En cas d'erreur de corrigé, n'hésitez pas à me le signaler.

Contexte

Ce problème propose une introduction aux très classiques **polynômes de Tchebychev**.
Il s'agit des polynômes $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définis par la récurrence double

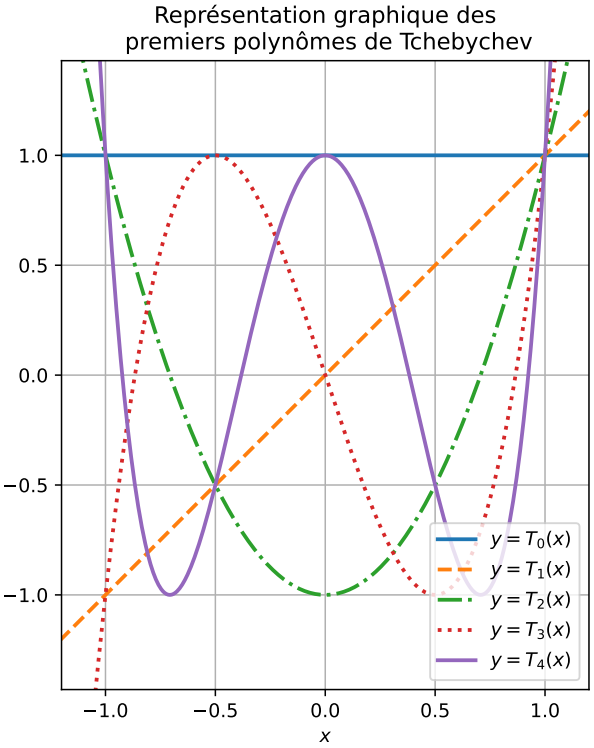
$$T_0(X) = 1$$
$$T_1(X) = X$$
$$\forall n \in \mathbb{N},\ T_{n+2}(X) = 2XT_{n+1}(X) - T_n(X).$$

et vérifiant (entre très nombreuses autres) la propriété que pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{\cos(n\theta) = T_n(\cos(\theta))}.$$

Une fois cette propriété démontrée, on démontre quelques petites propriétés indépendantes de cette famille de polynômes.

Remarque : Tchebychev est une transcription du cyrillique Чебышёв. Il en existe d'autres, comme Chebyshev, Tchebycheff, etc.



---

1. Premier contact avec les polynômes de Tchebychev

Soit $n \in \mathbb{N}$. On rappelle qu'un polynôme de degré n admet au plus n racines. En particulier un polynôme de degré inférieur ou égal à n et admettant au moins $n+1$ racines est le polynôme nul.

1.I. Définition

1.1. Rappeler sans justification l'expression, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, de $\cos(2\theta)$ comme un polynôme en $\cos(\theta)$ et exprimer $\cos(3\theta)$ comme un polynôme en $\cos(\theta)$.

On a pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{\cos(2\theta) = 2\cos(\theta)^2 - 1}.$$

Il y a de nombreuses façons de procéder pour la formule de l'angle triple.
On peut par exemple utiliser les formules d'addition, pour tout θ réel on a

$$\begin{aligned}\cos(3\theta) &= \cos(2\theta + \theta)\\ &= \cos(2\theta)\cos(\theta) - \sin(2\theta)\sin(\theta)\\ &= (2\cos(\theta)^2 - 1)\cos(\theta) - 2\cos(\theta)\sin(\theta)\sin(\theta)\\ &= (2\cos(\theta)^2 - 1)\cos(\theta) - 2\cos(\theta)(1 - \cos(\theta)^2)\\ &= 4\cos(\theta)^3 - 3\cos(\theta).\end{aligned}$$

Alternativement d'après les formules de linéarisation, pour tout θ réel, on a

$$\begin{aligned}\cos(\theta)^3 &= \left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^3\\ &= \frac{1}{8}\left(e^{3i\theta}+3e^{i\theta}+3e^{-i\theta}+e^{-3i\theta}\right)\\ &= \frac{2}{8}\left(\cos(3\theta)+3\cos(\theta)\right)\end{aligned}$$

et de

$$\cos(\theta)^3 = \frac{1}{4}\left(\cos(3\theta)+3\cos(\theta)\right)$$

on en déduit que

$$\cos(3\theta) = 4\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta).$$

Quelle que soit la méthode on obtient à la fin

$$\boxed{\cos(3\theta) = 4\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta)}.$$

C'est à dire, avec le polynôme T_3 défini par

$$T_3(X) = 4X^3 - 3X$$

on a pour tout réel θ

$$\cos(3\theta) = T_3(\cos(\theta)).$$

Dans la suite on définit une suite de polynômes $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$\begin{aligned}T_0(X) &= 1\\ T_1(X) &= X\\ \forall n\in\mathbb{N},\ T_{n+2}(X) &= 2XT_{n+1}(X) - T_n(X).\end{aligned}$$

1.2. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$ on a

$$\boxed{\forall\theta\in\mathbb{R},\quad \cos(n\theta) = T_n(\cos(\theta))}.$$

Remarque : la suite de polynôme étant définie par une récurrence d'ordre 2, il est probablement judicieux de procéder par récurrence double.
Pour tout entier naturel n, posons $\mathcal{Q}_n$ la proposition

$$\mathcal{Q}_n \ :\quad \forall\theta\in\mathbb{R},\quad \cos(n\theta) = T_n(\cos(\theta))$$

et montrons par récurrence double sur n que pour tout n, $\mathcal{Q}_n$.

- **Initialisation**
  Pour $n=0$ on a bien pour tout réel θ

$$\cos(0\theta) = \cos(0) = 1 = T_0(\cos(\theta))$$

  donc $\mathcal{Q}_0$ est vérifiée.
  Pour $n=1$ on a bien pour tout réel θ

$$\cos(1\theta) = \cos(\theta) = T_1(\cos(\theta))$$

  donc $\mathcal{Q}_1$ est vérifiée.
- **Hérédité**
  Soit $n\in\mathbb{N}$, supposons $\mathcal{Q}_n$ et $\mathcal{Q}_{n+1}$ c'est à dire dire que pour tout réel θ

$$\cos(n\theta) = T_n(\cos(\theta))$$

  et

$$\cos((n+1)\theta) = T_{n+1}(\cos(\theta))$$

  et montrons $\mathcal{Q}_{n+2}$.
  Soit $\theta\in\mathbb{R}$.
  Par les formules d'addition

$$\cos\left((n+2)\theta\right) + \cos(n\theta) = 2\cos\left(\left(\frac{(n+2)\theta+n\theta}{2}\right)\right)\cos\left(\left(\frac{(n+2)\theta-n\theta}{2}\right)\right)$$

  c'est à dire

$$\cos((n+2)\theta) = 2\cos(\theta)\cos((n+1)\theta) - \cos(n\theta).$$

  Par hypothèses de récurrence on a donc

$$\cos((n+2)\theta) = 2\cos(\theta)T_{n+1}(\cos(\theta)) - T_n(\cos(\theta))$$

ce qui revient, par définition de T_{n+2}, à

$$\cos((n+2)\theta) = T_{n+2}(\cos(\theta)).$$

Et ce quelque soit $\theta \in \mathbb{R}$. Ce qui est bien $\mathcal{Q}_{n+2}$.

► **Conclusion**
On a montré $\mathcal{Q}_0$, $\mathcal{Q}_1$, et que pour tout entier n, ($\mathcal{Q}_n$ et $\mathcal{Q}_{n+1}$) $\Rightarrow \mathcal{Q}_{n+2}$. Par récurrence double on a donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall \theta \in \mathbb{R},\ \ \cos(n\theta) = T_n(\cos(\theta))}.$$

1.3. Soit $n \in \mathbb{N}$ et Q_n un polynôme tel que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\cos(n\theta) = Q_n(\cos(\theta))$.
Montrer que $Q_n = T_n$.

Si pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\cos(n\theta) = Q_n(\cos(\theta))$ alors,

$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ T_n(\cos(\theta)) = Q_n(\cos(\theta))$$

et comme tout réel de $[-1,1]$ admet au moins un antécédent par cos, on a donc

$$\forall x \in [-1,1],\ T_n(x) = Q_n(x)$$

donc

$$\forall x \in [-1,1],\ (T_n - Q_n)(x) = 0.$$

On obtient donc que $T_n - Q_n$ est un polynôme s'annulant sur tout $[-1,1]$ et donc en particulier une infinité de fois.
Par conséquent $T_n - Q_n$ est le polynôme nul c'est à dire

$$\boxed{T_n = Q_n}.$$

1.4. Expliciter T_0, T_1, T_2, T_3, T_4 et T_5.

On a par définition

$$\boxed{T_0(X) = 1}$$

et

$$\boxed{T_1(X) = X}.$$

De plus la relation de récurrence, ou bien les questions précédentes donnent

$$\boxed{T_2(X) = 2X^2 - 1}$$

et

$$\boxed{T_3(X) = 4X^3 - 3X}.$$

Enfin, par la relation de récurrence

$$T_4(X) = 2X(4X^3 - 3X) - (2X^2 - 1)$$

ce qui donne

$$\boxed{T_4(X) = 8X^4 - 8X^2 + 1}$$

et de même,

$$T_5(X) = 2X(8X^4 - 8X^2 + 1) - (4X^3 - 3X)$$

donne

$$\boxed{T_5(X) = 16X^5 - 20X^3 + 5X}.$$

1.5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, T_n est à coefficients entiers et de degré n.
Quel est le coefficient dominant de T_n ?

Tout d'abord T_0 est à coefficients entiers, de degré 0 et de coefficient dominant 1.
On procède ensuite par récurrence double sur $n \geq 1$.
Plus précisément montrons par récurrence double sur $n \in \mathbb{N}^*$ que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : « T_n est un polynôme à coefficients entiers, de degré n et de coefficient dominant 2^{n-1}.

► **Initialisation**
Pour $n = 1$, $T_1 = X$, à coefficients entiers, de degré 1 et de coefficient dominant $1 = 2^{1-1}$.
Pour $n = 2$, $T_2 = 2X^2 - 1$, à coefficients entiers, de degré 2 et de coefficient dominant $2 = 2^{2-1}$.

► **Hérédité**
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et supposons la propriété vraie au rangs n et $n+1$.

Alors $-T_n$ est à coefficients entiers, de degré n.
Et $2XT_{n+1}$ est à coefficients entiers, de degré $1+(n+1)$ et de coefficient dominant $2\times 2^{(n+1)-1}$.
Par conséquent $2XT_{n+1}-T_n$ est à coefficients entiers, de degré $n+2$, et de coefficient dominant $2^{(n+2)-1}$.

▶ **Conclusion**
La propriété est initialisée et héréditaire (en termes de récurrence double). Par récurrence double on a donc

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ T_n \text{ est à coefficients entiers, de degré } n \text{ et de coefficient dominant } 2^{n-1}.}$$

Remarque : Alternativement on aurait pu utiliser les formules de Moivre

$$T_n(\cos(\theta)) = \mathrm{Re}\left((\cos(\theta)+i\sin(\theta))^n\right)$$

développer par le binôme pour obtenir

$$T_n(X) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2}\rfloor} \binom{n}{2k} (X^2-1)^k X^{n-2k}$$

ce qui permet de conclure explicitement.

1.II. Quelques petites propriétés

Les questions suivantes sont indépendantes.

1.6. Soit $n\in\mathbb{N}$.

1.6.1. Donner l'ensemble des solutions de l'équation trigonométrique :

$$\cos(n\theta)=0$$

d'inconnue $\theta\in\mathbb{R}$.

Si $n=0$ il n'y a pas de solutions.
Supposons désormais que $n\neq 0$.
On a $\cos(n\theta)=0$ ssi

$$n\theta \equiv \pm\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$$

c'est à dire

$$\theta \equiv \pm\frac{\pi}{2n}\ \left[\frac{2\pi}{n}\right].$$

L'ensemble des solutions est donc

$$\boxed{\left\{-\frac{\pi}{2n}+\frac{2k\pi}{n},\ k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{\pi}{2n}+\frac{2k\pi}{n},\ k\in\mathbb{Z}\right\}}.$$

Ce résultat pouvant se réécrire

$$\left\{\frac{\pi}{2n}+\frac{k\pi}{n},\ k\in\mathbb{Z}\right\}.$$

1.6.2. Combien de racines distinctes T_n possède-t-il ? Donner leurs valeurs explicites.

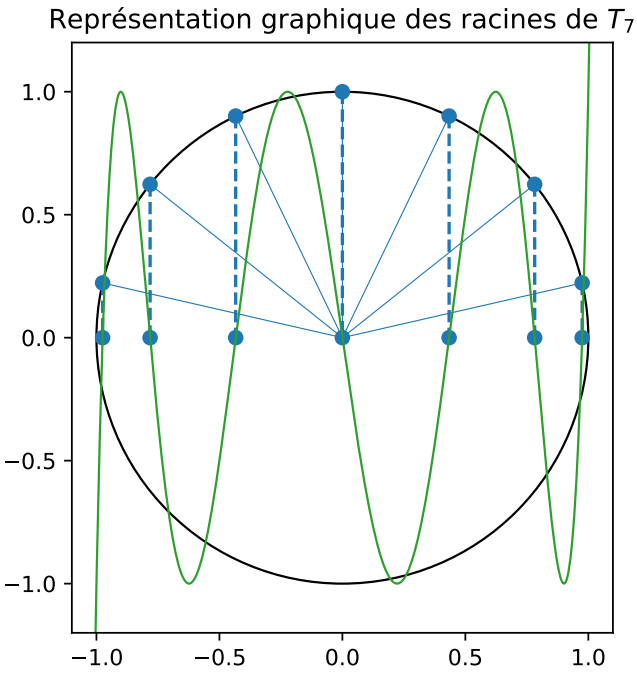
On a pour tout $\theta\in\mathbb{R}$,

$$T_n(\cos(\theta))=0$$

ssi

$$\cos(n\theta)=0.$$

Par conséquent on a les $\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$ pour $k\in\mathbb{Z}$, sont **des** racines de T_n.
Mais il reste à vérifier que ce sont bien les seules.
Or, comme les $\frac{(2k+1)\pi}{2n}, k\in[\![0,n-1]\!]$ sont n angles deux à deux distincts et compris dans $[0,\pi]$, par le cas d'égalité de deux cosinus, on a les $\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right), k\in[\![0,n-1]\!]$ qui sont deux à deux distincts.
On a ainsi exhibé n racines distinctes de T_n. Or T_n est de degré n, ce sont les seules.



Par conséquent $\boxed{T_n \text{ possède } n \text{ racines distinctes}}$ (qui sont donc simples) et l'ensemble des racines de T_n est

$$\boxed{\left\{\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right), k \in [\![0, n-1]\!]\right\}}$$

1.7. Soit $n \in \mathbb{N}$.Montrer que :
▷ **Si** n est pair **alors** la fonction $x \mapsto T_n(x)$ est paire.
▷ **Si** n est impair **alors** la fonction $x \mapsto T_n(x)$ est impaire.

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ on a d'une part

$$T_n(\cos(\theta + \pi) = T_n(-\cos(\theta))$$

et d'autre part

$$T_n(\cos(\theta + \pi) = \cos(n(\theta + \pi)) = (-1)^n \cos(n\theta).$$

Donc comme $\cos : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ est surjective,

$$\forall x \in [-1, 1],\ T_n(-x) = (-1)^n T_n(x).$$

D'où le polynôme $T_n(-X) - (-1)^n T_n(X)$ s'annule une infinité de fois et est donc nul, c'est à dire

$$\boxed{T_n(-X) = (-1)^n T_n(X)}$$

En particulier,
- **Si** n **est pair** alors
$$\forall x \in \mathbb{R}, T_n(-x) = T_n(x)$$
c'est à dire la fonction $\underline{x \mapsto T_n(x) \text{ est paire}}$.
- **Si** n **est impair** alors
$$\forall x \in \mathbb{R}, T_n(-x) = -T_n(x)$$
c'est à dire la fonction $\underline{x \mapsto T_n(x) \text{ est impaire}}$.

1.8. Soient $m, n \in \mathbb{N}$ tels que $m \geq n$. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad T_n(x)T_m(x) = \frac{1}{2}\left(T_{m+n}(x) + T_{m-n}(x)\right).$$

Par les formules d'additions on a pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\cos(n\theta)\cos(m\theta) = \frac{1}{2}\left(\cos(n\theta + m\theta) + \cos(n\theta - m\theta)\right)$$

c'est à dire

$$\forall \theta \in \mathbb{R},\quad T_n(\cos(\theta))T_m(\cos(\theta)) = \frac{1}{2}\left(T_{m+n}(\cos(\theta)) + T_{m-n}(\cos(\theta))\right)$$

ce qui permet de déduire par surjectivité de $\cos : \mathbb{R} \to [-1,1]$

$$\forall x \in [-1,1],\quad T_n(x)T_m(x) = \frac{1}{2}\left(T_{m+n}(x) + T_{m-n}(x)\right)$$

et comme les deux termes sont polynômiaux et que $[-1,1]$ est infini on peut en déduire

$$T_n(X)T_m(X) = \frac{1}{2}\left(T_{m+n}(X) + T_{m-n}(X)\right)$$

d'où en particulier

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\quad T_n(x)T_m(x) = \frac{1}{2}\left(T_{m+n}(x) + T_{m-n}(x)\right)}.$$

Remarque : Attention à la suite logique, on montre progressivement l'égalité
- Pour les $\cos(\theta)$, $\theta \in \mathbb{R}$ par définition,
- pour les $x \in [-1,1]$ par surjectivité de cos,
- en termes polynômiaux car deux polynômes coincidant une infinité de fois sont égaux,
- et enfin sur $\mathbb{R}$ par évaluation de l'égalité polynômiale.

1.9. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad (1-x^2)T_n''(x) - xT_n'(x) + n^2T_n(x) = 0.$$

Les polynômes et fonctions trigonométriques sont dérivables un nombre quelconque de fois.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ f(\theta) = \cos(n\theta)$$

et calculons de deux manières différentes la dérivée seconde de f.
- D'une part

  $$\forall \theta \in \mathbb{R},\ f(\theta) = \cos(n\theta)$$

  d'où

  $$\forall \theta \in \mathbb{R},\ f'(\theta) = -n\sin(n\theta)$$

  et donc

  $$\forall \theta \in \mathbb{R},\ f''(\theta) = -n^2\cos(n\theta).$$

- D'autre part, par propriété fondamentale des polynômes de Tchebychev,

  $$\forall \theta \in \mathbb{R},\ f(\theta) = T_n(\cos(\theta))$$

  d'où

  $$\forall \theta \in \mathbb{R},\ f'(\theta) = -\sin(\theta)T_n'(\cos(\theta))$$

  et donc

  $$\begin{aligned}\forall \theta \in \mathbb{R},\ f''(\theta) &= -\cos(\theta)T_n'(\cos(\theta)) + (-\sin(\theta))^2T_n''(\cos(\theta)) \\ &= -\cos(\theta)T_n'(\cos(\theta)) + (1-\cos(\theta)^2)T_n''(\cos(\theta)).\end{aligned}$$

On en déduit donc

$$\forall \theta \in \mathbb{R},\quad (1-\cos(\theta)^2)T_n''(\cos(\theta)) - \cos(\theta)T_n'(\cos(\theta)) + n^2T_n(\cos(\theta)) = 0$$

d'où par surjectivité de $\cos : \mathbb{R} \to [-1,1]$,

$$\forall x \in [-1,1],\quad (1-x^2)T_n''(x) - xT_n'(x) + n^2T_n(x) = 0.$$

Or tous les termes sont polynômiaux et $[-1,1]$ est infini donc

$$(1-X^2)T_n''(X) - XT_n'(X) + n^2T_n(X) = 0$$

et par évaluation on a donc

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\quad (1-x^2)T_n''(x) - xT_n'(x) + n^2T_n(x) = 0}.$$

1.10. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$\forall z \in \mathbb{C}^*,\ \ T_n\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(z^n+\frac{1}{z^n}\right)$$

Sans aucune surprise une méthode est de montrer que la relation est vraie pour les $e^{i\theta} \in \mathbb{U}$, puis de remarquer que quitte à multiplier par z^n il s'agit en fait d'une égalité polynômiale, pour conclure car $\mathbb{U}$ est infini avant d'évaluer sur $\mathbb{C}$.
Pour varier un peu on propose ici une démonstration par récurrence double (méthode qui était aussi valide dans le reste de la partie).
Pour tout entier naturel n, posons $\mathcal{H}_n$ la proposition

$$\mathcal{H}_n\ :\quad \forall z \in \mathbb{C}^*,\ \ \frac{1}{2}\left(z^n+\frac{1}{z^n}\right) = T_n\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right)$$

et montrons par récurrence double sur n que pour tout n, $\mathcal{H}_n$.

- **Initialisation** :
  Pour $n=0$ on a bien pour tout $z \in \mathbb{C}$,
  $$\frac{1}{2}\left(z^n+\frac{1}{z^n}\right) = \frac{1}{2}(1+1) = 1 = T_0\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right)$$
  donc $\mathcal{H}_0$ est vérifiée.
  Pour $n=1$ on a bien pour tout $z \in \mathbb{C}$,
  $$\frac{1}{2}\left(z^1+\frac{1}{z^1}\right) = \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right) = T_1\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right)$$
  donc $\mathcal{H}_1$ est vérifiée.
- **Hérédité** :
  Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{H}_n$ et $\mathcal{H}_{n+1}$ c'est à dire dire que pour tout $z \in \mathbb{C}^*$
  $$\frac{1}{2}\left(z^n+\frac{1}{z^n}\right) = T_n\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right)$$
  et
  $$\frac{1}{2}\left(z^{n+1}+\frac{1}{z^{n+1}}\right) = T_{n+1}\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right)$$
  et montrons $\mathcal{Q}_{n+2}$.
  Soit $z \in \mathbb{C}^*$, on a en développant
  $$\begin{aligned}
  T_{n+2}\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right) &= 2\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)T_{n+1}\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right) - T_n\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right)\\
  &= \frac{1}{2}\left(\left(z+\frac{1}{z}\right)\left(z^{n+1}+\frac{1}{z^{n+1}}\right) - \left(z^n+\frac{1}{z^n}\right)\right)\\
  &= \frac{1}{2}\left(z^{n+2}+z^n+\frac{1}{z^n}+\frac{1}{z^{n+2}}-z^n-\frac{1}{z^n}\right)\\
  &= \frac{1}{2}\left(z^{n+2}+\frac{1}{z^{n+2}}\right)
  \end{aligned}$$
  et donc on a bien $\mathcal{H}_{n+2}$.
- **Conclusion** :
  On a montré $\mathcal{H}_0$, $\mathcal{H}_1$, et que pour tout entier n, ($\mathcal{H}_n$ et $\mathcal{H}_{n+1}$) $\Rightarrow \mathcal{H}_{n+2}$. Par récurrence double on a donc
  $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \forall z \in \mathbb{C}^*,\ \ T_n\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(z^n+\frac{1}{z^n}\right)}.$$

  Remarque : on aurait en fait pu montrer cette relation et en déduire la relation « classique » en cosinus car pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, avec $z = e^{i\theta} \in \mathbb{U}$ on a $\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z}) = \cos(\theta)$ et $\frac{1}{2}(z^n+\frac{1}{z^n}) = \cos(n\theta)$.
  Par ailleurs pour tout $t \in \mathbb{R}$, avec $z = e^t$, on en déduit la relation de trigonométrie hyperbolique
  $$T_n(\mathrm{ch}(t)) = \mathrm{ch}(nt)$$
  où ch est le cosinus hyperbolique (cf le chapitre de fonctions usuelles).

Il ne s'agit ici que d'une première introduction, les polynômes de Tchebychev possédant de très nombreuses propriétés remarquables.

Les 11 premiers polynômes de Tchebychev

$$
\begin{aligned}
T_0 &= 1\\
T_1 &= X\\
T_2 &= 2X^2 - 1\\
T_3 &= 4X^3 - 3X\\
T_4 &= 8X^4 - 8X^2 + 1\\
T_5 &= 16X^5 - 20X^3 + 5X\\
T_6 &= 32X^6 - 48X^4 + 18X^2 - 1\\
T_7 &= 64X^7 - 112X^5 + 56X^3 - 7X\\
T_8 &= 128X^8 - 256X^6 + 160X^4 - 32X^2 + 1\\
T_9 &= 256X^9 - 576X^7 + 432X^5 - 120X^3 + 9X\\
T_{10} &= 512X^{10} - 1280X^8 + 1120X^6 - 400X^4 + 50X^2 - 1.
\end{aligned}
$$