Quelques matrices remarquables

On portera une attention particulière à **la rédaction** et à **la propreté** de la copie.
En particulier tout **graphe ou schéma** pertinent et correctement annoté sera **valorisé**.
Les résultats devront être mis en valeur dès que possible.

Indiquez sur votre copie le temps approximatif pris pour le devoir.

Contexte

Pour ce DM il vous est demandé de travailler par trois.
Ce devoir est une introduction à plusieurs matrices remarquables qui seront rencontrées plus tard dans l'année.
Les parties sont indépendantes entre elles.

$$\begin{pmatrix} * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ * & \cdots & * \end{pmatrix}$$

1 Nombres complexes

On note

$$\widetilde{\mathbb{C}} = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix},\ (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

1.1. Montrer que $\widetilde{\mathbb{C}}$ est un sous-anneau de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$.
1.2. Montrer que $\widetilde{\mathbb{C}}$ est un corps.
1.3. Commenter et interpréter le déterminant, la transposée et la trace.

2 Bloc de Jordan

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\lambda \in \mathbb{C}^*$ on définit la matrice $J_n(\lambda) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ par

$$J_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & (0) \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots \\ & (0) & & & \lambda & 1 \\ & & & & & \lambda \end{pmatrix}$$

c'est à dire la matrice avec λ sur la diagonale, 1 sur la sur-diagonale et 0 pour tous les autres coefficients.
2.1. Calculer pour tout $k \in \mathbb{N}$ une expression de $(J_n(\lambda))^k$.
2.2. Montrer que $J_n(\lambda)$ est inversible ssi $\lambda \neq 0$.
Dans ce cas, calculer $(J_n(\lambda))^{-1}$.

3 Matrice de Pascal

Notation: Dans cet exercice les indices des lignes et des colonnes commencent à 0 !
Soit $n \in \mathbb{N}$.
Pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$ on note $T_n(\alpha) \in M_{n+1}(\mathbb{C})$ la matrice définie par

$$\forall (i,j) \in [\![0,n]\!],\quad (T_n(\alpha))_{ij} = \binom{j}{i} \alpha^{j-i}.$$

(Par convention, si $i > j$ on posera $(T_n(\alpha))_{ij} = 0$ pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$.)
3.1. Expliciter $T_4(\alpha)$ pour $n = 4$ et $\alpha \in \mathbb{C}$. Expliciter $T_6(1)$ et commenter.
3.2. Montrer que $T_n(0) = I_n$.
3.3. Montrer que pour tous $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$,

$$T_n(\alpha) T_n(\beta) = T_n(\alpha + \beta).$$

3.4. En déduire que pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, $T_n(\alpha)$ est inversible et déterminer son inverse.

4 Matrice de Vandermonde

Soit $n \in \mathbb{N}$.
Soient $x_1, \dots, x_n$ des nombres complexes deux à deux distincts.
On définit la matrice V par

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!],\ (V)_{ij} = (x_i)^{j-1}$$

c'est à dire

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & {x_1}^2 & \cdots & {x_1}^{n-1} \\ 1 & x_2 & {x_2}^2 & \cdots & {x_2}^{n-1} \\ 1 & x_3 & {x_3}^2 & \cdots & {x_3}^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & {x_n}^2 & \cdots & {x_n}^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Montrer que V est inversible (on ne demande pas de déterminer l'inverse) de **deux** manières différentes.

5 Matrice compagnon

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $P = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k + X^n$ un polynôme de degré n et de coefficient dominant 1.
On définit la matrice compagnon de P par

$$\mathcal{C}_P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Montrer que pour tout polynôme Q non nul de degré strictement inférieur à n on a $Q(\mathcal{C}_P) \neq 0$ et que $P(\mathcal{C}_P) = 0$.