En cas d'erreur de corrigé, n'hésitez pas à me le signaler.

Contexte

Ce sujet est extrait d'un devoir maison de 2022–2023 consacré aux **polynômes de Tchebychev**. La première partie propose **trois méthodes polynomiales indépendantes** pour établir que

$$\xi = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$$

est racine du trinôme $4X^2 + 2X - 1$, puis d'en déduire sa valeur explicite $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$ et de commenter la constructibilité du pentagone régulier à la règle et au compas.
La seconde partie, **en autonomie**, exploite les relations coefficients-racines et les racines de l'unité pour calculer un produit de tangentes.
Prérequis : nombres complexes, trigonométrie et rappels sur les polynômes. On pourra rapprocher ce sujet du problème *Polynômes de Tchebychev* présent dans ces archives, dont il constituait à l'origine la partie « méthodes ».

---

1. Méthodes: pentagone régulier et polynômes

On note dans cet exercice,

$$\xi = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right).$$

L'objectif est alors de déterminer une équation de degré 2 vérifiée par ξ afin d'en obtenir une valeur explicite.
Les trois premières parties proposent chacune une méthode différente pour aboutir à chaque fois à la même équation.

Les trois parties 1.I, 1.II et 1.III sont indépendantes entre elles.

1.I. Formule de l'angle quintuple

1.1. Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\cos(5\theta) = 16\cos(\theta)^5 - 20\cos(\theta)^3 + 5\cos(\theta).$$

En déduire que ξ est une racine du polynôme

$$P_5(X) = 16X^5 - 20X^3 + 5X - 1.$$

On peut utiliser les polynômes de Tchebychev (voir le sujet *Polynômes de Tchebychev* de ces archives), en effet

$$T_5(X) = 16X^5 - 20X^3 + 5X.$$

Ou bien on peut redémontrer l'expression par la formule de Moivre. Pour $\theta \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\cos(5\theta) &= \mathrm{Re}\left((\cos(\theta) + i\sin(\theta))^5\right)\\ &= \mathrm{Re}\left(\cos(\theta)^5 + 5i\cos(\theta)^4\sin(\theta) - 10\cos(\theta)^3\sin(\theta)^2 - 10i\cos(\theta)^2\sin(\theta)^3 + 5\cos(\theta)\sin(\theta)^4 + i\sin(\theta)^5\right)\\ &= \cos(\theta)^5 - 10\cos(\theta)^3(1-\cos(\theta)^2) + 5\cos(\theta)(1-\cos(\theta)^2)^2\\ &= (10+5+1)\cos(\theta)^5 - (10+2\times 5)\cos(\theta)^3 + 5\cos(\theta).\end{aligned}$$

Dans tous les cas on obtient bien

$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ \boxed{\cos(5\theta) = 16\cos(\theta)^5 - 20\cos(\theta)^3 + 5\cos(\theta)}.$$

En particulier pour $\theta = \frac{2\pi}{5}$ on a

$$1 = \cos\left(5\frac{2\pi}{5}\right) = \cos(5\theta) = 16\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)^5 - 20\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)^3 + 5\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$$

c'est à dire

$$\boxed{16\xi^5 - 20\xi^3 + 5\xi - 1 = 0}.$$

1.2. Montrer que 1 est une racine de P_5. Commenter.

On a $P_5(1) = 16 - 20 + 5 - 1 = 0$ c'est à dire $\boxed{1 \text{ est racine de } P_5}$.
Cela est tout à fait attendu car $\cos(5 \times 2\pi) = 1$ et que pour tout θ, $P_5(\cos(\theta)) = 0$ ssi $5\theta \equiv 0[2\pi]$.
De plus l'existence de cette racine permet de **factoriser** le polynôme P_5 par $(X-1)$.
Par division euclidienne ou par identification et système on obtient

$$\boxed{P_5(X) = (X-1)(16X^4 + 16X^3 - 4X^2 - 4X + 1)}.$$

1.3. Développer le carré

$$\left(4X^2 + 2X - 1\right)^2.$$

On a

$$\boxed{\left(4X^2 + 2X - 1\right)^2 = 16X^4 + 16X^3 - 4X^2 - 4X + 1}.$$

1.4. En déduire que

$$4\xi^2 + 2\xi - 1 = 0.$$

Des questions précédentes on obtient

$$P_5(X) = (X-1)\left(4X^2 + 2X - 1\right)^2.$$

De plus $P_5(\xi) = 0$ et $\xi \neq 1$ (car $2\pi/5 \not\equiv 0[2\pi]$).
Par conséquent

$$\boxed{4\xi^2 + 2\xi - 1 = 0}.$$

1.II. Polynômes palindromiques

On dit qu'un polynôme P de degré 4 est palindromique si il peut s'écrire

$$P(X) = aX^4 + bX^3 + cX^2 + bX + a$$

avec $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$, $a \neq 0$.

1.5. Soit P un polynôme complexe de degré 4. Montrer que P est palindromique **ssi** il existe $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3$, $\alpha \neq 0$ tels que

$$\forall z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}, \quad P(z) = z^2\left(\alpha\left(z + \frac{1}{z}\right)^2 + \beta\left(z + \frac{1}{z}\right) + \gamma\right).$$

On procède par **double implication**.

- $\boxed{\Leftarrow}$ Si il existe $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3$, $\alpha \neq 0$ tels que

$$\forall z \in \mathbb{C}^*, \quad P(z) = z^2\left(\alpha\left(z + \frac{1}{z}\right)^2 + \beta\left(z + \frac{1}{z}\right) + \gamma\right)$$

alors pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, en développant

$$\begin{aligned} P(z) &= z^2\left(\alpha z^2 + \beta z + 2\alpha + \gamma + \beta\frac{1}{z} + \alpha\frac{1}{z^2} + \gamma\right) \\ &= \alpha z^4 + \beta z^3 + (2\alpha + \gamma)z^2 + \beta z + \alpha \end{aligned}$$

et donc en posant

$$\begin{cases} a = \alpha \\ b = \beta \\ c = 2\alpha + \gamma \end{cases}$$

on obtient que pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, $P(z) = az^4 + bz^3 + cz^2 + bz + a$ et comme $\mathbb{C}^*$ est infini on peut donc conclure que

$$P(X) = aX^4 + bX^3 + cX^2 + bX + a$$

où $a \neq 0$.

- $\boxed{\Rightarrow}$ Soit P palindromique et $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$, $a \neq 0$ tels que

$$P(X) = aX^4 + bX^3 + cX^2 + bX + a.$$

Posons

$$\begin{cases} \alpha = a \neq 0 \\ \beta = b \\ \gamma = c - 2a \end{cases}$$

Remarque: les valeurs de α, β, γ sont issues de la résolution du système obtenu dans l'autre implication. En fait ici cette double implication est une **analyse-synthèse**, et nous sommes en train d'effectuer la synthèse.
Alors pour tout $z \in \mathbb{C}^*$,

$$\begin{aligned} P(z) &= \alpha z^4 + \beta z^3 + (2\alpha + \gamma)z^2 + \beta z + \alpha \\ &= z^2 \left(\alpha z^2 + \beta z + 2\alpha + \gamma + \beta \frac{1}{z} + \alpha \frac{1}{z^2} + \gamma \right) \\ &= z^2 \left(\alpha \left(z + \frac{1}{z} \right)^2 + \beta \left(z + \frac{1}{z} \right) + \gamma \right). \end{aligned}$$

On a donc bien montré que

$$\boxed{P \text{ est palindromique } \Leftrightarrow \exists (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^2, \forall z \in \mathbb{C}^*, P(z) = z^2 \left(\alpha \left(z + \frac{1}{z} \right)^2 + \beta \left(z + \frac{1}{z} \right) + \gamma \right)}.$$

Remarque: en fait l'analyse synthèse effectuée permet même d'obtenir l'unicité de (α, β, γ) et une expression explicite de ces derniers en fonction des coefficients.

1.6. Montrer que $e^{\frac{2i\pi}{5}}$ est racine du polynôme

$$Q_5(X) = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1.$$

Par somme géométrique, comme $e^{\frac{2i\pi}{5}} \neq 1$ on obtient

$$Q_5(e^{\frac{2i\pi}{5}}) = \sum_{k=0}^{4} (e^{\frac{2i\pi}{5}})^k = \frac{(e^{\frac{2i\pi}{5}})^5 - 1}{e^{\frac{2i\pi}{5}} - 1} = 0$$

c'est à dire $\boxed{e^{\frac{2i\pi}{5}} \text{ est racine de } Q_5}$.

1.7. Déduire des deux questions précédentes que

$$4\xi^2 + 2\xi - 1 = 0.$$

Le polynôme Q_5 est palindromique.
Par la question **1.5.**, et notamment par l'expression explicite obtenue, on a

$$\forall z \in \mathbb{C}^*,\ Q_5(z) = z^2 \left(\left(z + \frac{1}{z} \right)^2 + \left(z + \frac{1}{z} \right) - 1 \right)$$

et donc, en particulier pour $z = e^{\frac{2i\pi}{5}} \neq 0$ on a

$$Q_5(e^{\frac{2i\pi}{5}}) = (e^{\frac{2i\pi}{5}})^2 \left(\left(e^{\frac{2i\pi}{5}} + \frac{1}{e^{\frac{2i\pi}{5}}} \right)^2 + \left(e^{\frac{2i\pi}{5}} + \frac{1}{e^{\frac{2i\pi}{5}}} \right) - 1 \right).$$

Or par la question précédente $Q_5(e^{\frac{2i\pi}{5}}) = 0$ et

$$e^{\frac{2i\pi}{5}} + \frac{1}{e^{\frac{2i\pi}{5}}} = e^{\frac{2i\pi}{5}} + e^{-\frac{2i\pi}{5}} = 2\cos\left(\frac{2\pi}{5} \right)$$

d'où

$$\left(\left(2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\right)^2+\left(2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\right)-1\right)=0$$

c'est à dire

$$\boxed{4\xi^2+2\xi-1=0}.$$

1.III. Barycentre d'un pentagone régulier

1.8. Soit $\omega=e^{\frac{2i\pi}{5}}$. Montrer que

$$\sum_{k=-2}^{2}\omega^k=0.$$

et représenter graphiquement ce résultat.

Par changement d'indice et par somme géométrique ($\omega\neq 1$),

$$\sum_{k=-2}^{2}\omega^k=\omega^{-2}\sum_{j=0}^{4}\omega^j=\omega^{-2}\frac{\omega^5-1}{\omega-1}.$$

et comme $\omega^5=1$,

$$\boxed{\sum_{k=-2}^{2}\omega^k=0}.$$

(On vient juste de redémontrer que $\sum_{z\in\mathbb{U}_5}z=0$.)
Graphiquement cela signifie que le barycentre du pentagone régulier inscrit dans le cercle unité est l'origine.

1.9. En déduire que

$$1+2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)+2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)=0$$

et commenter graphiquement ce résultat.

En particulier

$$\mathrm{Re}\left(\sum_{k=-2}^{2}\omega^k\right)=0$$

ce qui équivaut à

$$\sum_{k=-2}^{2}\mathrm{Re}\left(\omega^k\right)=0$$

c'est à dire

$$\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)+\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)+1+\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)+\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)=0.$$

On a donc bien

$$\boxed{1+2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)+2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)=0}$$

Graphiquement cela signifie que l'abscisse du barycentre du pentagone régulier inscrit dans le cercle unité est 0.

1.10. Conclure que

$$4\xi^2+2\xi-1=0.$$

Par formule de duplication

$$\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)=2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)^2-1$$

d'où

$$1+2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)+2\left(2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)^2-1\right)=0$$

c'est à dire

$$\boxed{4\xi^2 + 2\xi - 1 = 0}.$$

1.IV. Conclusion

Les trois méthodes précédentes aboutissent à

$$4\xi^2 + 2\xi - 1 = 0.$$

1.11. En déduire que

$$\xi = \frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

Le polynôme

$$4X^2 + 2X - 1$$

est un trinôme réel de discriminant $2^2 - 4 \times 4 \times (-1) = 20 > 0$.
Il admet donc deux racines réelles qui sont

$$\frac{-2 \pm \sqrt{2^2 \times 5}}{8} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}.$$

On remarque que $\frac{-1-\sqrt{5}}{4} < 0$ et $\frac{-1+\sqrt{5}}{4} > 0$.
De plus $\frac{2\pi}{5} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ d'où $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) \geq 0$.
Donc

$$\boxed{\xi = \frac{\sqrt{5}-1}{4}}.$$

Remarque: les raisonnements précédents montrent que l'autre racine est $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}$.

1.12. **(Bonus)** Commenter au vu du résultat précédent la phrase suivante:

«Le pentagone régulier est constructible à la règle et au compas».

Construire à la règle et au compas le pentagone régulier (sous-entendu celui inscrit dans le cercle unité passant par le point d'affixe 1) revient à construire à la règle et au compas une longueur de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ à partir d'une longueur 1.
Or les constructions géométriques usuelles montrent que

- la somme de deux nombres constructibles est constructible,
- le produit de deux nombres constructibles est constructible,
- l'inverse d'un nombre constructible est constructible,
- la racine carrée d'un nombre constructible est constructible.

On en déduit donc que $\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$ est constructible.
Remarque: se posent alors plusieurs questions:

- comment construire efficacement le pentagone régulier à la règle et au compas ?
- quels sont les polygones réguliers constructibles à la règle et au compas ?
  Le théorème de Gauss-Wantzel affirme que le n-gone régulier est constructible à la règle et au compas si n admet une décomposition en facteurs premiers

$$n = 2^\alpha \prod_{k=1}^{r} p_k$$

où les p_k sont des nombres premiers de Fermat (c'est à dire des nombres premiers de la forme $2^{2^N}+1$) distincts.
Par exemple l'heptagone ($n = 7$) régulier n'est pas constructible tandis que le triacontakaitétragone ($n = 34 = 2 \times 17$ avec 17 premier et $17 = 2^{2^2}+1$) est constructible.
Actuellement on ne connait que 5 nombres de Fermat premiers (les cas $N = 0, 1, 2, 3, 4$), ce qui donne donc $2^5 - 1 = 31$ valeurs de n impaires tels que le n-gone régulier soit constructible. Mais le nombre de nombres de Fermat premiers est inconnu, et par conséquent le nombre de polygones réguliers constructibles (à nombre impair de sommets) est lui aussi inconnu.

---

2. Autonomie: Produit des tangentes

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On considère le polynôme P_n défini par

$$P_n(X) = (X+1)^n - (X-1)^n.$$

Déterminer l'ensemble des racines de P_n.
En déduire que

$$\prod_{k=1}^{n} \tan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = \sqrt{2n+1}.$$

On a $P_n(1) = 2^n \neq 0$.
De plus pour tout $z \in \mathbb{C}\backslash\{1\}$,

$$\begin{aligned} P_n(z) = 0 &\Leftrightarrow \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n = 1 \\ &\Leftrightarrow \exists k \in [\![0, n-1]\!],\ \frac{z+1}{z-1} = e^{\frac{2ik\pi}{n}} \\ &\Leftrightarrow \exists k \in [\![0, n-1]\!],\ (e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1)z = (e^{\frac{2ik\pi}{n}} + 1) \end{aligned}$$

- Pour $k = 0$, on a $(e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1) = 0$ et $(e^{\frac{2ik\pi}{n}} + 1) \neq 0$.
- Dans les autres cas ($k \in [\![1, n-1]\!]$), on a $(e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1) \neq 0$.

On conclut donc que $P_n(z) = 0$ ssi il existe $k \in [\![1, n-1]\!]$ tel que

$$z = \frac{e^{\frac{2ik\pi}{n}} + 1}{e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1}$$

ce qui se réécrit, par la formule de l'angle moitié,

$$\begin{aligned} z &= \frac{e^{\frac{ik\pi}{n}} 2\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{e^{\frac{ik\pi}{n}} 2i\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)} \\ &= -i\frac{\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)} \end{aligned}.$$

Remarque: ici on ne peut pas remplacer sans précaution le $\frac{\cos}{\sin}$ par $\frac{1}{\tan}$ car dans le cas n pair et $k = \frac{n}{2}$ le cosinus est nul.
On montre ensuite que ces imaginaires purs sont deux à deux distincts.
De plus par la formule du binôme

$$P_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(1 - (-1)^{n-k}\right) X^k$$

et par conséquent $\boxed{P_n \text{ est de degré } n-1 \text{ et de coefficient dominant } \binom{n}{n-1}(1-(-1)) = 2n}$.
Comme on a exhibé $n-1$ racines distinctes de P_n ce sont les seules et elles sont simples. L'ensemble des racines de P_n est donc

$$\boxed{\left\{-i\frac{\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)},\ k \in [\![1, n-1]\!]\right\}}.$$

En appliquant ce résultat à $2n+1$ qui est impair (et donc le cosinus au dénominateur ne s'annule pas), on en déduit que les racines de P_{2n+1} sont les $-i\frac{1}{\tan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} = -i\cot\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$ pour $k \in [\![1, 2n]\!]$ c'est à dire, comme le coefficient dominant de P_{2n+1} est $2(2n+1)$,

$$(X+1)^{2n+1} - (X-1)^{2n+1} = 2(2n+1)\prod_{k=1}^{2n}\left(X + i\frac{1}{\tan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right)$$

et en évaluant en 0 (c'est à dire en considérant le coefficient constant) on obtient

$$1 - (-1)^{2n+1} = 2(2n+1)i^{2n}\prod_{k=1}^{2n}\frac{1}{\tan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}$$

c'est à dire

$$\prod_{k=1}^{2n}\tan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = (-1)^n(2n+1).$$

Il ne reste plus qu'à remarquer que

$$\forall k \in [\![1, 2n]\!],\ \tan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = \tan\left(\pi - \frac{((2n+1)-k)\pi}{2n+1}\right) = -\tan\left(\frac{((2n+1)-k)\pi}{2n+1}\right)$$

d'où (avec le changement d'indice $j = (2n+1) - k$)

$$\prod_{k=n+1}^{2n} \tan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = (-1)^n \prod_{j=1}^{n} \tan\left(\frac{j\pi}{2n+1}\right)$$

et donc

$$\prod_{k=1}^{2n} \tan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = (-1)^n \left(\prod_{k=1}^{n} \tan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right)^2.$$

On conclut donc bien des deux égalités que

$$\boxed{\prod_{k=1}^{n} \tan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = \sqrt{2n+1}}.$$