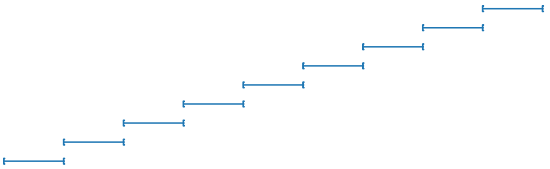
Cours: Partie entière

On portera une attention particulière à **la rédaction** et à **la propreté** de la copie.
En particulier tout **graphe ou schéma** pertinent et correctement annoté sera **valorisé**.
Les résultats devront être mis en valeur dès que possible.

Indiquez sur votre copie le temps approximatif pris pour le devoir.

Contexte

On définit et présente quelques propriétés de la **partie entière**.
En particulier les parties 1.I, 1.II et 1.V font partie du cours.



---

1. Cours: Partie entière

1.I. ♣ Définition de la partie entière

Définition 1 (Partie entière)
Soit $x \in \mathbb{R}$.
Il existe **un et unique** entier relatif $n \in \mathbb{Z}$ tel que

$$n \leq x < n+1.$$

On appelle cet entier la **partie entière** de x et on le note

$$n = \lfloor x \rfloor.$$

Démonstration

Dans la définition précédent, il faut prouver deux points: qu'un tel n existe et qu'il est unique.

- **Existence**
  Considérons l'ensemble

  $$A = \{k \in \mathbb{Z} \text{ t.q } k \leq x\}.$$

  Alors A est un sous ensemble de $\mathbb{Z}$ non vide (admis)[1]et majoré (par x).
  Comme toute partie non vide et majorée de $\mathbb{Z}$ admet un plus grand élément, on note

  $$n = \max(A).$$

  Alors

  $$n \leq x$$

  car $n \in A$.
  De plus comme n est un majorant (car un maximum) de A et que $n+1 > n$ on a $n+1 \notin A$ c'est à dire

  $$n+1 > x.$$

  Et donc un tel n existe bien.
- **Unicité**
  Soient $(n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2$ tels que

  $$\begin{aligned} n_1 \leq\ & x & < n_1+1 \\ n_2 \leq\ & x & < n_2+1. \end{aligned}$$

  Alors comme $n_1 \leq x$ et $x < n_2+1$ on a $n_1 < n_2+1$, et comme ce sont des entiers on en déduit

  $$n_1 \leq n_2.$$

[1] c'est une conséquence du caractère archimédien de $\mathbb{R}$

De même on a comme $n_2 \leq x$ et $x < n_1 + 1$ on a $n_2 < n_1 + 1$, et comme ce sont des entiers on en déduit

$$n_2 \leq n_1.$$

Et donc

$$n_1 = n_2$$

ce qui montre bien l'unicité.

1.II. ♣ Exemples et fonction partie entière

1.1. Donner, sans justification, la valeur des parties entières suivantes.

$$\lfloor 3 \rfloor,\ \lfloor \sqrt{2} \rfloor,\ \lfloor 3.99 \rfloor,\ \lfloor -3 \rfloor,\ \lfloor -\sqrt{2} \rfloor,\ \lfloor -1.9 \rfloor,\ \lfloor 2.3 + 3.8 \rfloor,\ \lfloor 2 \times 1.7 \rfloor.$$

1.2. Montrer que la fonction

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \lfloor x \rfloor \end{aligned}$$

est croissante.

1.3. Tracer la courbe d'équation

$$y = \lfloor x \rfloor.$$

1.III. Partie fractionnaire

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note dans cette partie $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$, appelée partie fractionnaire de x.

1.4. Donner, sans justification, la valeur des parties fractionnaires suivantes

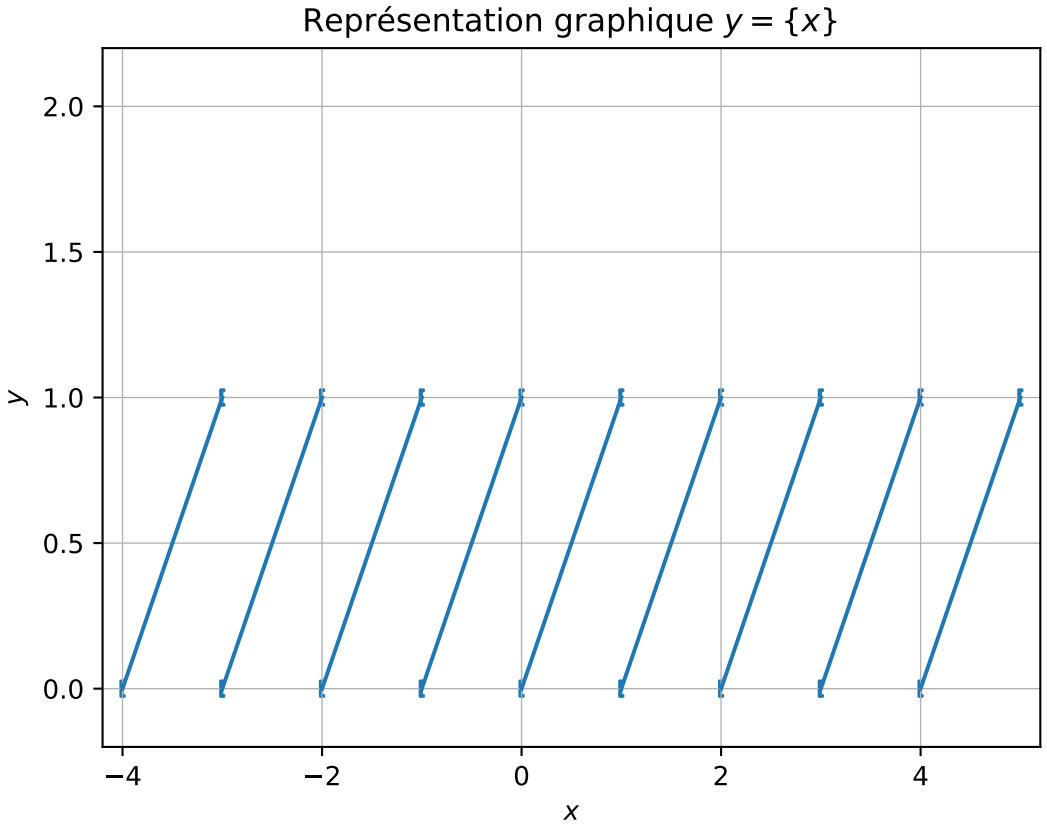
$$\{3\}, \{3.5\}, \{-1.4\}$$

1.5. Montrer que la fonction $x \mapsto \{x\}$ est 1-périodique.

1.6. Tracer la courbe d'équation

$$y = \{x\}.$$

On obtient



1.IV. Petits calculs

1.7. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x.$$

Représenter graphiquement cette inégalité.

1.8. Soit $x > 0$. Expliciter à l'aide de la fonction partie entière et de la fonction logarithme le plus petit entier n tel que

$$2^n \geq x.$$

1.9. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor \in \{0, 1\}.$$

1.V. ♣ Application: approximation décimale par défaut

La calculatrice ou l'ordinateur est autorisé pour cette sous-partie.
En Python la partie entière est la fonction `floor` importée de la bibliothèque `numpy`.

1.10. Expliciter les valeurs de

$$\lfloor \sqrt{3} \rfloor,\ \frac{\lfloor 10\sqrt{3} \rfloor}{10},\ \frac{\lfloor 10^2\sqrt{3} \rfloor}{10^2},\ \frac{\lfloor 10^3\sqrt{3} \rfloor}{10^3},\ \frac{\lfloor 10^4\sqrt{3} \rfloor}{10^4}.$$

1.11. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} \leq x < \frac{\lfloor 10^n x \rfloor + 1}{10^n}$$

Soit $x \in \mathbb{R}$ un réel.

1.12. Montrer que la suite $\left(\frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} = x.$$

1.13. Commenter l'appellation d'«approximation décimale par défaut de x» pour la suite $\left(\frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.