Exemple de matrices compagnon

On portera une attention particulière à **la rédaction** et à **la propreté** de la copie.
En particulier tout **graphe ou schéma** pertinent et correctement annoté sera **valorisé**.
Les résultats devront être mis en valeur dès que possible.

Indiquez sur votre copie le temps approximatif pris pour le devoir.

Contexte et notations

Dans la suite du sujet $\mathbb{K}$ est un corps.

Contexte

L'objectif de ce problème est d'introduire à certaines matrices particulières, les "matrices compagnons" et d'étudier certaines de leurs nombreuses propriétés.

Rappels et vocabulaire sur les polynômes

- Étant donnés deux polynômes $A, B \in \mathbb{K}[X]$, on dit que B divise A ssi il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $A = BQ$.
- On admet que pour tous $A, B \in \mathbb{K}[X], B \neq 0$ il existe un et unique couple $(Q, R) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]$ tel que

$$\begin{aligned} A &= BQ + R \\ \deg(R) &< \deg(B). \end{aligned}$$

  On dit alors que Q et R sont respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de A par B. En particulier B divise A ssi $R = 0$.
- Un polynôme P de degré $n \in \mathbb{N}$ (et et de coefficient dominant $\alpha \neq 0$) est dit scindé à racines simples ssi il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ deux à deux distincts tels que $P = \alpha \prod_{k=1}^{n} (X - \lambda_k)$.
  Autrement dit ssi P admet exactement autant de racines distinctes que son degré.
- Enfin un polynôme non nul est dit unitaire ssi son coefficient dominant est 1.

Notations

- Soit $n \in \mathbb{N}$ et $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1 X + a_0 \in \mathbb{K}_n[X]$ un polynôme unitaire.
  On appelle matrice compagnon de P, notée $\mathcal{C}_P$ la matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ définie par

$$\mathcal{C}_P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

- Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et $u \in \mathcal{L}(E)$.
  On dit que u est cyclique ssi il existe $x \in E$ tel que $(x, u(x), \ldots, u^{n-1}(x))$ est une base de E.
- À $n \in \mathbb{N}$ fixé, on notera $(E_1, \ldots, E_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$.
- Pour $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ et $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ on note $P(A) = \sum_{k=0}^{n} a_k A^k \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ dit que P annule A ssi $P(A) = 0_n$.
- Une matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ est dite diagonalisable ssi elle est semblable à une matrice diagonale.

1. Matrices compagnons

1.I. Matrice compagnons et endomorphismes cycliques

Soit $n \in \mathbb{N}$ et E un espace vectoriel de dimension n.

1.1. Soit P un polynôme unitaire de $\mathbb{K}_n[X]$.
Déterminer pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$ la valeur ${\mathcal{C}_P}^k E_1$.

1.2. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que u est cyclique et on fixe $x \in E$ tel que $\mathcal{B}_x = (x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ est une base de E.
Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_x}(u)$.

1.3. Conclure qu'un endomorphisme est cyclique **ssi** il existe une base dans laquelle sa matrice est la matrice compagnon d'un polynôme (unitaire).

1.II. Matrices compagnons et polynômes

Soit $n \in \mathbb{N}$, $P = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ un polynôme unitaire de $\mathbb{K}_n[X]$ et $\mathcal{C}_P$ sa matrice compagnon.

1.4. Montrer que la famille $(I_n, \mathcal{C}_P, \dots, {\mathcal{C}_P}^{n-1})$ est libre.

1.5. Montrer que $P(\mathcal{C}_P) = 0$.

1.6. Conclure qu'un polynôme $T \in \mathbb{K}[X]$ annule $\mathcal{C}_P$ ssi P divise T.

1.7. En déduire qu'en particulier le polynôme de la question **1.3.** est unique.

1.III. Matrice compagnon et diagonalisabilité

Soit $n \in \mathbb{N}$, $P = X^n + \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme unitaire de $\mathbb{K}_n[X]$ et $\mathcal{C}_P$ sa matrice compagnon.

1.8. Montrer que si deux matrices sont semblables alors tout polynôme annulant l'un annule l'autre.

1.9. On suppose que $\mathcal{C}_P$ est diagonalisable.
Montrer que P est scindé à racines simples.

On suppose désormais que P est scindé à racines simples, on note $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ ses racines (deux à deux distinctes) et on cherche on cherche à démontrer que $\mathcal{C}_P$ est diagonalisable.
On note $T \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^{\mathbb{N}})$ l'opérateur de translation défini par

$$T : \begin{array}{c} \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \\ (u_k)_{k\in\mathbb{N}} \mapsto (u_{k+1})_{k\in\mathbb{N}} \end{array}.$$

On considère $\mathcal{S}$ l'ensemble des suites vérifiant la relation de récurrence linéaire de polynôme caractéristique P, c'est à dire

$$\mathcal{S} = \left\{ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \middle| \forall k \in \mathbb{N}, u_{k+n} = -a_{n-1}u_{k+(n-1)} - \cdots - a_1 u_{k+1} - a_0 u_k \right\}$$

1.10. Montrer que $\mathcal{S}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

1.11. Pour tout $j \in [\![1, n]\!]$ on note c_j la suite définie par

$$\forall i \in [\![0, n-1]\!], (c_j)_i = \delta_{i,j-1} \qquad \text{(condition initiale)}$$

$$\forall k \in \mathbb{N}, (c_j)_{k+n} = -\sum_{i=0}^{n-1} a_i (c_j)_{k+i} \qquad \text{(relation de récurrence)}$$

Montrer que $\mathcal{C} = (c_1, \dots, c_n)$ est une base de $\mathcal{S}$.

1.12. Pour tout $j \in [\![1, n]\!]$ on note $g_j = ({\lambda_j}^k)_{k\in\mathbb{N}}$.
Montrer que $\mathcal{G} = (g_1, \dots, g_n)$ est une base de $\mathcal{S}$.
Indication: on pourra faire intervenir une matrice de Vandermonde ou méthode proche.

1.13. Montrer que $\mathcal{S}$ est stable par T. On note $T_{\mathcal{S}}$ l'endomorphisme induit par T sur $\mathcal{S}$.

1.14. Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(T_{\mathcal{S}})$.

1.15. Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{G}}(T_{\mathcal{S}})$.

1.16. Conclure.

1.IV. Matrice compagnon et transposée

Soit $n \in \mathbb{N}$, $P = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ un polynôme unitaire de $\mathbb{K}_n[X]$ et $\mathcal{C}_P$ sa matrice compagnon.
Pour tout polynôme $A \in \mathbb{K}[X]$ on note $\pi_P(A)$ le reste de la division euclidienne de A par P.
On note

$$\widetilde{T} : \begin{array}{c} \mathbb{K}_{n-1}[X] \to \mathbb{K}_{n-1}[X] \\ A \mapsto \pi_P(XA) \end{array}$$

1.17. Montrer que $\widetilde{T}$ est bien définie et linéaire.

1.18. Soit $\mathcal{B} = (1, X, \dots, X^{n-1})$ la base canonique de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$.
Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\widetilde{T})$.

On définit par récurrence une suite de polynômes (dit polynômes de Horner associés à P) par

$$H_0 = 1$$
$$\forall j \in [\![0, n-2]\!],\ H_{j+1} = a_{n-j-1} + XH_j$$

On pose $\mathcal{H} = (H_0, \dots, H_{n-1})$ et $\check{\mathcal{H}} = (H_{n-1}, \dots, H_0)$.

1.19. Déterminer l'expression de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{H})$.
Donner sans justification l'expression de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\check{\mathcal{H}})$.

1.20. Montrer que $\check{\mathcal{H}}$ est une base de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$.

1.21. Déterminer $\mathrm{Mat}_{\check{\mathcal{H}}}(\widetilde{T})$.

1.22. Conclure que toute matrice compagnon est semblable à sa transposée.