En cas d'erreur de corrigé, n'hésitez pas à me le signaler.

Contexte

Pour ce DM il vous est demandé de travailler par trois.
Ce devoir est une introduction à plusieurs matrices remarquables qui seront rencontrées plus tard dans l'année.
Les parties sont indépendantes entre elles.

$$\begin{pmatrix} * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ * & \cdots & * \end{pmatrix}$$

1 Nombres complexes

On note

$$\widetilde{\mathbb{C}} = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix},\ (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

1.1. Montrer que $\widetilde{\mathbb{C}}$ est un sous-anneau de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$.

- On a $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \widetilde{\mathbb{C}}$.
  D'où l'appartenance de l'unité.
- Soit $Z \in \widetilde{\mathbb{C}}$.
  Il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $Z = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.
  Alors $-Z = \begin{pmatrix} (-a) & -(-b) \\ (-b) & (-a) \end{pmatrix} \in \widetilde{\mathbb{C}}$. D'où la la stabilité par opposé.
- Soient $Z_1, Z_2 \in \widetilde{\mathbb{C}}$.
  Il existe $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R}$ tels que $Z_1 = \begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix}$ et $Z_2 = \begin{pmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix}$.
  Alors
  $$Z_1 + Z_2 = \begin{pmatrix} (a_1+a_2) & -(b_1+b_2) \\ (b_1+b_2) & (a_1+a_2) \end{pmatrix} \in \widetilde{\mathbb{C}}.$$
  D'où la stabilité par somme.
  Et de plus
  $$Z_1 Z_2 = \begin{pmatrix} (a_1a_2 - b_1b_2) & -(a_1b_2 + a_2b_1) \\ (a_1b_2 + a_2b_1) & (a_1a_2 - b_1b_2) \end{pmatrix} \in \widetilde{\mathbb{C}}.$$
  D'où la stabilité par produit.

Ainsi $\boxed{\widetilde{\mathbb{C}} \text{ est un sous-anneau de } \mathrm{M}_2(\mathbb{R})}$.

1.2. Montrer que $\widetilde{\mathbb{C}}$ est un corps.

Il reste à montrer que $\widetilde{\mathbb{C}}$ est commutatif et que tout élément non nul est inversible.

- Soient $Z_1, Z_2 \in \widetilde{\mathbb{C}}$.
  Il existe $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R}$ tels que $Z_1 = \begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix}$ et $Z_2 = \begin{pmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix}$.
  Alors
  $$Z_1 Z_2 = \begin{pmatrix} (a_1a_2 - b_1b_2) & -(a_1b_2 + a_2b_1) \\ (a_1b_2 + a_2b_1) & (a_1a_2 - b_1b_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a_2a_1 - b_2b_1) & -(a_2b_1 + a_1b_2) \\ (a_2b_1 + a_1b_2) & (a_2a_1 - b_2b_1) \end{pmatrix} = Z_2 Z_1.$$
  D'où la commutativité.
- Soit $Z \in \widetilde{\mathbb{C}}$ non nul. Alors il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $Z = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$. Comme $Z \neq 0_2$ on a $(a,b) \neq (0,0)$ et donc (somme d'éléments positifs non tous nuls) $a^2 + b^2 \neq 0$.
  On constate que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & 0 \\ 0 & a^2+b^2 \end{pmatrix}.$$

Et donc

$$\begin{pmatrix} \frac{a}{a^2+b^2} & -\frac{b}{a^2+b^2} \\ \frac{b}{a^2+b^2} & \frac{a}{a^2+b^2} \end{pmatrix} Z = I_2$$

et comme $\begin{pmatrix} \frac{a}{a^2+b^2} & -\frac{b}{a^2+b^2} \\ \frac{b}{a^2+b^2} & \frac{a}{a^2+b^2} \end{pmatrix} \in \widetilde{\mathbb{C}}$ on a que Z est inversible à gauche et donc par commutativité $\underline{Z \text{ est inversible}}$.

Remarque: on reconnaît ici la construction de l'inverse de $z \neq 0$ par $\frac{1}{|z|^2}\overline{z}$.

D'où $\boxed{\widetilde{\mathbb{C}} \text{ est un corps}}$.

1.3. Commenter et interpréter le déterminant, la transposée et la trace.

On observe qu'il s'agit d'une construction possible des $\boxed{\text{nombres complexes}}$ $\mathbb{C}$.

En effet en notant $1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $i = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ on a que $\widetilde{\mathbb{C}} = \{a+bi, (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$ avec les règles de calculs sur un anneau commutatif et $i^2 = -1$.

On peut interpréter sous cet angle:

- Le **déterminant** a^2+b^2 comme le **module au carré**.
- La **transposée** comme le **conjugué**.
- La **trace** $2a$ comme la **deux fois la partie réelle**.

2 Bloc de Jordan

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\lambda \in \mathbb{C}^*$ on définit la matrice $J_n(\lambda) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ par

$$J_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & (0) \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & (0) & & & \lambda \end{pmatrix}$$

c'est à dire la matrice avec λ sur la diagonale, 1 sur la sur-diagonale et 0 pour tous les autres coefficients.

2.1. Calculer pour tout $k \in \mathbb{N}$ une expression de $(J_n(\lambda))^k$.

Posons

$$N = J_n(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & (0) \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & (0) & & & 0 \end{pmatrix}.$$

On a pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]$,

$$(N)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i+1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = \delta_{i+1=j}.$$

Montrons par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ que

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ (N^k)_{ij} = \delta_{i+k=j}.$$

Autrement dit si $k \in [\![0,n]\!]$,

$$N^k = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

où tous les coefficients sont nuls sauf les 1 sur la k-ième sur-diagonale, et si $k > n$, $N^k = 0_n$.
Autrement dit

- **Initilisation**: pour $k = 0$ on a $N^0 = I_n$ et on a bien

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ (N^0)_{ij} = \delta_{i=j}.$$

- **Hérédité**: Soit $k\mathbb{N}$.
  Supposons que pour tous $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $(N^k)_{ij} = \delta_{i+k=j}$.
  Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$.
  On a

$$\begin{aligned} (N^{k+1})_{ij} &= (N^k N)_{ij} \\ &= \sum_{l=1}^{n} (N^k)_{il} N_{lj} \\ &= \sum_{l=1}^{n} \delta_{i+k=l} \delta_{l+1=j} \\ &= \delta_{i+k+1=j} \end{aligned}.$$

  D'où le résultat au range $k+1$.
- **Conclusion**: par récurrence on a bien pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ (N^k)_{ij} = \delta_{i+k=j}.$$

Ensuite comme λI_n et N **commutent**, par formule du binôme on a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(\lambda I_n + N)^k = \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} (\lambda I_n)^{k-l} N^l$$

On en déduit que pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$,

$$\begin{aligned} (J_n(\lambda)^k)_{i,j} &= \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} \lambda^{k-l} \delta_{i+l=j} \\ &= \delta_{j \geq i} \binom{k}{j-i} \lambda^{k-(j-i)} \end{aligned}$$

avec la convention que $\binom{k}{l} = 0$ si $l > k$.
Ainsi

$$\boxed{\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ (J_n(\lambda)^k)_{i,j} = \delta_{j \geq i} \binom{k}{j-i} \lambda^{k-(j-i)}}.$$

Ce qui peut s'écrire

$$J_\lambda(n)^k = \begin{pmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-1} & \frac{k(k-1)}{2}\lambda^{k-2} & \cdots & \binom{k}{l}\lambda^{k-l} & \cdots & \cdots \\ 0 & \lambda^k & k\lambda^{k-1} & \cdots & \cdots & \binom{k}{l}\lambda^{k-l} & \cdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \lambda^k & k\lambda^{k-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \lambda^k \end{pmatrix}.$$

2.2. Montrer que $J_n(\lambda)$ est inversible ssi $\lambda \neq 0$.
Dans ce cas, calculer $(J_n(\lambda))^{-1}$.

On a $J_n(\lambda)$ est une matrice triangulaire dont les coefficients diagonaux sont tous égaux à λ.
D'où $\boxed{J_n(\lambda) \text{ est inversible ssi } \lambda \neq 0}$.
Si $\lambda \neq 0$ on a alors

$$(\lambda I_n + N)^{-1} = \lambda^{-1}(I_n - (-\lambda^{-1}N))^{-1}$$

De plus on a vu avec les notations précédentes que N est nilpotente et $N^{n+1} = 0_n$, d'où $\lambda^{-1}N$ est nilpotente et $(\lambda^{-1}N)^{n+1} = 0_n$.
Par formule de Bernoulli, comme I_n et $\lambda^{-1}N$ **commutent**,

$$\begin{aligned} I_n &= (I_n^{n+1} - (-\lambda^{-1}N)^{n+1}) \\ &= (I_n - (-\lambda^{-1}N)) \sum_{k=0}^{n} (-\lambda^{-1}N)^k I_n^{n-k} \\ &= (I_n - (-\lambda^{-1}N)) \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \lambda^{-k} N^k \end{aligned}$$

et de même à gauche.
Par conséquent

$$\boxed{(\lambda I_n + N)^{-1} = \lambda^{-1} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \lambda^{-k} N^k}.$$

Ce qui peut s'écrire

$$J_\lambda(n)^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda^{-1} & -\lambda^{-2} & \lambda^{-3} & \cdots & (-1)^{n-1}\lambda^{-n} \\ 0 & \lambda^{-1} & -\lambda^{-2} & \cdots & (-1)^{n-2}\lambda^{-(n-1)} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \lambda^{-1} \end{pmatrix}.$$

3 Matrice de Pascal

Notation: Dans cet exercice les indices des lignes et des colonnes commencent à 0 !
Soit $n \in \mathbb{N}$.
Pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$ on note $T_n(\alpha) \in M_{n+1}(\mathbb{C})$ la matrice définie par

$$\forall (i,j) \in [\![0,n]\!], \quad (T_n(\alpha))_{ij} = \binom{j}{i} \alpha^{j-i}.$$

(Par convention, si $i > j$ on posera $(T_n(\alpha))_{ij} = 0$ pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$.)
3.1. Expliciter $T_4(\alpha)$ pour $n = 4$ et $\alpha \in \mathbb{C}$. Expliciter $T_6(1)$ et commenter.

On a

$$\boxed{T_4(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 & \alpha^3 & \alpha^4 \\ 0 & 1 & 2\alpha & 3\alpha^2 & 4\alpha^3 \\ 0 & 0 & 1 & 3\alpha & 6\alpha^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}.$$

De même

$$\boxed{T_6(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 & 10 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 10 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}.$$

Il s'agit d'une matrice dont la transposée est le $\boxed{triangle de Pascal}$.

3.2. Montrer que $T_n(0) = I_n$.

On a pour tout $(i,j) \in [\![0,n]\!]^2$, si $i > j$ alors $\binom{j}{i} = 0$ et si $i < j$ alors $0^{j-i} = 0$.
Et si $i = j$ alors $\binom{j}{i} 0^{j-i} = 1$.

D'où

$$\boxed{T_n(0) = I_n}.$$

3.3. Montrer que pour tous $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$,

$$T_n(\alpha)T_n(\beta) = T_n(\alpha + \beta).$$

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.
Soit $(i, j) \in [\![0, n]\!]$.
On a

$$\begin{aligned}(T_n(\alpha)T_n(\beta))_{ij} &= \sum_{k=0}^{n}(T_n(\alpha))_{ik}(T_n(\beta))_{kj} \\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{k}{i}\alpha^{k-i}\binom{j}{k}\beta^{j-k}\end{aligned}$$

Par formule des capitaines on a de plus pour tout $k \in [\![0, n]\!]$,

$$\binom{k}{i}\binom{j}{k} = \binom{j}{i}\binom{j-i}{k-i}.$$

(Cf cours sur les coefficients binomiaux).
Ainsi, avec le changement d'indice $l = k - i$

$$\begin{aligned}(T_n(\alpha)T_n(\beta))_{ij} &= \sum_{k=0}^{n}\binom{j}{i}\binom{j-i}{k-i}\alpha^{k-i}\beta^{j-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{j}{i}\binom{j-i}{k-i}\alpha^{k-i}\beta^{j-k} \\ &= \binom{j}{i}\sum_{k=0}^{n}\binom{j-i}{k-i}\alpha^{k-i}\beta^{j-k} \\ &= \binom{j}{i}\sum_{l=0}^{j-i}\binom{j-i}{l}\alpha^{l}\beta^{j-i-l} \\ &= \binom{j}{i}(\alpha+\beta)^{j-i} \\ &= (T_n(\alpha+\beta))_{ij}.\end{aligned}$$

Et donc

$$\boxed{T_n(\alpha)T_n(\beta) = T_n(\alpha + \beta)}.$$

3.4. En déduire que pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, $T_n(\alpha)$ est inversible et déterminer son inverse.

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$.
On a par la question précédente $T_n(\alpha)T_n(-\alpha) = T_n(\alpha + (-\alpha)) = T_n(0) = I_n$.
Donc $\boxed{T_n(\alpha) \text{ est inversible et son inverse est } T_n(-\alpha)}$.
Remarques

- On a en fait montré que

$$\begin{aligned}\mathbb{C} &\to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \\ \alpha &\mapsto T_n(\alpha)\end{aligned}$$

  est un morphisme de groupe.
- On en déduit les formules d'inversion de Pascal (avec une transposée)
  Soient $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ et $(b_0, \ldots, b_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$.
  ▷ **Première formule d'inversion de Pascal**

$$\left(\forall i \in [\![0, n]\!],\ a_i = \sum_{j=0}^{n}\binom{i}{j}b_j\right) \Leftrightarrow \left(\forall i \in [\![0, n]\!],\ b_i = \sum_{j=0}^{n}(-1)^{j-i}\binom{i}{j}a_j\right)$$

  ▷ **Seconde formule d'inversion de Pascal**

$$\left(\forall i \in [\![0,n]\!],\ a_i = \sum_{j=0}^{n} \binom{j}{i} b_j\right) \Leftrightarrow \left(\forall i \in [\![0,n]\!],\ b_i = \sum_{j=0}^{n} (-1)^{j-i} \binom{j}{i} a_j\right)$$

4 Matrice de Vandermonde

Soit $n \in \mathbb{N}$.
Soient $x_1, \dots, x_n$ des nombres complexes deux à deux distincts.
On définit la matrice V par

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!],\ (V)_{ij} = (x_i)^{j-1}$$

c'est à dire

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & {x_1}^2 & \cdots & {x_1}^{n-1} \\ 1 & x_2 & {x_2}^2 & \cdots & {x_2}^{n-1} \\ 1 & x_3 & {x_3}^2 & \cdots & {x_3}^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & {x_n}^2 & \cdots & {x_n}^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Montrer que V est inversible (on ne demande pas de déterminer l'inverse) de **deux** manières différentes.

- **Première méthode**: par noyau.
  Soit $X \in \mathrm{Ker}(V)$.
  Avec

  $$X = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \vdots & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

  on a

  $$AX = 0_n$$

  c'est à dire

  $$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

  ce qui s'écrit

  $$\begin{pmatrix} a_0 + a_1 x_1 + \cdots + a_{n-1} x_1^{n-1} \\ a_0 + a_1 x_2 + \cdots + a_{n-1} x_2^{n-1} \\ \vdots \\ a_0 + a_1 x_n + \cdots + a_{n-1} x_n^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

  ou encore

  $$\forall i \in [\![1,n]\!],\ \sum_{j=0}^{n-1} a_j x^j = 0.$$

  Avec

  $$P = \sum_{j=0}^{n-1} a_j X^j$$

  on a donc

  $$\forall i \in [\![1,n]\!],\ P(x_i) = 0.$$

  Par conséquent P est un polynôme de degré strictement inférieur à n ayant n racines distinctes, donc $P = 0$.
  Donc $\forall j \in [\![0, n-1]\!],\ a_j = 0$, i.e $X = 0_n$.
  Donc $\mathrm{Ker}(V) = \{0_n\}$ et donc $\boxed{V \text{ est inversible}}$.
- **Deuxième méthode**: Par image (cette méthode repose en fait sur les polynômes d'interpolation de Lagrange qui seront vus plus tard dans l'année).
  Soit $Y \in \mathbb{R}^n$.

Avec $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, pour tout $X = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ on a

$$AX = Y$$

ssi (même calcul)

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ \sum_{j=0}^{n-1} a_j x_i^j = y_i.$$

Posons pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,

$$L_i = \prod_{j \neq i} \frac{X - x_j}{x_i - x_j}.$$

On constate que pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$, $L_i(x_j) = \delta_{ij}$.
D'où avec

$$P = \sum_{i=1}^{n} y_i L_i$$

on a P de degré strictement inférieur à n.
En notant $P = \sum_{j=0}^{n-1} a_j X^j$ on a alors

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ \sum_{j=0}^{n-1} a_j x_i^j = P(x_i) = \sum_{j=1}^{n} \delta_{ij} y_j = y_i.$$

Et donc $AX = Y$.
D'où V est surjective et donc $\boxed{V \text{ est inversible}}$.

- **Troisième méthode**: Par pivot sur les colonnes.
Soient $a_0, \ldots, a_{n-2} \in \mathbb{C}$.
En effectuant les opérations élémentaires

$$\forall j \in [\![1, n-1]\!],\ C_n \leftarrow C_n + a_j C_j$$

on obtient que V est équivalente par colonnes à

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-2} & x_1^{n-1} + \sum_{j=0}^{n-2} a_j x^j \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-2} & x_2^{n-1} + \sum_{j=0}^{n-2} a_j x^j \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-2} & x_n^{n-1} + \sum_{j=0}^{n-2} a_j x^j \end{pmatrix}.$$

Donc pour tout polynôme P_{n-1} de degré $n-1$ et unitaire, c'est à dire s'écrivant

$$P_{n-1} = X^{n-1} + \sum_{j=0}^{n-2} a_j X^j$$

on a V équivalent par colonnes à

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-2} & P_{n-1}(x_1) \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-2} & P_{n-1}(x_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-2} & P_{n-1}(x_n) \end{pmatrix}.$$

De même que précédemment, avec $P_{n-2} = X^{n-2} + \sum_{j=0}^{n-3} b_j X^j$ un polynôme unitaire de degré $n-2$, en effectuant $\forall j \in [\![1, n-2]\!],\ C_{n-1} \leftarrow C_{n-1} + b_j C_j$ on obtient que V est équivalente par colonnes à

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-3} & P_{n-2}(x_1) & P_{n-1}(x_1) \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-3} & P_{n-2}(x_2) & P_{n-1}(x_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-3} & P_{n-2}(x_n) & P_{n-1}(x_n) \end{pmatrix}.$$

Et en faisant de même pour P_{n-3}, P_{n-4}, etc. on obtient que:
Pour toute famille $(P_0, P_1, \ldots, P_{n-1})$ de polynômes unitaires vérifiant pour tout $j \in [\![0, n-1]\!]$, $\deg(P_j) = j$ on a V est équivalent par colonne à

$$\begin{pmatrix} P_0(x_1) & P_1(x_1) & \cdots & P_{n-1}(x_1) \\ P_0(x_2) & P_1(x_2) & \cdots & P_{n-1}(x_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ P_0(x_n) & P_1(x_n) & \cdots & P_{n-1}(x_n) \end{pmatrix}.$$

Il suffit ensuite de poser pour tout $j \in [\![0, n-1]\!]$,

$$P_j = \prod_{i=1}^{j}(X - x_i)$$

qui est bien unitaire de degré j, pour obtenir que V est équivalent par colonnes à une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ * & (x_2 - x_1) & \cdots & \cdots & 0 & \\ * & * & (x_3 - x_1)(x_3 - x_2) & \cdots & 0 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ * & * & * & \cdots & \prod_{i=1}^{n-1}(x_n - x_i) & \end{pmatrix}$$

qui est une matrice triangulaire (inférieure) de coefficients diagonaux non nuls, donc $\boxed{V \text{ est inversible}}$.

- **Quatrième méthode**: Par pivot sur les lignes (et par colonnes) et récurrence.
Pour $n \in \mathbb{N}$ notons $\mathcal{P}_n$ l'hypothèse de récurrence:
« Pour tous réels $x_1, \ldots, x_n$ deux à deux distincts $V(x_1, \ldots, x_n) = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & {x_1}^2 & \cdots & {x_1}^{n-1} \\ 1 & x_2 & {x_2}^2 & \cdots & {x_2}^{n-1} \\ 1 & x_3 & {x_3}^2 & \cdots & {x_3}^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & {x_n}^2 & \cdots & {x_n}^{n-1} \end{pmatrix}$ est inversible».
  - ▶ **Initialisation** Pour $n = 1$, on a bien pour tout réel x_1, la matrice (1) est inversible.
  - ▶ **Hérédité** Soit $n \in \mathbb{N}$ tq $n \geq 2$. Supposons $\mathcal{P}_{n-1}$.
  Soient $x_1, \ldots, x_n$ deux à deux distincts et

$$V = V(x_1, \ldots, x_n) = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & {x_1}^2 & \cdots & {x_1}^{n-1} \\ 1 & x_2 & {x_2}^2 & \cdots & {x_2}^{n-1} \\ 1 & x_3 & {x_3}^2 & \cdots & {x_3}^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & {x_n}^2 & \cdots & {x_n}^{n-1} \end{pmatrix}.$$

  En effectuant les opérations élémentaires

$$\forall i \in [\![2, n]\!] L_i \leftarrow L_i - L_1$$

  on obtient que V est équivalente par ligne à

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & {x_1}^2 & \cdots & {x_1}^{n-1} \\ 0 & x_2 - x_1 & {x_2}^2 - {x_1}^2 & \cdots & {x_2}^{n-1} - {x_1}^{n-1} \\ 0 & x_3 - x_1 & {x_3}^2 - {x_1}^2 & \cdots & {x_3}^{n-1} - {x_1}^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & x_n - x_1 & {x_n}^2 - {x_1}^2 & \cdots & {x_n}^{n-1} - {x_1}^{n-1} \end{pmatrix}$$

  En effectuant les dilatations

$$\forall i \in [\![2, n]\!] L_i \leftarrow \frac{1}{x_i - x_1} L_i$$

  par la formule de Bernoulli on obtient que V est équivalente par ligne à

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & {x_1}^2 & \cdots & {x_1}^{n-1} \\ 0 & 1 & x_2 + x_1 & \cdots & \sum_{k=0}^{n-2} x_2^k x_1^{n-2-k} \\ 0 & 1 & x_3 + x_1 & \cdots & \sum_{k=0}^{n-2} x_3^k x_1^{n-2-k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 1 & x_n + x_1 & \cdots & \sum_{k=0}^{n-2} x_n^k x_1^{n-2-k} \end{pmatrix}$$

  On effectue la transvection par colonne

$$C_3 \leftarrow C_3 - x_1 C_2$$

  on obtient que V est équivalente par lignes et colonnes à

$$\begin{pmatrix} 1 & * & * & * & \cdots & * \\ 0 & 1 & x_2 & x_1^2+x_1x_2+x_2^2\cdots & \sum_{k=0}^{n-2} x_2^k x_1^{n-2-k} & \\ 0 & 1 & x_3 & x_1^2+x_1x_3+x_3^2 & \cdots & \sum_{k=0}^{n-2} x_3^k x_1^{n-2-k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 1 & x_n & x_1+x_nx_1+x_n^2\cdots & \sum_{k=0}^{n-2} x_n^k x_1^{n-2-k} & \end{pmatrix}$$

on effectue ensuite

$$C_4 \leftarrow C_4 - x_1C_3 - x_1^2C_2$$

on obtient que V est équivalente par lignes et colonnes à

$$\begin{pmatrix} 1 & * & * & * & \cdots & * \\ 0 & 1 & x_2 & {x_2}^2 & \cdots & \sum_{k=0}^{n-2} x_2^k x_1^{n-2-k} \\ 0 & 1 & x_3 & {x_3}^2 & \cdots & \sum_{k=0}^{n-2} x_3^k x_1^{n-2-k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 1 & x_n & {x_n}^2 & \cdots & \sum_{k=0}^{n-2} x_n^k x_1^{n-2-k} \end{pmatrix}$$

et en continuant on a donc V équivalente par ligne et par colonne à la matrice par blocs

$$\widetilde{V} = \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & V(x_2,\dots,x_n) \end{pmatrix}.$$

Or par hypothèse de récurrence $V(x_2,\dots,x_n)$ est inversible car $x_2,\dots,x_n$ deux à deux distincts, d'où $\widetilde{V}$ est inversible (car d'inverse par blocs $\begin{pmatrix} 1 & -LV(x_2,\dots,x_n)^{-1} \\ 0 & V(x_2,\dots,x_n)^{-1} \end{pmatrix}$) et donc V est inversible.

- ▶ **Conclusion** Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $x_1,\dots,x_n$ sont deux à deux distincts, alors $\boxed{V(x_1,\dots,x_n) \text{ est inversible}}$.

- **Autres méthodes**: on verra plus tard dans l'année d'autres preuves que V est inversible, par exemple par son calcul de déterminant (plusieurs preuves possibles ici), par étude de l'application eval : $\begin{array}{c} \mathbb{C}[X] \to \mathbb{C}^n \\ P \mapsto (P(x_1),\dots,P(x_n)) \end{array}$, par des choix de base de $C_n[X]$.

5 Matrice compagnon

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $P = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k + X^n$ un polynôme de degré n et de coefficient dominant 1.
On définit la matrice compagnon de P par

$$\mathcal{C}_P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Montrer que pour tout polynôme Q non nul de degré strictement inférieur à n on a $Q(\mathcal{C}_P) \neq 0$ et que $P(\mathcal{C}_P) = 0$.

Notons pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, $E_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ où le 1 est en position j.

On rappelle que pour toute matrice $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, AE_j est la j-ème colonne de A.
On a par produit matriciel (produit d'une matrice par un vecteur de la base canonique)

$$\forall j \in [\![1,n-1]\!],\ \mathcal{C}_P E_j = E_{j+1}$$

et

$$\mathcal{C}_P E_n = \sum_{i=1}^{n} -a_{i-1}E_i.$$

Par récurrence finie sur k on obtient donc

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ \mathcal{C}_P^k E_1 = E_{k+1}.$$

- **Initialisation**: on a $I_n E_1 = E_{1+0}$.
- **Hérédité**: soit $k \in [\![0, n-2]\!]$ et supposons que $\mathcal{C}_P^k E_1 = E_{k+1}$.
  Alors
  $$\mathcal{C}_P^{k+1} E_1 = \mathcal{C}_P \mathcal{C}_P^k E_1 = \mathcal{C}_P E_{k+1} = E_{k+2}.$$
- **Conclusion**: par récurrence finie
  $$\boxed{\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ \mathcal{C}_P^k E_1 = E_{k+1}}.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} P(\mathcal{C}_P)E_1 &= \mathcal{C}_P^n E_1 + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \mathcal{C}_P^k E_1 \\ &= -\sum_{i=0}^{n-1} a_i E_{i+1} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k E_{k+1} \\ &= 0_n. \end{aligned}$$

Et pour $j \in [\![1, n]\!]$

$$P(\mathcal{C}_P)E_j = P(\mathcal{C}_P)\mathcal{C}_P^{j-1} E_1 = \mathcal{C}_P^{j-1} P(\mathcal{C}_P) E_1 = \mathcal{C}_P^{j-1} 0_n = 0_n.$$

Comme toutes les colonnes de $P(\mathcal{C}_P)$ sont nulles, on a $\boxed{P(\mathcal{C}_P) = 0_n}$.
Montrons en fait le résultat suivant plus fort que l'énoncé:
Pour tout polynôme $T \in \mathbb{K}[X]$, $T(\mathcal{C}_P) = 0_n$ ssi P divise T (c'est à dire il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tq $T = PQ$).
Soit $T \in \mathbb{K}[X]$

- $\boxed{\Leftarrow}$ Supposons P divise T.
  Alors il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $T = PQ$.
  D'où $T(\mathcal{C}_P) = \underbrace{P(\mathcal{C}_P)}_{0_{n,n}} Q(\mathcal{C}_P) = 0_{n,n}$ et donc $\boxed{T \text{ annule } \mathcal{C}_P.}$
- $\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que T annule $\mathcal{C}_P$.
  Soient Q, R le quotient et le reste de la division euclidienne de T par P.
  Alors $T = PQ + R$ et $R \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$.
  En particulier $T(\mathcal{C}_P) = P(\mathcal{C}_P)Q(\mathcal{C}_P) + R(\mathcal{C}_P)$ et comme P et T annulent $\mathcal{C}_P$ on en déduit
  $$R(\mathcal{C}_P) = 0_{n,n}.$$
  Avec $R = \sum_{k=0}^{n-1} r_k X^k \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ on a donc
  $$\sum_{k=0}^{n-1} r_k \mathcal{C}_P^k = 0_{n,n}$$
  et en particulier
  $$\sum_{k=0}^{n-1} r_k \mathcal{C}_P^k E_1 = 0_n$$
  c'est à dire
  $$\sum_{k=0}^{n-1} r_k E_{k+1} = 0_n.$$
  D'où (en considérant chaque coordonnées)
  $$\forall j \in [\![1, n]\!],\ r_{j-1} = 0.$$
  Donc $R = 0$.
  Le reste étant nul on a bien $\boxed{P \text{ divise } T}$.

En particulier on a

$$\boxed{\forall T \in \mathbb{K}[X], (T \neq 0 \text{ et } \deg(T) < n) \Rightarrow T(\mathcal{C}_P) \neq 0_n}.$$