Pentagone régulier et polynômes

On portera une attention particulière à **la rédaction** et à **la propreté** de la copie.
En particulier tout **graphe ou schéma** pertinent et correctement annoté sera **valorisé**.
Les résultats devront être mis en valeur dès que possible.

Indiquez sur votre copie le temps approximatif pris pour le devoir.

Contexte

Ce sujet est extrait d'un devoir maison de 2022–2023 consacré aux **polynômes de Tchebychev**. La première partie propose **trois méthodes polynomiales indépendantes** pour établir que

$$\xi = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$$

est racine du trinôme $4X^2 + 2X - 1$, puis d'en déduire sa valeur explicite $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$ et de commenter la constructibilité du pentagone régulier à la règle et au compas.
La seconde partie, **en autonomie**, exploite les relations coefficients-racines et les racines de l'unité pour calculer un produit de tangentes.
Prérequis : nombres complexes, trigonométrie et rappels sur les polynômes. On pourra rapprocher ce sujet du problème *Polynômes de Tchebychev* présent dans ces archives, dont il constituait à l'origine la partie « méthodes ».

---

1. Méthodes: pentagone régulier et polynômes

On note dans cet exercice,

$$\xi = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right).$$

L'objectif est alors de déterminer une équation de degré 2 vérifiée par ξ afin d'en obtenir une valeur explicite.
Les trois premières parties proposent chacune une méthode différente pour aboutir à chaque fois à la même équation.

Les trois parties 1.I, 1.II et 1.III sont indépendantes entre elles.

1.I. Formule de l'angle quintuple

1.1. Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\cos(5\theta) = 16\cos(\theta)^5 - 20\cos(\theta)^3 + 5\cos(\theta).$$

En déduire que ξ est une racine du polynôme

$$P_5(X) = 16X^5 - 20X^3 + 5X - 1.$$

1.2. Montrer que 1 est une racine de P_5. Commenter.

1.3. Développer le carré

$$\left(4X^2 + 2X - 1\right)^2.$$

1.4. En déduire que

$$4\xi^2 + 2\xi - 1 = 0.$$

1.II. Polynômes palindromiques

On dit qu'un polynôme P de degré 4 est palindromique si il peut s'écrire

$$P(X) = aX^4 + bX^3 + cX^2 + bX + a$$

avec $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$, $a \neq 0$.

1.5. Soit P un polynôme complexe de degré 4. Montrer que P est palindromique **ssi** il existe $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3$, $\alpha \neq 0$ tels que

$$\forall z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}, \quad P(z) = z^2\left(\alpha\left(z + \frac{1}{z}\right)^2 + \beta\left(z + \frac{1}{z}\right) + \gamma\right).$$

1.6. Montrer que $e^{\frac{2i\pi}{5}}$ est racine du polynôme

$$Q_5(X) = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1.$$

1.7. Déduire des deux questions précédentes que

$$4\xi^2 + 2\xi - 1 = 0.$$

1.III. Barycentre d'un pentagone régulier

1.8. Soit $\omega = e^{\frac{2i\pi}{5}}$. Montrer que

$$\sum_{k=-2}^{2} \omega^k = 0.$$

et représenter graphiquement ce résultat.

1.9. En déduire que

$$1 + 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = 0$$

et commenter graphiquement ce résultat.

1.10. Conclure que

$$4\xi^2 + 2\xi - 1 = 0.$$

1.IV. Conclusion

Les trois méthodes précédentes aboutissent à

$$4\xi^2 + 2\xi - 1 = 0.$$

1.11. En déduire que

$$\xi = \frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

1.12. **(Bonus)** Commenter au vu du résultat précédent la phrase suivante:

«Le pentagone régulier est constructible à la règle et au compas».

---

2. Autonomie: Produit des tangentes

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On considère le polynôme P_n défini par

$$P_n(X) = (X+1)^n - (X-1)^n.$$

Déterminer l'ensemble des racines de P_n.
En déduire que

$$\prod_{k=1}^{n} \tan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = \sqrt{2n+1}.$$