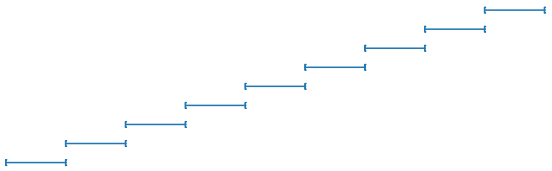
En cas d'erreur de corrigé, n'hésitez pas à me le signaler.

Contexte

On définit et présente quelques propriétés de la **partie entière**.
En particulier les parties 1.I, 1.II et 1.V font partie du cours.



1. Cours: Partie entière

1.I. ♣ Définition de la partie entière

Définition 1 (Partie entière)
Soit $x \in \mathbb{R}$.
Il existe **un et unique** entier relatif $n \in \mathbb{Z}$ tel que

$$n \leq x < n+1.$$

On appelle cet entier la **partie entière** de x et on le note

$$n = \lfloor x \rfloor.$$

Démonstration

[Voir énoncé]

1.II. ♣ Exemples et fonction partie entière

1.1. Donner, sans justification, la valeur des parties entières suivantes.

$$\lfloor 3 \rfloor,\ \lfloor \sqrt{2} \rfloor,\ \lfloor 3.99 \rfloor,\ \lfloor -3 \rfloor,\ \lfloor -\sqrt{2} \rfloor,\ \lfloor -1.9 \rfloor,\ \lfloor 2.3+3.8 \rfloor,\ \lfloor 2 \times 1.7 \rfloor.$$

On a

$$\boxed{\lfloor 3 \rfloor = 3,\ \lfloor \sqrt{2} \rfloor = 1,\ \lfloor 3.99 \rfloor = 3,\ \lfloor -3 \rfloor = -3,\ \lfloor -\sqrt{2} \rfloor = -2,\ \lfloor -1.9 \rfloor = -2,\ \lfloor 2.3+3.8 \rfloor = 6,\ \lfloor 2 \times 1.7 \rfloor = 3}.$$

1.2. Montrer que la fonction

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \lfloor x \rfloor \end{aligned}$$

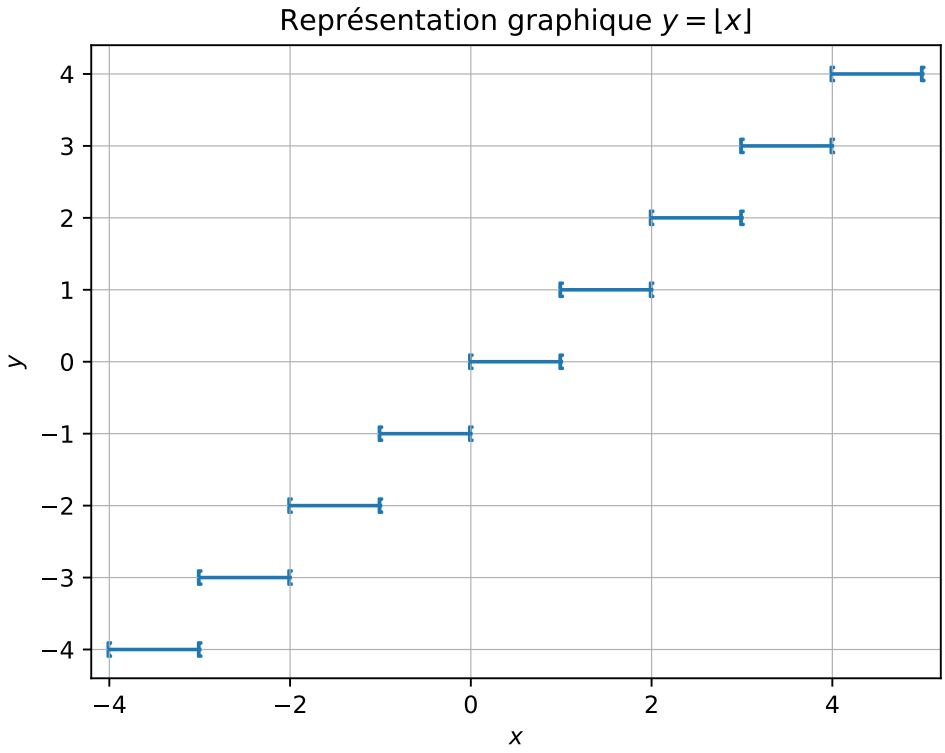
est croissante.

Soient x et y deux réels tels que $x \leq y$.
Alors $\lfloor x \rfloor \leq x \leq y$.
Donc $\lfloor x \rfloor \leq y$ et $\lfloor x \rfloor$ est un entier.
Par définition de $\lfloor y \rfloor$ on a donc $\lfloor x \rfloor \leq \lfloor y \rfloor$.
Donc $\boxed{x \mapsto \lfloor x \rfloor \text{ est croissante}}$.

1.3. Tracer la courbe d'équation

$$y = \lfloor x \rfloor.$$

On obtient



1.III. Partie fractionnaire

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note dans cette partie $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$, appelée partie fractionnaire de x.

1.4. Donner, sans justification, la valeur des parties fractionnaires suivantes

$$\{3\}, \{3.5\}, \{-1.4\}$$

On a

$$\boxed{\{3\} = 0, \{3.5\} = 0.5, \{-1.4\} = 0.6}$$

1.5. Montrer que la fonction $x \mapsto \{x\}$ est 1-périodique.

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$.
D'où $(\lfloor x \rfloor + 1) \leq x + 1 < (\lfloor x \rfloor + 1) + 1$ et comme $\lfloor x \rfloor + 1$ est un entier, par définition

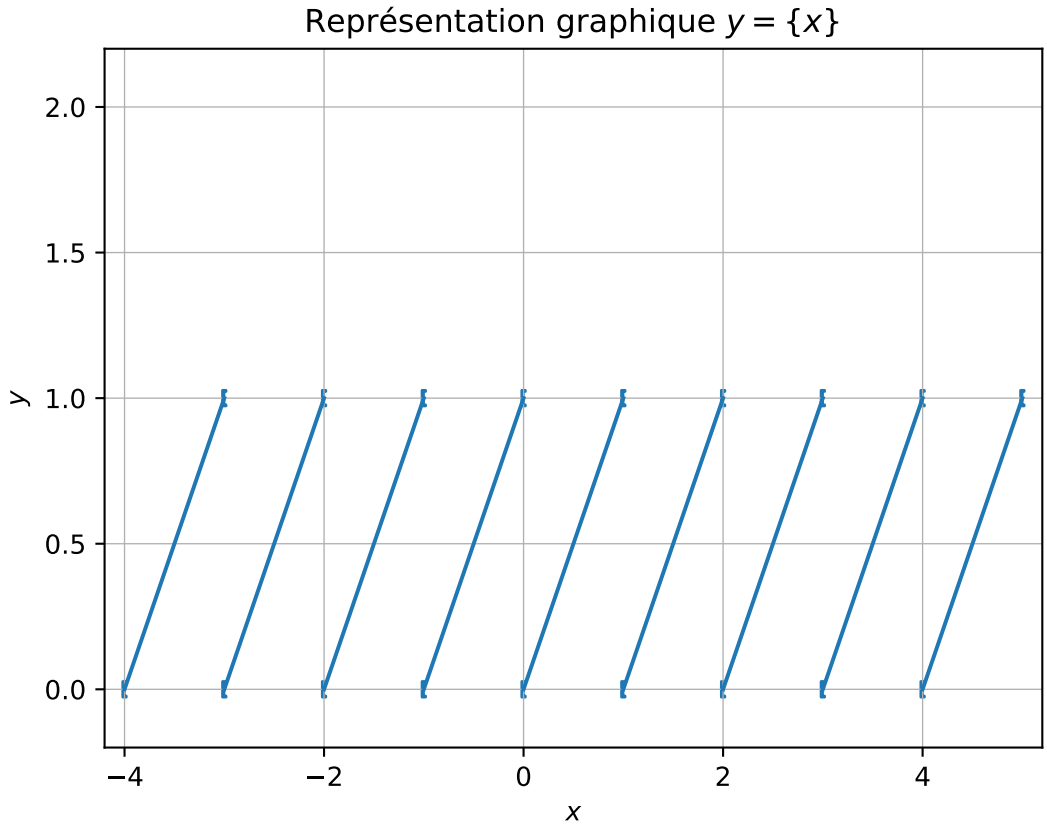
$$\lfloor x + 1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1.$$

On en déduit que $\lfloor x + 1 \rfloor - (x + 1) = \lfloor x \rfloor - x$ c'est à dire $\{x + 1\} = \{x\}$.
Donc $\boxed{x \mapsto \{x\} \text{ est 1-périodique}}$.

1.6. Tracer la courbe d'équation

$$y = \{x\}.$$

On obtient



1.IV. Petits calculs

1.7. Montrer que

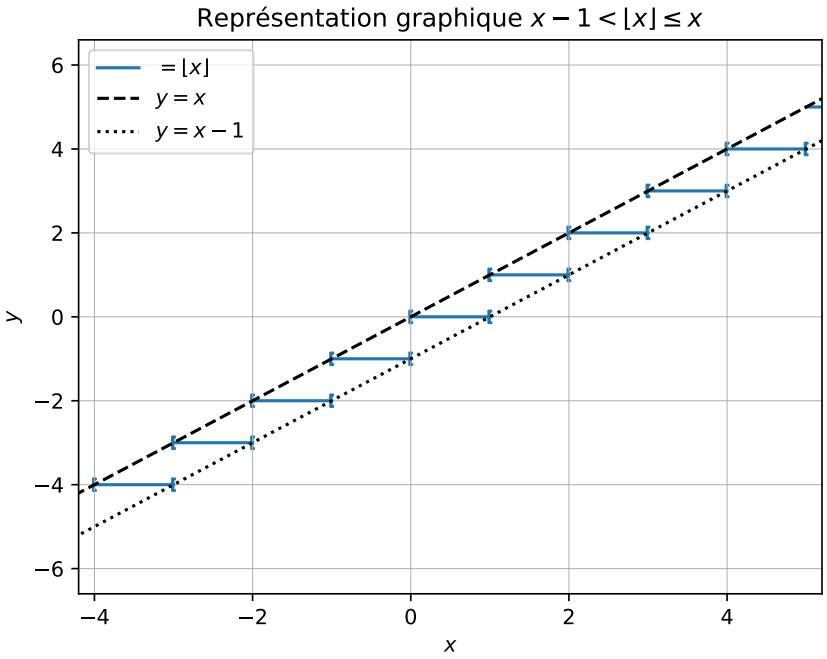
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x.$$

Représenter graphiquement cette inégalité.

Soit $x \in \mathbb{R}$.
On a par définition $\lfloor x \rfloor \leq x$. De plus toujours par définition $x < \lfloor x \rfloor + 1$ c'est à dire $x - 1 < \lfloor x \rfloor$.
D'où

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x}.$$

Ce qui se représente graphiquement



1.8. Soit $x>0$. Expliciter à l'aide de la fonction partie entière et de la fonction logarithme le plus petit entier n tel que

$$2^n \geq x.$$

Par croissance de ln, et comme $\ln(2)>0$, on a $2^n \geq x$,ssi

$$n \geq \frac{\ln(x)}{\ln(2)}.$$

En posant $y=\frac{\ln(x)}{\ln(2)}$, on cherche donc le plus petit entier plus grand que y, noté souvent $\lceil y\rceil$.
Il y a alors plusieurs façons d'exprimer $\lceil y\rceil$ à partir de la partie entière (méthodes à démontrer), par exemple par

$$\lceil y\rceil = \begin{cases} \lfloor y\rfloor +1 & \text{si } y\notin\mathbb{Z} \\ \lfloor y\rfloor & \text{si } y\in\mathbb{Z}. \end{cases}$$

ou encore

$$\lceil y\rceil = -\lfloor -y\rfloor .$$

Et donc

$$\boxed{n=\left\lceil\frac{\ln(x)}{\ln(2)}\right\rceil=-\left\lfloor-\frac{\ln(x)}{\ln(2)}\right\rfloor}.$$

1.9. Montrer que

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \lfloor 2x\rfloor -2\lfloor x\rfloor \in\{0,1\}.$$

Soit $x\in\mathbb{R}$.
Par la question **1.7.** (elle même directement issue de la définition) on a $2x-1<\lfloor 2x\rfloor\leq 2x$ et $x-1<\lfloor x\rfloor\leq x$. D'où comme $-2<0$

$$\begin{aligned} 2x-1 <\ & \lfloor 2x\rfloor \ \leq 2x \\ -2x \leq -2\lfloor x\rfloor <\ & -2x+2 \end{aligned}$$

et donc par somme d'inégalités

$$-1<\lfloor 2x\rfloor -2\lfloor x\rfloor <2$$

mais de plus on a $\lfloor 2x\rfloor -2\lfloor x\rfloor\in\mathbb{Z}$ d'où on déduit finalement

$$\boxed{\lfloor 2x\rfloor -2\lfloor x\rfloor\in\{0,1\}}.$$

1.V. ♣ Application: approximation décimale par défaut

La calculatrice ou l'ordinateur est autorisé pour cette sous-partie.
En Python la partie entière est la fonction `floor` importée de la bibliothèque `numpy`.

1.10. Expliciter les valeurs de

$$\lfloor\sqrt{3}\rfloor,\ \frac{\lfloor 10\sqrt{3}\rfloor}{10},\ \frac{\lfloor 10^2\sqrt{3}\rfloor}{10^2},\ \frac{\lfloor 10^3\sqrt{3}\rfloor}{10^3},\ \frac{\lfloor 10^4\sqrt{3}\rfloor}{10^4}.$$

On obtient respectivement

$$\boxed{1,\ 1.7,\ 1.73,\ 1.732,\ 1.7320}$$

1.11. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{\lfloor 10^n x\rfloor}{10^n} \leq x < \frac{\lfloor 10^n x\rfloor + 1}{10^n}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Par définition de la partie entière

$$\lfloor 10^n x\rfloor \leq 10^n x < \lfloor 10^n x\rfloor + 1$$

et comme $10^n > 0$ on en déduit

$$\boxed{\frac{\lfloor 10^n x\rfloor}{10^n} \leq x < \frac{\lfloor 10^n x\rfloor + 1}{10^n}}$$

Soit $x \in \mathbb{R}$ un réel.

1.12. Montrer que la suite $\left(\frac{\lfloor 10^n x\rfloor}{10^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\lfloor 10^n x\rfloor}{10^n} = x.$$

De la question précédente on déduit (on de la question **1.7.**) que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{x - \frac{1}{10^n} < \frac{\lfloor 10^n x\rfloor}{10^n} \leq x}$$

or comme $10 > 1$, on a $\frac{1}{10^n} \to 0$ quand $n \to +\infty$.
Par théorème de comparaison (théorème des gendarmes) on en déduit

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{\lfloor 10^n x\rfloor}{10^n} = x}.$$

1.13. Commenter l'appellation d'«approximation décimale par défaut de x» pour la suite $\left(\frac{\lfloor 10^n x\rfloor}{10^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

- La suite est appelée **approximation décimale** de x car il s'agit d'une suite de nombre décimaux convergeant vers x.
- On parle d'approximation **par défaut** car tous les termes sont inférieurs à x.