi(x)\xi = \lambda\xi$ et donc $\text{Vect}(\xi) \subset \text{Im}(\xi \otimes \varphi)$.
    D'où
    $$\boxed{\text{Im}(\xi \otimes \varphi) = \text{Vect}(\xi)}.$$
  - ▷ On a pour tout $x \in E$, comme $\xi \neq 0_E$, par pseudo-intégrité, $\varphi(x)\xi = 0_E$ ssi $\varphi(x) = 0_{\mathbb{K}}$.
    Donc
    $$\boxed{\text{Ker}(\xi \otimes \varphi) = \text{Ker}(\varphi)}.$$

2.12. Montrer que pour tout $\varphi \in E^*\backslash\{0_{E^*}\}$ et $\xi \in E\backslash\{0_E\}$, $\text{rg}(\xi \otimes \varphi) = 1$.

Soient $\varphi \in E^*\backslash\{0_{E^*}\}$ et $\xi \in E\backslash\{0_E\}$.
On a alors (question **2.11.**)
$$\boxed{\text{Im}(\xi \otimes \varphi) = \text{Vect}(\xi)}.$$
Et comme $\xi \neq 0_E$ on en déduit donc que
$$\boxed{\text{rg}(\xi \otimes \varphi) = 1}.$$

2.13. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\text{rg}(f) = 1$. On fixe $\xi \in E\backslash\{0_E\}$ tel que $\text{Im}(f) = \text{Vect}(\xi)$.

2.13.1. Expliquer pourquoi il existe une et unique application $\varphi : E \to \mathbb{K}$ telle que pour tout $x \in E$, $f(x) = \varphi(x)\xi$.

Soit $x \in E$.
Comme $f(x) \in \text{Im}(f) = \text{Vect}(\xi)$ il $\boxed{\text{existe}}$ $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que
$$f(x) = \lambda\xi.$$
Montrons maintenant que un tel λ $\boxed{\text{est unique}}$.
Soient $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$ tels que
$$f(x) = \lambda_1\xi$$
$$f(x) = \lambda_2\xi.$$
Alors
$$(\lambda_1 - \lambda_2)\xi = 0_E$$
et comme $\xi \neq 0_E$ on en déduit
$$\lambda_1 = \lambda_2.$$
De l'existence et l'unicité on peut donc définir pour tout x, un unique scalaire $\varphi(x)$ tel que
$$f(x) = \varphi(x)\xi.$$
Remarque: avec seulement l'existence on peut définir une telle application φ mais alors elle dépend a priori d'un choix arbitraire. Dans ce cas la linéarité de la question suivante n'est plus assurée

2.13.2. Montrer que $\varphi \in E^*\backslash\{0_{E^*}\}$.

On a bien φ de E vers $\mathbb{K}$. Montrons qu'elle est linéaire.
Soient $(x_1, x_2) \in E^2$, $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$.
Par définition de φ,
$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \varphi(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)\xi$$
et
$$\lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) = \lambda_1\varphi(x_1)\xi + \lambda_2\varphi(x_2)\xi.$$

Par linéarité de f les deux expressions sont égales d'où

$$\varphi(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)\xi = (\lambda_1\varphi(x_1) + \lambda_2\varphi(x_2))\,\xi$$

et donc ($\xi \neq 0_E$ ou par unicité de φ)

$$\varphi(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1\varphi(x_1) + \lambda_2\varphi(x_2).$$

Enfin si $\varphi = 0_{E^*}$ alors $f = 0_E$ ce qui n'est pas le cas car $\mathrm{Im}(f) \neq \{0_E\}$.
On a donc bien $\boxed{\varphi \in E^*\backslash\{0_{E^*}\}}$.

2.13.3. Montrer que $f = \xi \otimes \varphi$.

Par définition de φ, on a pour tout $x \in E$, $f(x) = \varphi(x)\xi = (\xi \otimes \varphi)(x)$ et donc

$$\boxed{f = \xi \otimes \varphi}.$$

2.14. Conclure que

$$\{f \in \mathcal{L}(E) \mid \mathrm{rg}(f) = 1\} = \{\xi \otimes \varphi, (\xi, \varphi) \in (E\backslash\{0_E\}) \times (E^*\backslash\{0_{E^*}\})\}\,.$$

L'inclusion $\boxed{\supset}$ a été montrée à la question **2.12.** et l'inclusion $\boxed{\subset}$ à la question **2.13.**.
D'où on a par double inclusion

$$\boxed{\{f \in \mathcal{L}(E) \mid \mathrm{rg}(f) = 1\} = \{\xi \otimes \varphi, (\xi, \varphi) \in (E\backslash\{0_E\}) \times (E^*\backslash\{0_{E^*}\})\}}.$$

2.15. Montrer qu'un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ est de rang 1 ssi $\mathrm{Ker}(f)$ est un hyperplan de E.

On peut par exemple utiliser la caractérisation de la question **2.14.**.
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

- $\boxed{\Rightarrow}$ Supposons f de rang 1.
  Par **2.14.** il existe donc $(\xi, \varphi) \in (E\backslash\{0_E\}) \times (E^*\backslash\{0_{E^*}\})$ tels que $f = \xi \otimes \varphi$.
  D'où (par la question **2.11.**)
  $$\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(\varphi)$$
  et comme $\varphi \neq 0_{E^*}$, $\boxed{\mathrm{Ker}(f) \text{ est un hyperplan}}$.
- $\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que $\mathrm{Ker}(f)$ est un hyperplan. Notons $H = \mathrm{Ker}(f)$ cet hyperplan.
  Soit $\varphi \in E^*\backslash\{0_E\}$ tel que
  $$H = \mathrm{Ker}(\varphi).$$
  Soit $x_0 \notin H$. Posons alors
  $$\xi = \frac{1}{\varphi(x_0)} f(x_0)$$
  bien défini car $x_0 \notin H = \mathrm{Ker}(\varphi)$ et non nul car $x_0 \notin H = \mathrm{Ker}(f)$.
  Alors $E = H \oplus \mathrm{Vect}(x_0)$ et
  ▷ pour tout $x \in H$,
  $$f(x) = 0_E = (\varphi(x)\xi) = (\xi \otimes \varphi)(x)$$
  ▷ pour tout $x \in \mathrm{Vect}(x_0)$, avec $x = \lambda x_0$, $\lambda \in \mathbb{K}$,
  $$f(x) = \lambda f(x_0) = \lambda\varphi(x_0)\xi = \varphi(x)\xi = (\xi \otimes \varphi)(x).$$
  Ainsi f et $\xi \otimes \varphi$ sont deux endomorphismes coïncidant sur deux sevs supplémentaires, ils sont donc égaux.
  Comme $\boxed{f = \xi \otimes \varphi}$ avec ξ et φ non nuls, on en déduit par **2.14.** qu'en particulier
  $$\boxed{\mathrm{rg}(f) = 1}.$$

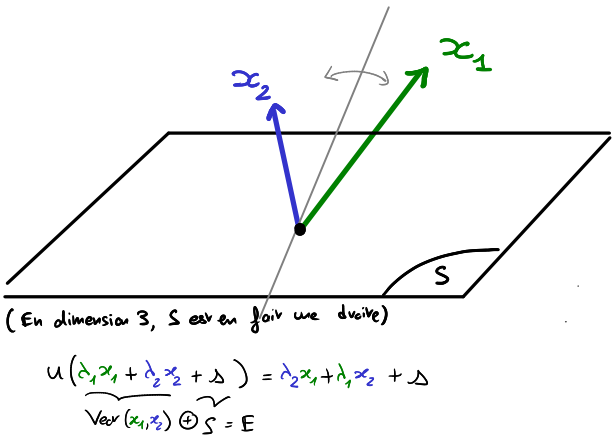
2.16. Soient $\xi_1, \xi_2 \in E\backslash\{0_E\}$ deux vecteurs non nuls de E.
Montrer qu'il existe $u \in \mathrm{GL}(E)$ tel que $\xi_1 = u(\xi_2)$.

- Si (ξ_1, ξ_2) est liée, alors comme ξ_2 non nul, il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\xi_1 = \lambda\xi_2$ et donc $u = \lambda\,\mathrm{Id}_E$ convient.
- Si (ξ_1, ξ_2) libre, soit S un supplémentaire de $\mathrm{Vect}(\xi_1, \xi_2)$ (obtenu par exemple par base incomplète).

Comme $\mathrm{Vect}(\xi_1,\xi_2)\oplus S = E$, on peut définir par exemple $u\in\mathcal{L}(E)$ par

$$\forall(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{K}^2,\ u(\lambda_1\xi_1+\lambda_2\xi_2)=\lambda_2\xi_1+\lambda_1\xi_2$$
$$\forall s\in S,\ u(s)=s$$

ce qui définit bien une et unique application linéaire (définition d'une application linéaire sur des supplémentaire).



Alors $u^2=\mathrm{Id}_E$ d'où $\boxed{u\in\mathrm{GL}(E)}$ et

$$\boxed{\begin{cases}u(\xi_1)=\xi_2\\ u(\xi_2)=\xi_1\end{cases}}$$

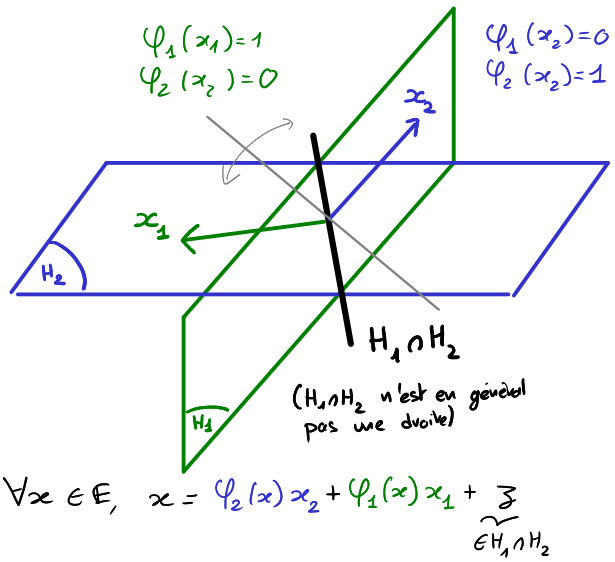
Remarque: il y a évidemment de nombreuses façons de construire un tel u, ici il s'agit géométriquement de la symétrie *par rapport à* $\mathrm{Vect}(\xi_1+\xi_2)\oplus S$ *parallèlement à* $\mathrm{Vect}(\xi_1-\xi_2)$.

2.17. Soient $\varphi_1,\varphi_2\in E^*\backslash\{0_E^*\}$ deux formes linéaires non nulles sur E.
Montrer qu'il existe $v\in\mathrm{GL}(E)$ tel que $\varphi_2=\varphi_1\circ v$.

- Si (φ_1,φ_2) est liée, alors comme φ_2 non nulle, il existe $\lambda\in\mathbb{K}$ tel que $\varphi_1=\lambda\varphi_2$ et donc $u=\frac{1}{\lambda}\mathrm{Id}_E$ convient.
- Si (φ_1,φ_2) est libre, alors $\mathrm{Ker}(\varphi_1)\not\subset\mathrm{Ker}(\varphi_2)$ et $\mathrm{Ker}(\varphi_2)\not\subset\mathrm{Ker}(\varphi_1)$ (caractérisation par les hyperplans des liaisons des formes linéaires).
  Fixons alors
$$x_1\in\mathrm{Ker}(\varphi_2)\backslash\mathrm{Ker}(\varphi_1),$$
$$x_2\in\mathrm{Ker}(\varphi_1)\backslash\mathrm{Ker}(\varphi_2).$$

Quitte à remplacer x_2 par $\frac{1}{\varphi_2(x_2)}x_2$ et x_1 par $\frac{1}{\varphi(x_1)}x_1$ on peut de plus supposer que

$$\varphi_1(x_1)=1$$
$$\varphi_2(x_2)=1.$$



Alors $\mathrm{Vect}(x_1,x_2)\oplus(H_1\cap H_2)=E$ et plus précisément (à rédiger si nécessaire)

$$\forall x\in E, x=\varphi_1(x)x_1+\varphi_2(x)x_2+\underbrace{z}_{\in H_1\cap H_2}.$$

On construit comme précédemment l'application linéaire u telle que $u(x_1)=x_2$, $u(x_2)=x_1$ et u induisant l'identité sur $H_1\cap H_2$.

Alors de même $u^2=\mathrm{Id}_E$ d'où $\boxed{u\in\mathrm{GL}(E)}$.
Et pour tout $x\in E$, avec

$$x=\varphi_1(x)x_1+\varphi_2(x)x_2+\underbrace{z}_{\in H_1\cap H_2}$$

on a

$$u(x)=\varphi_2(x)x_1+\varphi_1(x)x_2+\underbrace{z}_{\in H_1\cap H_2}$$

d'où en particulier

$$\varphi_1(x) = \varphi_2(u(x))$$
$$\varphi_2(x) = \varphi_1(u(x))$$

et donc

$$\boxed{\varphi_2 = \varphi_1 \circ u}.$$

2.18. Soient $\xi \in E$, $\varphi \in E^*$, et $w \in \mathcal{L}(E)$.
Montrer que

$$w \circ (\xi \otimes \varphi) = (w(\xi)) \otimes \varphi$$
$$(\xi \otimes \varphi) \circ w = \xi \otimes (\varphi \circ w).$$

- Soit $x \in E$.
  On a

$$\begin{aligned}(w \circ (\xi \otimes \varphi))(x) &= w(\varphi(x)\xi) \\ &= \varphi(x)w(\xi) \\ &= (w(\xi) \otimes \varphi)(x)\end{aligned}.$$

  Donc

$$\boxed{w \circ (\xi \otimes \varphi) = (w(\xi)) \otimes \varphi}$$

- Soit $x \in E$.
  On a

$$\begin{aligned}((\xi \otimes \varphi) \circ w)(x) &= (\xi \otimes \varphi)(w(x)) \\ &= \varphi(w(x))\xi \\ &= (\xi \otimes (\varphi \circ w))(x)\end{aligned}$$

  Donc

$$\boxed{(\xi \otimes \varphi) \circ w = \xi \otimes (\varphi \circ w)}$$

  Remarque: en utilisant le vocabulaire des opérateurs adjoints on a donc

$$(\xi \otimes \varphi) \circ w = \xi \otimes (w^*(\varphi)).$$

2.19. Soient $f_1, f_2 \in \mathcal{L}(E)$ deux endomorphismes de rang 1. Montrer qu'il existe $(u, v) \in (\mathrm{GL}(E))^2$ tels que $f_1 = u \circ f_2 \circ v^{-1}$.

Par la question **2.14.** il existe des vecteurs ξ_1 et ξ_2, ainsi que des formes linéaires φ_1 et φ_2 telles que

$$f_1 = \xi_1 \otimes \varphi_1$$
$$f_2 = \xi_2 \otimes \varphi_2.$$

D'après la question **2.16.** il existe $u \in \mathrm{GL}(E)$ tel que

$$u(\xi_2) = \xi_1.$$

Par la question **2.17.** il existe $v \in \mathrm{GL}(E)$ tel que

$$\varphi_1 \circ v = \varphi_2$$

On a alors $\varphi_1 = \varphi_2 \circ v^{-1}$.
Par la question **2.18.**

$$\begin{aligned}u \circ f_2 \circ v^{-1} &= u \circ (\xi_2 \otimes \varphi_2) \circ v^{-1} \\ &= (u(\xi_2)) \otimes (\varphi_2 \circ v^{-1}) \\ &= \xi_1 \otimes \varphi_1 \\ &= f_1.\end{aligned}$$

On a donc bien

$$\boxed{f_1 = u \circ f_2 \circ v^{-1}}.$$

3. Projecteurs minimaux

L'objectif de cette partie est de montrer que les éléments "minimaux" de $\widetilde{\mathcal{P}}$ pour la relation $\preceq$ sont les projecteurs de rang 1.

3.20. Soit $p \in \widetilde{\mathcal{P}}$ de rang 1. Soit $q \in \widetilde{\mathcal{P}}$.
Montrer que **si** $q \preceq p$ **alors** $p = q$.

Supposons $q \preceq p$.
Alors par **1.3.**

$$\mathrm{Im}(q) \subset \mathrm{Im}(p).$$

Or $\mathrm{Im}(p)$ est une droite vectorielle, on a donc $\mathrm{Im}(q) = \{0_E\}$ ou $\mathrm{Im}(q) = \mathrm{Im}(p)$ (si $\mathrm{Im}(q)$ contient un vecteur $x \in \mathrm{Im}(p)\backslash\{0_E\}$ alors $\mathrm{Im}(q) \supset \mathrm{Vect}(x) = \mathrm{Im}(p)$). Comme $q \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$ on en déduit

$$\mathrm{Im}(q) = \mathrm{Im}(p).$$

De même par **1.3.**

$$\mathrm{Ker}(q) \supset \mathrm{Ker}(p).$$

Or $\mathrm{Ker}(p)$ est un hyperplan par **2.15.** et donc $\mathrm{Ker}(q) = \mathrm{Ker}(p)$ ou $\mathrm{Ker}(q) = E$ (car si $\mathrm{Ker}(q)$ contient un vecteur $x \notin \mathrm{Ker}(p)$ alors $\mathrm{Ker}(q) \supset \mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Vect}(x) = E$). Comme $q \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$ on en déduit

$$\mathrm{Ker}(q) = \mathrm{Ker}(p).$$

Une projection étant entièrement caractérisée par son noyau et son image on en déduit

$$\boxed{q = p}.$$

3.21. Soit $p \in \widetilde{\mathcal{P}}$.

3.21.1. Montrer qu'il existe $\xi \in E\backslash\{0_E\}$ et $\varphi \in E^*\backslash\{0_{E^*}\}$ tels que
- $\xi \in \mathrm{Im}(p)$,
- $\mathrm{Ker}(p) \subset \mathrm{Ker}(\varphi)$,
- $\varphi(\xi) = 1$.

Indication: On pourra utiliser que tout sev strict de E est contenu dans un hyperplan.

- Comme $\mathrm{Ker}(p) \neq E$ (car p non nul) il s'agit d'un sev strict de E donc il existe un hyperplan H tel que $\mathrm{Ker}(p) \subset H$. Soit $\varphi \in E^*\backslash\{0_E\}$ tel que $H = \mathrm{Ker}(\varphi)$. On a alors
$$\boxed{\mathrm{Ker}(p) \subset \mathrm{Ker}(\varphi)}.$$
- Soit $x \notin H$. Alors comme p est une projection, $x - p(x) \in \mathrm{Ker}(p) \subset \mathrm{Ker}(\varphi)$ d'où $\varphi(p(x)) = \varphi(x) \neq 0$.
Posons $\xi = \frac{1}{\varphi(p(x))} p(x)$. Alors
$$\boxed{\xi \in \mathrm{Im}(p)}.$$
- De plus $\varphi(\xi) = \frac{1}{\varphi(p(x))}\varphi(p(x))$ d'où
$$\boxed{\varphi(\xi) = 1}.$$
ce qui assure par ailleurs que $\xi \neq 0_E$.

Remarque: ici on a construit φ puis ξ, on aurait pu procéder dans l'autre sens.
Ou encore plus simplement les construire simultanément via une base:
soit $((e_i)_{i\in I}, (f_j)_{j\in J})$ une base adaptée à $\mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p) = E$. En prenant $i_0 \in I$ quelconque (existe car $I \neq \emptyset$), et en posant $\xi = e_{i_0}$ et $\varphi = (e_{i_0})^*$ la forme linéaire coordonnée associée on obtient bien le résultat.

3.21.2. Montrer que $\xi \otimes \varphi \in \widetilde{\mathcal{P}}$.

Comme $(\xi \otimes \varphi)(\xi) = \xi \neq 0_E$, $\xi \otimes \varphi$ est non nul.
Soit $x \in E$. Alors comme $\varphi(\xi) = 1$,

$$\begin{aligned}(\xi \otimes \varphi)^2(x) &= \varphi\left(\varphi(x)\xi\right)\xi \\ &= \varphi(x)\varphi(\xi)\xi \\ &= \varphi(x)\xi \\ &= (\xi \otimes \varphi)(x)\end{aligned}$$

d'où $(\xi \otimes \varphi)^2 = (\xi \otimes \varphi)$ et

$$\boxed{\xi \otimes \varphi \in \widetilde{\mathcal{P}}}.$$

Remarque: on aurait aussi pu procéder de manière géométrique, l'endomorphisme $\xi \otimes \varphi$ est bien entendu le projecteur sur $\mathrm{Vect}(\xi)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(\varphi)$.
*Remarque: on aurait aussi pu utiliser la question **2.18.** et un calcul direct dans $\mathcal{L}(E)$*

$$\begin{aligned}(\xi \otimes \varphi) \circ (\xi \otimes \varphi) &= ((\xi \otimes \varphi)(\xi)) \otimes \varphi \\ &= (\varphi(\xi)\xi) \otimes \varphi \\ &= \xi \otimes \varphi.\end{aligned}$$

3.21.3. Montrer que $\xi \otimes \varphi \preceq p$.

On a, par la question **2.11.**, comme $\xi \neq 0_E$, $\mathrm{Ker}(\xi \otimes \varphi) = \mathrm{Ker}(\varphi)$ et comme $\varphi \neq 0_{E^*}$, $\mathrm{Im}(\xi \otimes \varphi) = \mathrm{Vect}(\xi)$.
On en déduit par construction de φ et ξ (question **3.21.1.**)que

$$\begin{aligned}\mathrm{Ker}(\xi \otimes \varphi) &\supset \mathrm{Ker}(p) \\ \mathrm{Im}(\xi \otimes \varphi) &\subset \mathrm{Im}(p)\end{aligned}$$

et donc par la question **1.3.**

$$\boxed{\xi \otimes \varphi \preceq p}.$$

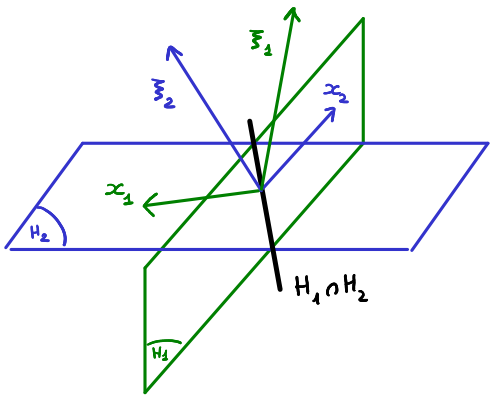
3.22. Conclure que

$$\forall p \in \widetilde{\mathcal{P}}, \quad \Big(\forall q \in \widetilde{\mathcal{P}},\ q \preceq p \Rightarrow q = p.\Big) \Leftrightarrow \mathrm{rg}(p) = 1.$$

Soit $p \in \widetilde{\mathcal{P}}$.
- $\boxed{\Leftarrow}$ Il s'agit du résultat de la question **3.20.**.
- $\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que pour tout $q \in \widetilde{\mathcal{P}}$, si $q \preceq p$ alors $q = p$.
  Construisons ξ et φ comme à la question **3.21.1.**.
  Alors par les résultats démontrés aux questions **3.21.2.** et **3.21.3.** on a $\xi \otimes \varphi \in \widetilde{\mathcal{P}}$ et $\xi \otimes \varphi \preceq p$.
  Donc $\xi \otimes \varphi = p$.
  Et en particulier, par **2.14.**, $\boxed{\mathrm{rg}(p) = 1}$.

3.23. Soient p_1 et p_2 deux projecteurs de rang 1.
Montrer qu'il existe $u \in \mathrm{GL}(E)$ tel que $p_1 = u \circ p_2 \circ u^{-1}$.

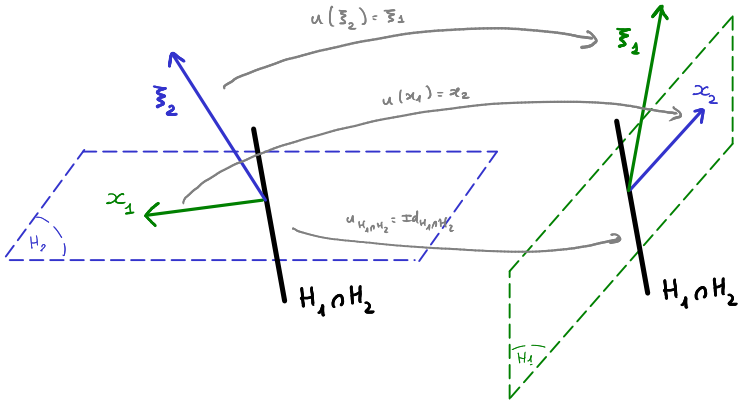
On a montré dans les questions précédentes qu'il existe deux vecteurs non nuls $\xi_1, \xi_2 \in E$ et deux formes linéaires non nulles $\varphi_1, \varphi_2 \in E^*$ telles que $\varphi_1(\xi_1) = 1$ et $\varphi_2(\xi_2) = 1$ et $p_1 = \xi_1 \otimes \varphi_1$, $p_2 = \xi_2 \otimes \varphi_2$.
Comme précédemment soient $x_1 \in \mathrm{Ker}(\varphi_2) \setminus \mathrm{Ker}(\varphi_1)$ et $x_2 \in \mathrm{Ker}(\varphi_1) \setminus \mathrm{Ker}(\varphi_2)$.



On définit alors $u \in \mathcal{L}(E)$ par

$$\begin{aligned}u(x_1) &= x_2 \\ u(\xi_2) &= \xi_1 \\ \forall y \in H_1 \cap H_2, u(y) &= y.\end{aligned}$$

ce qui est bien possible car tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme somme d'un vecteur de $\mathrm{Vect}(x_1)$, d'un vecteur de $\mathrm{Vect}(\xi_2)$ et d'un vecteur de $H_1 \cap H_2$ (on dit que la somme de ces trois sevs est directe, à rédiger si nécessaire).



Alors $\boxed{u \in \mathrm{GL}(E)}$ d'inverse explicite $u^{-1} \in \mathcal{L}(E)$ défini de manière similaire par

$$\begin{aligned} u^{-1}(x_2) &= x_1 \\ u^{-1}(\xi_1) &= \xi_2 \\ \forall y \in H_1 \cap H_2, u^{-1}(y) &= y. \end{aligned}$$

Enfin, pour tout $x \in E$, avec $x = \varphi_1(x)\xi_1 + z$, $z \in \mathrm{Ker}(\varphi_1)$,

$$\begin{aligned} \left(u \circ p_2 \circ u^{-1}\right)(x) &= \varphi_2(u^{-1}(x))u(\xi_2) \\ &= \varphi_2(\varphi_1(x)u^{-1}(\xi_1) + \underbrace{u^{-1}(z)}_{\in \mathrm{Ker}(\varphi_2)})u(\xi_2) \\ &= \varphi_1(x)\varphi_2(\xi_2)\xi_1 \\ &= \varphi_1(x)\xi_1 \\ &= p_1(x) \end{aligned}$$

d'où

$$\boxed{u \circ p_2 \circ u^{-1} = p_1}.$$

4. Automorphismes d'algèbre de $\mathcal{L}(E)$

L'objectif de cette partie est de décrire $\mathrm{Aut}(\mathcal{L}(E))$.

4.I. Généralités sur les automorphismes d'algèbres

4.24. Montrer que $(\mathrm{Aut}(\mathcal{L}(E)), \circ)$ est un groupe.

- $\mathrm{Aut}(\mathcal{L}(E))$ est une partie de l'ensemble des bijections de $\mathcal{L}(E)$ vers $\mathcal{L}(E)$, $\mathfrak{S}(\mathcal{L}(E))$, et $(\mathfrak{S}(\mathcal{L}(E)), \circ)$ est un groupe.
- On a $\mathrm{Id}_E \in \mathrm{Aut}(\mathcal{L}(E))$ car c'est un automorphisme d'anneau et un automorphisme linéaire.
- Soient Φ_1 et Φ_2 deux automorphismes d'algèbres de $\mathcal{L}(E)$. Alors $\Phi_1 \circ \Phi_2$ est bijective et:
  - ▷ Comme la composée de morphismes d'anneaux est un morphisme d'anneaux, $\Phi_1 \circ \Phi_2$ est un morphisme d'anneaux.
  - ▷ Comme la composée d'applications linéaires est linéaire, $\Phi_1 \circ \Phi_2$ est linéaire.

  Donc $\Phi_1 \circ \Phi_2$ est un automorphisme d'algèbres.
- Soit Φ un automorphisme d'algèbre. Alors Φ admet une bijection réciproque et
  - ▷ Comme la bijection réciproque d'un morphisme d'anneaux bijectif est un morphisme d'anneaux, Φ^{-1} est un morphisme d'anneaux.
  - ▷ Comme la bijection réciproque d'une application linéaire bijective est une application linéaire, Φ^{-1} est linéaire.

  Donc Φ^{-1} est un automorphisme d'algèbres.

On a donc montré que $\mathrm{Aut}(\mathcal{L}(E))$ est un sous-groupe de $(\mathfrak{S}(\mathcal{L}(E)), \circ)$ et donc en particulier,

$$\boxed{(\mathrm{Aut}(\mathcal{L}(E)), \circ) \text{ est un groupe}}.$$

On fixe désormais $\Phi \in \mathrm{Aut}(\mathcal{L}(E))$.

4.25. Montrer que $\Phi(\mathrm{GL}(E)) = \mathrm{GL}(E)$.

- Soit $u \in \mathrm{GL}(E)$. Comme Φ est un morphisme d'anneau c'est en particulier un morphisme de groupe et

  $$\begin{aligned} \Phi(u) \circ \Phi(u^{-1}) &= \Phi(u \circ u^{-1}) = \Phi(\mathrm{Id}_E) = \mathrm{Id}_E \\ \Phi(u^{-1}) \circ \Phi(u) &= \Phi(u^{-1} \circ u) = \Phi(\mathrm{Id}_E) = \mathrm{Id}_E \end{aligned}$$

  et donc $\Phi(u)$ est inversible, d'inverse $\Phi(u^{-1})$. On en déduit

  $$\boxed{\Phi(\mathrm{GL}(E)) \subset \mathrm{GL}(E)}.$$

- Soit $u \in \mathrm{GL}(E)$. Comme Φ^{-1} est un automorphisme d'algèbres, par le point précédent appliqué à Φ^{-1} on a $\Phi^{-1}(u) \in \mathrm{GL}(E)$. Et donc $u = \Phi\big(\underbrace{\Phi^{-1}(u)}_{\in \mathrm{GL}(E)}\big)$ d'où

  $$\boxed{\Phi(\mathrm{GL}(E)) \supset \mathrm{GL}(E)}.$$

4.26. Montrer que $\Phi(\mathcal{P}) = \mathcal{P}$.

- Soit $p \in \mathcal{P}$.
  Alors
  $$p^2 = p$$
  et comme Φ est un morphisme d'algèbres, c'est en particulier un morphisme de groupe, et en composant par Φ on obtient
  $$\Phi(p)^2 = \Phi(p)$$
  et donc $\Phi(p) \in \mathcal{P}$.
  D'où
  $$\boxed{\Phi(\mathcal{P}) \subset \mathcal{P}}.$$
- De même, soit $p \in \mathcal{P}$. Alors comme Φ^{-1} est un morphisme d'algèbre, par le point précédent $\Phi^{-1}(p) \in \mathcal{P}$ d'où $p = \Phi(\Phi^{-1}(p)) \in \Phi(\mathcal{P})$. Ainsi,
  $$\boxed{\Phi(\mathcal{P}) \supset \mathcal{P}}.$$

4.27. Montrer que l'application $\Phi_{\mathcal{P}}$ induite par Φ sur $\mathcal{P}$ est croissante, pour l'ordre $\preceq$ défini à la partie 1.

Soient $p, q \in \mathcal{P}$ tels que $p \preceq q$.
Alors
$$p \circ q = q \circ p = p$$
et donc en composant par Φ, comme Φ est un morphisme d'algèbre,
$$\Phi(p) \circ \Phi(q) = \Phi(q) \circ \Phi(p) = \Phi(p)$$
et donc $\Phi(p) \preceq \Phi(q)$.
Donc $\boxed{\Phi_{\mathcal{P}} \text{ est croissante}}$.

4.II. Automorphismes intérieurs

Pour $\omega \in \mathrm{GL}(E)$ on note
$$\iota_\omega : \begin{cases} \mathcal{L}(E) \to \mathcal{L}(E) \\ f \mapsto \omega \circ f \circ \omega^{-1} \end{cases}$$

4.28. Montrer que pour tout $\omega \in \mathrm{GL}(E)$, $\iota_\omega \in \mathrm{Aut}(\mathcal{L}(E))$.

Soit $\omega \in \mathrm{GL}(E)$
On a
(i)
$$\iota_\omega(\mathrm{Id}_E) = \omega \circ \mathrm{Id}_E \circ \omega^{-1} = \mathrm{Id}_E\,.$$
Soit $(f_1, f_2) \in \mathcal{L}(\mathcal{E})$. On a
(ii)
$$\iota_\omega(f_1 + f_2) = \omega \circ (f_1 + f_2) \circ \omega^{-1} = \omega \circ f_1 \circ \omega^{-1} + \omega \circ f_2 \circ \omega^{-1} = \iota_\omega(f_1) + \iota_\omega(f_2)$$
(iii)
$$\iota_\omega(f_1 \circ f_2) = \omega \circ (f_1 \circ f_2) \circ \omega^{-1} = \omega \circ f_1 \circ \omega^{-1} \circ \omega \circ f_2 \circ \omega^{-1} = \iota_\omega(f_1) \circ \iota_\omega(f_2)$$
Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et $f \in \mathcal{L}(E)$. On a
(iv)
$$\iota_\omega(\lambda f) = \omega \circ \lambda f \circ \omega^{-1} = \lambda \omega \circ f \circ \omega^{-1} = \lambda \iota_\omega(f).$$
Les points (i), (ii), (iii) montrent que ι_ω est un morphisme d'anneau et les points (iii), (iv) montrent que ι_ω est une application linéaire.
Enfin on vérifie que (à rédiger si nécessaire)
$$\iota_\omega \circ \iota_{\omega^{-1}} = \iota_{\omega^{-1}} \circ \iota_\omega = \mathrm{Id}_{\mathcal{L}(E)}$$
d'où ι_ω est bijective.
Ainsi
$$\boxed{\iota_\omega \in \mathrm{Aut}(\mathcal{L}(E))}.$$

4.29. Montrer que l'application $\iota : \mathrm{GL}(E) \to \mathrm{Aut}(\mathcal{L}(E))$ définie par $\iota : \omega \mapsto \iota_\omega$ est un morphisme de groupes.

Par la question précédente ι est bien une application de $\mathrm{GL}(E)$ vers $\mathrm{Aut}(\mathcal{L}(E))$.
Soient $\omega_1, \omega_2 \in \mathrm{GL}(E)$.

Pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$, comme $(\omega_1\omega_2)^{-1} = \omega_2^{-1}\omega_1^{-1}$

$$\begin{aligned}(\iota_{\omega_1} \circ \iota_{\omega_2})(f) &= \iota_{\omega_1}(\iota_{\omega_2}(f)) \\ &= \omega_1 \left(\omega_2 f \omega_2^{-1}\right) \omega_1^{-1} \\ &= (\omega_1\omega_2) f (\omega_2\omega_1)^{-1} \\ &= \iota_{\omega_1\omega_2}(f)\end{aligned}$$

et donc

$$\iota_{\omega_1} \circ \iota_{\omega_2} = \iota_{\omega_1\omega_2}$$

et il s'agit donc bien d'un morphisme de groupes.

4.30. Montrer que $\mathrm{Ker}(\iota) = \{\lambda \mathrm{Id}_E, \lambda \in \mathbb{K}^\times\}$.

On a

$$\mathrm{Ker}(\iota) = \{\omega \in \mathrm{GL}(E) | \forall f \in \mathcal{L}(E),\ \omega \circ f = f \circ \omega\}$$

c'est à dire le noyau de ι est l'ensemble des automorphisme commutant avec tout endomorphisme.

- Tout d'abord pour tout $\lambda \in \mathbb{K}^\times$ on a $\lambda \mathrm{Id}_E \in \mathrm{GL}(E)$ et commute avec tout élément de $\mathcal{L}(E)$ d'où

$$\boxed{\mathrm{Ker}(\iota) \supset \left\{\lambda \mathrm{Id}_E, \lambda \in \mathbb{K}^\times\right\}}$$

- Soit $u \in \mathrm{Ker}(\iota)$ c'est à dire $u \in \mathrm{GL}(E)$ commutant avec tout endomorphisme.
  Alors **en particulier** pour tout $(\xi, \varphi) \in E \times E^*$,

  $$u \circ (\xi \otimes \varphi) = (\xi \otimes \varphi) \circ u$$

  ou encore

  $$(u(\xi)) \otimes \varphi = \xi \otimes (\varphi \circ u).$$

  Soit $\xi \in E \backslash \{0_E\}$, en choisissant $\varphi \in E^* \backslash \{0_{E^*}\}$ (existe par l'existence de base et donc en particulier de formes coordonnées par exemple) on en déduit en particulier que comme les images sont égales $\mathrm{Vect}(u(\xi)) = \mathrm{Vect}(\xi)$ c'est à dire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}^\times$ tel que $u(\xi) = \lambda\xi$. Formellement on a donc

  $$\forall \xi \in E \backslash \{0_E\}, \exists \lambda \in \mathbb{K}^\times, u(\xi) = \lambda\xi.$$

  Il reste ensuite à montrer qu'un tel λ est indépendant de ξ.
  Remarque: il s'agit d'un exercice classique, cf TD.
  Soient ξ_1, ξ_2 deux vecteurs non nuls et λ_1, λ_2 deux scalaires non nuls t.q

  $$\begin{aligned}u(\xi_1) &= \lambda_1\xi_1 \\ u(\xi_2) &= \lambda_2\xi_2.\end{aligned}$$

  On procède par disjonction de cas
  ▷ **Si** ξ_1, ξ_2 colinéaires avec $\mu \in \mathbb{K}^\times$ tel que $\xi_1 = \mu\xi_2$ on obtient

  $$\lambda_1\xi_1 = u(\xi_1) = \mu u(\xi_2) = \mu\lambda_2\xi_2 = \frac{\mu}{\mu}\lambda_2\xi_1$$

  d'où comme $\xi \neq 0_E$,

  $$\lambda_1 = \frac{\mu}{\mu}\lambda_2.$$

  ▷ **Si** ξ_1, ξ_2 libre, soit $\Lambda \in \mathbb{K}$ tel que

  $$u(\xi_1 + \xi_2) = \Lambda(\xi_1 + \xi_2).$$

  Alors

  $$(\Lambda - \lambda_1)\xi_1 + (\Lambda - \lambda_2)\xi_2 = 0_E$$

  et donc par liberté

  $$\lambda_1 = \Lambda = \lambda_2.$$

  et donc dans tous les cas $\lambda_1 = \lambda_2$. Comme $\lambda \in \mathbb{K}^\times$ ne dépend pas de ξ, on en conclut donc que (le cas $\xi = 0_E$ est immédiat)

  $$\exists \lambda \in \mathbb{K}^\times \forall \xi \in E, u(\xi) = \lambda\xi$$

  c'est à dire

  $$\exists \lambda \in \mathbb{K}^\times, u = \lambda \mathrm{Id}_E\,.$$

  Donc

  $$\boxed{\mathrm{Ker}(\iota) \subset \left\{\lambda \mathrm{Id}_E, \lambda \in \mathbb{K}^\times\right\}}$$

4.III. Tous à l'intérieur !

On cherche désormais à montrer que tout automorphisme d'algèbre s'écrit sous la forme ι_ω pour un certain $\omega \in \mathrm{GL}(E)$. On fixe donc $\Phi \in \mathrm{Aut}(\mathcal{L}(E))$.

4.31. À l'aide des parties précédentes, montrer que pour tout p projecteur de rang 1, $\Phi(p)$ est un projecteur de rang 1.

Par la question **4.26.**, $\boxed{\Phi(p) \text{ est un projecteur}}$, non nul car p non nul.
Soit $q \in \widetilde{\mathcal{P}}$ et supposons

$$q \preceq \Phi(p).$$

Alors par la question **4.27.** appliquée à Φ^{-1} on en déduit

$$\Phi^{-1}(q) \preceq p$$

et comme p est de rang 1, par **3.22.** on en déduit

$$\Phi^{-1}(q) = p$$

c'est à dire

$$q = \Phi(p).$$

On a donc montré

$$\forall q \in \widetilde{\mathcal{P}},\ q \preceq \Phi(p) \Rightarrow q = \Phi(p)$$

et donc par la question **3.22.**, $\boxed{\Phi(p) \text{ est de rang 1.}}$

4.32. En déduire pour tout f endomorphisme de rang 1, $\Phi(f)$ est un endomorphisme de rang 1.

Soit f un endomorphisme de rang 1.
Soit p un projecteur de rang 1 quelconque (existe car E non nul).
Par la question **2.19.** il existe u et v dans $\mathrm{GL}(E)$ tels que $f = u \circ p \circ v^{-1}$.
Alors $\Phi(f) = \Phi(u) \circ \Phi(p) \circ \Phi(v^{-1})$.
De plus par la question **4.31.**, $\Phi(p)$ est de rang 1.
Donc $\Phi(u) \circ \Phi(p) \circ \Phi(v^{-1})$ est aussi de rang 1 (car avec $\Phi(p) = \xi \otimes \varphi$, on obtient $\Phi(u) \circ \Phi(p) \circ \Phi(v^{-1}) = (\Phi(u)(\xi)) \otimes (\varphi \circ \Phi(v^{-1}))$).
Donc $\boxed{\Phi(f) \text{ est de rang 1}}$.

Dans les questions **4.33.** à **4.41.** on suppose de plus qu'il existe p un projecteur de rang 1 tel que $\Phi(p) = p$. On fixe alors un $(\xi, \varphi) \in E \times E^*$ tels que $p = \xi \otimes \varphi$.

4.33. Justifier l'existence d'un tel couple (ξ, φ). Ce couple est-il unique ?

Ce couple $\boxed{\text{existe}}$ par la question **2.14.**.
A priori il $\boxed{\text{n'est pas unique}}$ (si le corps a au moins 3 éléments) car pour tout $\lambda \in \mathbb{K}^\times$, le couple $\left(\lambda\xi, \frac{1}{\lambda}\varphi\right)$ convient aussi.
On a alors (déjà démontré dans les autres questions)

$$\boxed{\begin{array}{c}\mathrm{Ker}(p) = \mathrm{Ker}(\varphi) \\ \mathrm{Im}(p) = \mathrm{Vect}(\xi)\end{array}}.$$

4.34. Montrer que pour tout $x \in E \backslash \{0_E\}$, $\mathrm{Ker}(\Phi(x \otimes \varphi)) = \mathrm{Ker}(\varphi)$.
Indication: on pourra faire intervenir le projecteur $\mathrm{Id}_E - p$ *associé à* p.

Soit $x \in E$ non nul.
Posons $q = \mathrm{Id}_E - p$. Alors q est le projecteur sur $\mathrm{Ker}(\varphi)$ parallèlement à $\mathrm{Vect}(\xi)$.
En particulier $\mathrm{Im}(q) = \mathrm{Ker}(\varphi)$.
Donc

$$(x \otimes \varphi) \circ q = 0_{\mathcal{L}(E)}$$

et en composant par Φ,

$$\Phi(x \otimes \varphi) \circ \Phi(q) = 0_{\mathcal{L}(E)}.$$

Or comme Φ morphisme d'algèbre et $\Phi(p) = p$ on a

$$\Phi(q) = \Phi(\mathrm{Id}_E - p) = \mathrm{Id}_E - \Phi(p) = \mathrm{Id}_E - p = q$$

d'où

$$\Phi(x \otimes \varphi) \circ q = 0_{\mathcal{L}(E)}$$

c'est à dire

$$\mathrm{Ker}\left(\Phi(x \otimes \varphi)\right) \supset \mathrm{Im}(q).$$

Or $\mathrm{Im}(q)$ est un hyperplan et $\mathrm{Ker}\left(\Phi(x \otimes \varphi)\right) \neq E$ (car $x \otimes \varphi$ non nul). On a donc (à rédiger si nécessaire)

$$\mathrm{Im}(q) = \mathrm{Ker}\left(\Phi(x \otimes \varphi)\right)$$

i.e

$$\boxed{\mathrm{Ker}(\Phi(x \otimes \varphi)) = \mathrm{Ker}(\varphi)}.$$

4.35. En déduire que pour tout $x \in E$ il existe $y \in E$ tel que $\Phi(x \otimes \varphi) = y \otimes \varphi$.

Pour $x = 0_E$, $y = 0_E$ convient.
Soit $x \in E$, $x \neq 0_E$.
Par la question **4.32.**, $\Phi(x \otimes \varphi)$ est de rang 1, et donc par **2.14.** il existe Y vecteur non nul et ψ forme linéaire non nulle tels que $\Phi(x \otimes \varphi) = Y \otimes \psi$.
De plus par la question **4.34.** on a $\mathrm{Ker}(\psi) = \mathrm{Ker}(Y \otimes \psi) = \mathrm{Ker}(\varphi)$ et donc comme ψ non nulle il existe $\lambda \in \mathbb{K}^\times$ tel que $\psi = \lambda\varphi$. Avec $y = \lambda Y$ on obtient bien

$$\boxed{\Phi(x \otimes \varphi) = y \otimes \varphi}.$$

4.36. Justifier l'existence d'une unique application $u : E \to E$ telle que pour tout $x \in E$, $\Phi(x \otimes \varphi) = u(x) \otimes \varphi$.

Il reste à justifier que pour tout $x \in E$, le $y \in E$ construit précédemment est unique.
Soit $x \in E$, et $(y_1, y_2) \in E^2$ tels que

$$\Phi(x \otimes \varphi) = y_1 \otimes \varphi$$
$$\Phi(x \otimes \varphi) = y_2 \otimes \varphi$$

alors en particulier

$$y_1 \otimes \varphi = y_2 \otimes \varphi.$$

Comme $\varphi \neq 0_{E^*}$ il existe un $z \in E$ tel que $\varphi(z) \neq 0_{\mathbb{K}}$, fixons le.
En évaluant l'égalité précédente en z on obtient

$$\varphi(z)y_1 = \varphi(z)y_2$$

et donc

$$y_1 = y_2.$$

D'où $\boxed{\text{l'unicité}}$ d'un tel y et la bonne définition de u.

4.37. Montrer que $u \in \mathcal{L}(E)$.

L'ensemble de départ et d'arrivée est E.
Montrons que u est linéaire.
Soient $(x_1, x_2) \in E^2$, $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$.
Alors par définition de u,

$$\Phi((\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \otimes \varphi) = u(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \otimes \varphi.$$

De plus règle de calcul dans un ev (à détailler si nécessaire)

$$(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \otimes \varphi = \lambda_1(x_1 \otimes \varphi) + \lambda_2(x_2 \otimes \varphi)$$

et donc par linéarité de Φ, et définition de u

$$\begin{aligned}\Phi\left((\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \otimes \varphi\right) &= \Phi\left(\lambda_1(x_1 \otimes \varphi) + \lambda_2(x_2 \otimes \varphi)\right) \\ &= \lambda_1 \Phi\left(x_1 \otimes \varphi\right) + \lambda_2 \Phi\left(x_2 \otimes \varphi\right) \\ &= (\lambda_1 u(x_1) + \lambda_2 u(x_2)) \otimes \varphi.\end{aligned}$$

On obtient finalement

$$u(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \otimes \varphi = (\lambda_1 u(x_1) + \lambda_2 u(x_2)) \otimes \varphi$$

et donc par unicité (question **4.36.**) on en déduit

$$u(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 u(x_1) + \lambda_2 u(x_2).$$

On a donc bien $\boxed{u \in \mathcal{L}(E)}$.

4.38. Montrer que $u \in \mathrm{GL}(E)$.

- Soit $x \in \mathrm{Ker}(u)$.
  Alors $\Phi(x \otimes \varphi) = 0_E \otimes \varphi = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et par injectivité de Φ on en déduit $x \otimes \varphi = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Comme $\varphi \neq 0_{E^*}$ on a donc $x = 0_E$.
  Donc u est injective.
- Soit $y \in E$.
  Comme $\Phi(p) = p$ on a aussi $\Phi^{-1}(p) = p$ et Φ^{-1} vérifie les mêmes hypothèses que Φ.
  On peut donc appliquer la question **4.35.** à Φ^{-1}, il existe donc $x \in E$ tel que

$$\Phi^{-1}(y \otimes \varphi) = x \otimes \varphi.$$

  Fixons le. Alors

$$\Phi(x \otimes \varphi) = y \otimes \varphi$$

  c'est à dire (question **4.36.**)

$$u(x) = y.$$

  Donc u est surjective.

Ainsi

$$\boxed{u \in \mathrm{GL}(E)}.$$

Remarque: on aurait aussi pu exhiber la réciproque qui est «l'application u associée à Φ^{-1}».

4.39. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que

$$\forall x \in E, \quad (\Phi(f)(u(x))) \otimes \varphi = u(f(x)) \otimes \varphi.$$

Soit $x \in E$.
On a

$$\begin{aligned}(\Phi(f)(u(x))) \otimes \varphi &= \Phi(f) \circ (u(x) \otimes \varphi) \\ &= \Phi(f) \circ \Phi(x \otimes \varphi) \\ &= \Phi(f \circ (x \otimes \varphi)) \\ &= \Phi(f(x) \otimes \varphi) \\ &= u(f(x)) \otimes \varphi\end{aligned}$$

et donc

$$\boxed{(\Phi(f)(u(x))) \otimes \varphi = u(f(x)) \otimes \varphi}.$$

4.40. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, déduire de la question précédente que

$$\Phi(f) \circ u = u \circ f.$$

Soit $x \in E$. Par la question précédente

$$(\Phi(f)(u(x))) \otimes \varphi = u(f(x)) \otimes \varphi$$

et donc (question **4.36.**) on en déduit

$$\Phi(f)(u(x)) = u(f(x)).$$

Comme cela est vrai quel que soit $x \in E$ on a donc

$$\boxed{\Phi(f) \circ u = u \circ f}.$$

4.41. Conclure que

$$\Phi = \iota_u.$$

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.
On a par la question précédente $\Phi(f) \circ u = u \circ f$ et comme u est inversible (question **4.38.**) on en déduit

$$\Phi(f) = u \circ f \circ u^{-1} = \iota_u(f).$$

Comme cela est vrai quel que soit $f \in \mathcal{L}(E)$ on a donc

$$\boxed{\Phi = \iota_u}.$$

On ne suppose désormais plus l'existence d'un tel p.

4.42. À l'aide des questions précédentes montrer qu'il existe $\omega \in \mathcal{L}(E)$ tel que

$$\Phi = \iota_\omega.$$

Soit p un projecteur de rang 1 quelconque.
Par la question **4.31.** il existe q un projecteur de rang 1 tel que

$$\Phi(p) = q.$$

Alors par la question **3.23.** il existe $v \in \mathrm{GL}(E)$ tel que

$$p = v \circ q \circ v^{-1}$$

d'où

$$v\Phi(p)v^{-1} = p.$$

Posons

$$\widehat{\Phi} = \iota_v \circ \Phi.$$

Alors
- $\widehat{\Phi} \in \mathrm{Aut}(\mathcal{L}(E))$ comme composée d'éléments de $\mathrm{Aut}(E)$ (questions **4.24.**, **4.28.**)
- $\widehat{\Phi}(p) = p$ avec p un projecteur de rang 1

et donc par la question **4.41.** il existe $u \in \mathrm{GL}(E)$ tel que

$$\widehat{\Phi} = \iota_u.$$

Fixons le. Alors

$$\iota_v \circ \Phi = \iota_u$$

d'où (question **4.29.**)

$$\Phi = \iota_v^{-1} \circ \iota_u = \iota_{v^{-1} \circ u}$$

et donc avec $\omega = v^{-1} \circ u \in \mathrm{GL}(E)$ on bien

$$\boxed{\Phi = \iota_\omega}.$$

On a donc bien montré que

«Les automorphismes d'algèbre de $\mathcal{L}(E)$ sont les automorphismes intérieurs».

Remarque: il s'agit en fait d'un cas particulier du thèorème de Skolem-Noether.