Polynômes de Tchebychev

On portera une attention particulière à **la rédaction** et à **la propreté** de la copie.
En particulier tout **graphe ou schéma** pertinent et correctement annoté sera **valorisé**.
Les résultats devront être mis en valeur dès que possible.

Indiquez sur votre copie le temps approximatif pris pour le devoir.

Contexte

Ce problème propose une introduction aux très classiques **polynômes de Tchebychev**.
Il s'agit des polynômes $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définis par la récurrence double

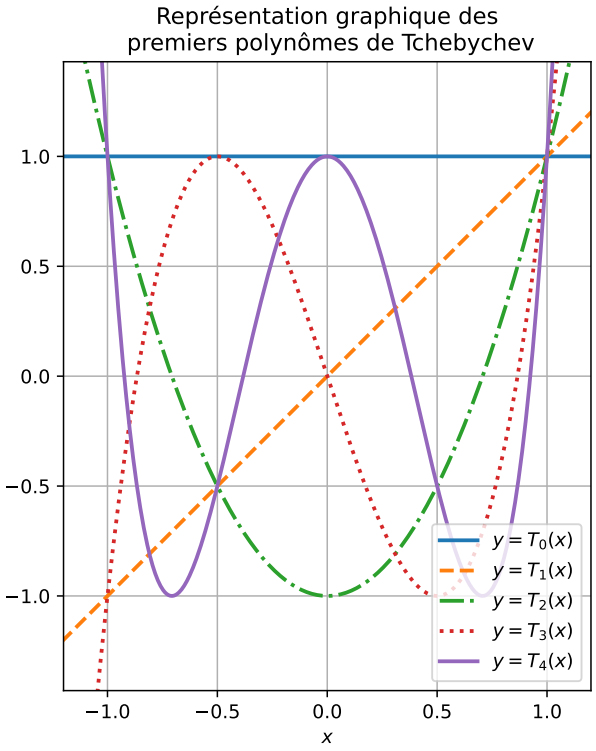
$$T_0(X) = 1$$
$$T_1(X) = X$$
$$\forall n \in \mathbb{N},\ T_{n+2}(X) = 2XT_{n+1}(X) - T_n(X).$$

et vérifiant (entre très nombreuses autres) la propriété que ↘ pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{\cos(n\theta) = T_n(\cos(\theta))}.$$

Une fois cette propriété démontrée, on démontre quelques petites propriétés indépendantes de cette famille de polynômes.

Remarque : Tchebychev est une transcription du cyrillique Чебышёв. Il en existe d'autres, comme Chebyshev, Tchebycheff, etc.



---

1. Premier contact avec les polynômes de Tchebychev

Soit $n \in \mathbb{N}$. On rappelle qu'un polynôme de degré n admet au plus n racines. En particulier un polynôme de degré inférieur ou égal à n et admettant au moins $n+1$ racines est le polynôme nul.

1.I. Définition

1.1. Rappeler sans justification l'expression, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, de $\cos(2\theta)$ comme un polynôme en $\cos(\theta)$ et exprimer $\cos(3\theta)$ comme un polynôme en $\cos(\theta)$.

Dans la suite on définit une suite de polynômes $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$\begin{aligned} T_0(X) &= 1 \\ T_1(X) &= X \\ \forall n \in \mathbb{N},\ T_{n+2}(X) &= 2XT_{n+1}(X) - T_n(X). \end{aligned}$$

1.2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\boxed{\forall \theta \in \mathbb{R},\quad \cos(n\theta) = T_n(\cos(\theta))}.$$

1.3. Soit $n \in \mathbb{N}$ et Q_n un polynôme tel que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\cos(n\theta) = Q_n(\cos(\theta))$.
Montrer que $Q_n = T_n$.

1.4. Expliciter T_0, T_1, T_2, T_3, T_4 et T_5.

1.5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, T_n est à coefficients entiers et de degré n.
Quel est le coefficient dominant de T_n ?

1.II. Quelques petites propriétés

Les questions suivantes sont indépendantes.

1.6. Soit $n \in \mathbb{N}$.

1.6.1. Donner l'ensemble des solutions de l'équation trigonométrique :

$$\cos(n\theta) = 0$$

d'inconnue $\theta \in \mathbb{R}$.

1.6.2. Combien de racines distinctes T_n possède-t-il ? Donner leurs valeurs explicites.

1.7. Soit $n \in \mathbb{N}$.Montrer que :

▷ **Si** n est pair **alors** la fonction $x \mapsto T_n(x)$ est paire.

▷ **Si** n est impair **alors** la fonction $x \mapsto T_n(x)$ est impaire.

1.8. Soient $m, n \in \mathbb{N}$ tels que $m \geq n$. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad T_n(x)T_m(x) = \frac{1}{2}\left(T_{m+n}(x) + T_{m-n}(x)\right).$$

1.9. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad (1-x^2)T_n''(x) - xT_n'(x) + n^2T_n(x) = 0.$$

1.10. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$\forall z \in \mathbb{C}^*,\quad T_n\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(z^n + \frac{1}{z^n}\right)$$

Il ne s'agit ici que d'une première introduction, les polynômes de Tchebychev possédant de très nombreuses propriétés remarquables.