En cas d'erreur de corrigé, n'hésitez pas à me le signaler.

Contexte et notations

Dans la suite du sujet $\mathbb{K}$ est un corps.

Contexte

L'objectif de ce problème est d'introduire à certaines matrices particulières, les "matrices compagnons" et d'étudier certaines de leurs nombreuses propriétés.

Rappels et vocabulaire sur les polynômes

- Étant donnés deux polynômes $A, B \in \mathbb{K}[X]$, on dit que B divise A ssi il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $A = BQ$.
- On admet que pour tous $A, B \in \mathbb{K}[X], B \neq 0$ il existe un et unique couple $(Q, R) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]$ tel que
$$A = BQ + R$$
$$\deg(R) < \deg(B).$$
On dit alors que Q et R sont respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de A par B. En particulier B divise A ssi $R = 0$.
- Un polynôme P de degré $n \in \mathbb{N}$ (et et de coefficient dominant $\alpha \neq 0$) est dit scindé à racines simples ssi il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ deux à deux distincts tels que $P = \alpha \prod_{k=1}^{n} (X - \lambda_k)$.
Autrement dit ssi P admet exactement autant de racines distinctes que son degré.
- Enfin un polynôme non nul est dit unitaire ssi son coefficient dominant est 1.

Notations

- Soit $n \in \mathbb{N}$ et $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1 X + a_0 \in \mathbb{K}_n[X]$ un polynôme unitaire.
On appelle matrice compagnon de P, notée $\mathcal{C}_P$ la matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ définie par
$$\mathcal{C}_P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$
- Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et $u \in \mathcal{L}(E)$.
On dit que u est cyclique ssi il existe $x \in E$ tel que $(x, u(x), \ldots, u^{n-1}(x))$ est une base de E.
- À $n \in \mathbb{N}$ fixé, on notera $(E_1, \ldots, E_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$.
- Pour $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ et $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ on note $P(A) = \sum_{k=0}^{n} a_k A^k \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ dit que P annule A ssi $P(A) = 0_n$.
- Une matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ est dite diagonalisable ssi elle est semblable à une matrice diagonale.

---

1. Matrices compagnons

1.I. Matrice compagnons et endomorphismes cycliques

Soit $n \in \mathbb{N}$ et E un espace vectoriel de dimension n.

1.1. Soit P un polynôme unitaire de $\mathbb{K}_n[X]$.
Déterminer pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$ la valeur ${\mathcal{C}_P}^k E_1$.

On a par produit matriciel (produit d'une matrice par un vecteur de la base canonique)
$$\forall j \in [\![1, n-1]\!],\ \mathcal{C}_P E_j = E_{j+1}$$
et
$$\mathcal{C}_P E_n = \sum_{i=1}^{n} -a_{i-1} E_i.$$

Par récurrence finie sur k on obtient donc

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ {\mathcal{C}_P}^k E_1 = E_{k+1}.$$

- **Initialisation**: on a $I_n E_1 = E_{1+0}$.
- **Hérédité**: soit $k \in [\![0, n-2$ et supposons que ${\mathcal{C}_P}^k E_1 = E_{k+1}$.
  Alors
  $${\mathcal{C}_P}^{k+1} E_1 = \mathcal{C}_P {\mathcal{C}_P}^k E_1 = \mathcal{C}_P E_{k+1} = E_{k+2}.$$
- **Conclusion**: par récurrence finie
  $$\boxed{\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ {\mathcal{C}_P}^k E_1 = E_{k+1}}.$$

1.2. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que u est cyclique et on fixe $x \in E$ tel que $\mathcal{B}_x = (x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ est une base de E.
Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_x}(u)$.

On a pour tout $j \in [\![0, n-2]\!]$,

$$u\left(u^j(x)\right) = u^{j+1}(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \delta_{i,j+1} u^i(x).$$

De plus avec

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_x(u^n(x))} = \begin{pmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{pmatrix}$$

les coordonnés de $u^n(x)$ dans $\mathcal{B}_x$ on a

$$u\left(u^{n-1}(x)\right) = \sum_{i=0}^{n-1} b_i u^i(x)$$

d'où

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_x}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & b_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b_{n-1} \end{pmatrix}.$$

1.3. Conclure qu'un endomorphisme est cyclique **ssi** il existe une base dans laquelle sa matrice est la matrice compagnon d'un polynôme (unitaire).

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ où E est un ev de dimension n.

- $\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que u est cyclique.
  Fixons $x \in E$ tel que $\mathcal{B}_x = (x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ est une base de E.
  Par la question **1.2.** en posant $\begin{pmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{pmatrix} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_x}(u)$ et $P = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} b_k X^k$ on a bien
  $$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_x}(u) = \mathcal{C}_P}.$$
- $\boxed{\Leftarrow}$ Supposons qu'il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E et P unitaire de degré tels que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \mathcal{C}_P$.
  On a alors, par la question **1.1.**

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!],\quad \begin{aligned} \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u^k(e_1)) &= (\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u))^k \,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(e_1) \\ &= {\mathcal{C}_P}^k E_1 \\ &= E_{k+1} \\ &= \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(e_{k+1}) \end{aligned}$$

  et donc
  $$(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x)) = (e_1, e_2, \dots, e_n)$$
  et en particulier est une base d'où $\boxed{u \text{ est cyclique}}$.

1.II. Matrices compagnons et polynômes

Soit $n \in \mathbb{N}$, $P = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ un polynôme unitaire de $\mathbb{K}_n[X]$ et $\mathcal{C}_P$ sa matrice compagnon.

1.4. Montrer que la famille $(I_n, \mathcal{C}_P, \dots, {\mathcal{C}_P}^{n-1})$ est libre.

Soit $(\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ tel que

$$\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k {\mathcal{C}_P}^k = 0_n.$$

En particulier on a donc

$$\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k {\mathcal{C}_P}^k E_1 = 0_n$$

c'est à dire par **1.1.**

$$\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k E_{k+1} = 0_n.$$

Par liberté de la base canonique on a alors pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $\lambda_k = 0$ et donc $\boxed{(I_n, \mathcal{C}_P, \dots, {\mathcal{C}_P}^{n-1}) \text{ est libre}}$.

1.5. Montrer que $P(\mathcal{C}_P) = 0$.

On a déjà vu que

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ {\mathcal{C}_P}^k E_1 = E_{k+1}.$$

et

$${\mathcal{C}_P}^n E_1 = \mathcal{C}_P E_n = -\sum_{i=0}^{n-1} a_i E_{i+1}.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} P(\mathcal{C}_P)E_1 &= {\mathcal{C}_P}^n E_1 + \sum_{k=0}^{n-1} a_k {\mathcal{C}_P}^k E_1 \\ &= -\sum_{i=0}^{n-1} a_i E_{i+1} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k E_{k+1} \\ &= 0_n. \end{aligned}$$

Et pour $j \in [\![1, n]\!]$

$$P(\mathcal{C}_P)E_j = P(\mathcal{C}_P)(\mathcal{C}_P)^{j-1}E_1 = (\mathcal{C}_P)^{j-1}P(\mathcal{C}_P)E_1 = 0_n.$$

Comme le produit de $P(\mathcal{C}_P)$ avec tout vecteur de la base canonique est nul on en déduit

$$\boxed{P(\mathcal{C}_P) = 0_{n,n}}.$$

1.6. Conclure qu'un polynôme $T \in \mathbb{K}[X]$ annule $\mathcal{C}_P$ ssi P divise T.

Soit $T \in \mathbb{K}[X]$

- $\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que P divise T.
  Alors il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $T = PQ$.
  D'où $T(\mathcal{C}_P) = \underbrace{P(\mathcal{C}_P)}_{0_{n,n}} Q(\mathcal{C}_P) = 0_{n,n}$ et donc $\boxed{T \text{ annule } \mathcal{C}_P.}$
- $\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que T annule $\mathcal{C}_P$.
  Soient Q, R le quotient et le reste de la division euclidienne de T par P.
  Alors $T = PQ + R$ et $R \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$.
  En particulier $T(\mathcal{C}_P) = P(\mathcal{C}_P)Q(\mathcal{C}_P) + R(\mathcal{C}_P)$ et comme P et T annulent $\mathcal{C}_P$ on en déduit

  $$R(\mathcal{C}_P) = 0_{n,n}.$$

  Avec $R = \sum_{k=0}^{n-1} r_k X^k \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ on a donc

  $$\sum_{k=0}^{n-1} r_k {\mathcal{C}_P}^k = 0_{n,n}$$

  et donc par **1.4.**, comme la famille est libre, $r_0 = \dots = r_{n-1} = 0$ c'est à dire $R = 0$.
  Le reste étant nul on a bien $\boxed{P \text{ divise } T}$.

1.7. En déduire qu'en particulier le polynôme de la question **1.3.** est unique.

Soit u un endomorphisme cyclique, $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ deux bases de E, et P_1,P_2 deux polynômes unitaires tels que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1}(u) = \mathcal{C}_{P_1}$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_2}(u) = \mathcal{C}_{P_2}$.
En particulier les matrices $\mathcal{C}_{P_1}$ et $\mathcal{C}_{P_2}$ sont semblables.
Comme $P_1(\mathcal{C}_{P_1}) = 0$ on en déduit (question **1.6.**) que $P_1(\mathcal{C}_{P_2}) = 0$ (car semblable à 0). Donc $P_2 \mid P_1$.
De même $P_1 \mid P_2$. Il existe donc $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que $P_1 = \lambda P_2$.
Et comme les deux polynômes sont unitaires on en déduit $\lambda = 1$ c'est à dire $P_1 = P_2$.
D'où $\boxed{\text{l'unicité}}$.

1.III. Matrice compagnon et diagonalisabilité

Soit $n \in \mathbb{N}$, $P = X^n + \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme unitaire de $\mathbb{K}_n[X]$ et $\mathcal{C}_P$ sa matrice compagnon.
1.8. Montrer que si deux matrices sont semblables alors tout polynôme annulant l'un annule l'autre.

Soient A_1 et A_2 deux matrices semblables et $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ tel que $A_1 = Q^{-1}A_2Q$.
Soit P un polynôme annulant A_2, alors $P(A_1) = Q^{-1}P(A_2)Q = Q^{-1}0Q = 0$ et donc P annule A_1.

1.9. On suppose que $\mathcal{C}_P$ est diagonalisable.
Montrer que P est scindé à racines simples.

Comme $\mathcal{C}_P$ est diagonalisable il existe $r \leq n$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ des scalaires deux à deux distincts tels que P semblable à une matrice diagonale D dont les coefficients diagonaux sont les λ_k ($k \in \llbracket 1, r \rrbracket$) avec répétitions possibles.
En posant $\widetilde{P} = \prod_{k=1}^{r}(X - \lambda_k)$ (scindé à racines simples) la matrice $\widetilde{P}(D)$ est une matrice diagonale de coefficients nuls et donc est nulle.
Comme $\widetilde{P}$ annule D elle annule $\mathcal{C}_P$. Donc $P \mid \widetilde{P}$. Or $\deg(\widetilde{P}) = r \leq n = \deg(P)$. On en déduit qu'il existe $\alpha \in \mathbb{K}^*$ tel que $P = \alpha\widetilde{P}$.
Comme les deux polynômes sont unitaires $P = \widetilde{P}$.
En particulier $\boxed{P \text{ est scindé à racines simples}}$.
(On obtient en fait plus précis par degré: P est semblable à la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont exactement les racines de P, chacun apparaissant exactement une fois.)

On suppose désormais que P est scindé à racines simples, on note $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ ses racines (deux à deux distinctes) et on cherche on cherche à démontrer que $\mathcal{C}_P$ est diagonalisable.
On note $T \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^{\mathbb{N}})$ l'opérateur de translation défini par

$$T : \begin{array}{c} \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \\ (u_k)_{k\in\mathbb{N}} \mapsto (u_{k+1})_{k\in\mathbb{N}} \end{array}.$$

On considère $\mathcal{S}$ l'ensemble des suites vérifiant la relation de récurrence linéaire de polynôme caractéristique P, c'est à dire

$$\mathcal{S} = \left\{ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \middle| \forall k \in \mathbb{N}, u_{k+n} = -a_{n-1}u_{k+(n-1)} - \cdots - a_1 u_{k+1} - a_0 u_k \right\}$$

1.10. Montrer que $\mathcal{S}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

On peut simplement vérifier que la suite nulle est dans $\mathcal{S}$ et que $\mathcal{S}$ est stable par combinaison linéaire.
Alternativement on remarque que

$$\mathcal{S} = \mathrm{Ker}(P(T))$$

et donc $\boxed{\mathcal{S} \text{ est un sev}}$.
Remarque: le lien entre $\mathcal{S}$ et $\mathcal{C}_P$ apparait en remarquant que $\mathcal{S}$ est l'ensemble des suites $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ vérifiant

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad U_{k+1} = \mathcal{C}_P U_k$$

où on a posé pour tout k, $U = \begin{pmatrix} u_k \\ \vdots \\ u_{k+n} \end{pmatrix}$.

1.11. Pour tout $j \in [\![1,n]\!]$ on note c_j la suite définie par

$$\forall i \in [\![0,n-1]\!], (c_j)_i = \delta_{i,j-1} \qquad \text{(condition initiale)}$$
$$\forall k \in \mathbb{N}, (c_j)_{k+n} = -\sum_{i=0}^{n-1} a_i (c_j)_{k+i} \qquad \text{(relation de récurrence)}$$

Montrer que $\mathcal{C} = (c_1, \dots, c_n)$ est une base de $\mathcal{S}$.

Tout d'abord on a bien pour tout j, $c_j \in [\![1,n]\!]$.
Il s'agit tout simplement de montrer qu'une suite vérifiant une relation de récurrence linéaire d'ordre n est entièrement déterminée par ses n premiers termes.
Alternativement posons

$$\Phi : \begin{array}{ccc} \mathcal{S} & \to & \mathbb{K}^n \\ (u_k)_{k\in\mathbb{N}} & \mapsto & \begin{pmatrix} u_0 \\ \vdots \\ u_{n-1} \end{pmatrix} \end{array}$$

- **Injectivité** Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathrm{Ker}(\Phi)$. Alors $u_0 = u_1 = \cdots = u_{n-1} = 0$ et pour tout k, $u_{k+n} = -\sum_{j=0} a_j u_{k+j}$, d'où par récurrence d'ordre p sur k on en déduit que que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_k = 0$.
  Donc Φ est injective.
- **Surjectivité** Soit $\begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$.
  Par principe de construction par récurrence d'une suite (admis) il existe une suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence
  $$\forall i \in [\![0,n-1]\!], u_i = y_i \qquad \text{(condition initiale)}$$
  $$\forall k \in \mathbb{N}, u_{k+n} = -\sum_{j=0}^{n-1} a_j u_{k+j} \qquad \text{(relation de récurrence)}$$
  et alors une telle suite vérifie bien $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathcal{S}$ et $\Phi((u_k)_{k\in\mathbb{N}}) = \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$.
  Donc Φ est surjective.

Par conséquent $\Phi^{-1}(E_1, \dots, E_n)$ est une base de $\mathcal{S}$ c'est à dire $\boxed{(c_1, \dots, c_n) \text{ est une base de } \mathcal{S}}$.

1.12. Pour tout $j \in [\![1,n]\!]$ on note $g_j = ({\lambda_j}^k)_{k\in\mathbb{N}}$.
Montrer que $\mathcal{G} = (g_1, \dots, g_n)$ est une base de $\mathcal{S}$.
Indication: on pourra faire intervenir une matrice de Vandermonde ou méthode proche.

On commence par remarquer que pour tout j, $Tg_j = \lambda_j g_j$.
Par conséquent, par récurrence sur k, pour tout k et pour tout j, $T^k g_j = {\lambda_j}^k g_j$ et donc $P(T)g_j = P(\lambda_j)g_j = 0$. On a donc bien pour tout j, $g_j \in \mathcal{S}$.

- **Première méthode**: liberté (par Vandermonde) + dimension
  La question précédente montre en particulier que $\dim(\mathcal{S}) = n$.
  On commence par remarquer que $(g_1, \dots, g_n)$ a autant de vecteurs que la dimension de $\mathcal{S}$.
  Montrons que $(g_1, \dots, g_n)$ est libre.
  Soit $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ tels que
  $$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j g_j = 0_{\mathbb{C}^{\mathbb{N}}}$$
  alors en particulier
  $$\forall k \in [\![0,n-1]\!], \sum_{j=1}^{n} \alpha_j {\lambda_j}^k = 0$$
  c'est à dire
  $$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \cdots & \lambda_n \\ {\lambda_1}^2 & {\lambda_2}^2 & {\lambda_3}^2 & \cdots & {\lambda_n}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ {\lambda_1}^{n-1} & {\lambda_2}^{n-1} & {\lambda_3}^{n-1} & \cdots & {\lambda_n}^{n-1} \end{pmatrix}}_{V} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

et comme les $(\lambda_j)_{j\in[\![1,n]\!]}$ deux à deux distinctes la matrice de Vandermonde V est inversible. Et donc $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$.
D'où la famille est libre.
Par dimension ($n = n$) c'est donc une base.

- **Seconde méthode**: matrice d'une famille dans une base
On a pour tout $(i,j) \in [\![0,n-1]\!] \times [\![1,n]\!]$, $(g_j)_i = (\lambda_j)^i$ et donc (par définition de la base $\mathcal{C}$)

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\mathcal{G}) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \cdots & \lambda_n \\ {\lambda_1}^2 & {\lambda_2}^2 & {\lambda_3}^2 & \cdots & {\lambda_n}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ {\lambda_1}^{n-1} & {\lambda_2}^{n-1} & {\lambda_3}^{n-1} & \cdots & {\lambda_n}^{n-1} \end{pmatrix}}_{V}$$

et comme les $(\lambda_j)_{j\in[\![1,n]\!]}$ deux à deux distincts à la matrice de Vandermonde V est inversible et donc $\mathcal{G}$ est base.

1.13. Montrer que $\mathcal{S}$ est stable par T. On note $T_{\mathcal{S}}$ l'endomorphisme induit par T sur $\mathcal{S}$.

On a $\mathcal{S} = \mathrm{Ker}(P(T))$ or $P(T)$ est un polynôme en T donc commute avec T.
En particulier $\mathrm{Ker}(P(T))$ est stable par T c'est à dire $\mathcal{S}$ est stable par T.

1.14. Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(T_{\mathcal{S}})$.

Pour $j = 1$, on a $T(c_1) = -a_0 c_n$.
Soit $j \in [\![2,n]\!]$.
On a pour tout $i \in [\![0,n-2]\!]$, $(c_j)_{i+1} = \delta_{i,j-2}$ et $(c_j)_n = -\sum_{i=0}^{n-1} a_i (c_j)_i = -a_{j-1}$.
Par conséquent (les éléments de $\mathcal{S}$ étant entièrement définis par leurs n premières valeurs)

$$T(c_j) = c_{j-1} - a_{j-1} c_n.$$

Donc

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(T) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix} = {\mathcal{C}_P}^{\top}}.$$

1.15. Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{G}}(T_{\mathcal{S}})$.

On a déjà vu que $T(g_j) = \lambda_j g_j$ et donc

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{G}}(T) = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)}.$$

1.16. Conclure.

Comme T admet $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ et ${\mathcal{C}_P}^{\top}$ comme matrices, ces deux matrices sont semblables.
Il existe donc $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ tel que ${\mathcal{C}_P}^{\top} = QDQ^{-1}$ d'où $\mathcal{C}_P = (Q^{\top})^{-1} D Q^{\top}$ et donc $\mathcal{C}_P$ est semblable à $\mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.
Remarque: on obtient non seulement la similitude mais aussi l'expression d'une matrice de passage: il s'agit de la matrice de Vandermonde associée à $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.

1.IV. Matrice compagnon et transposée

Soit $n \in \mathbb{N}$, $P = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ un polynôme unitaire de $\mathbb{K}_n[X]$ et $\mathcal{C}_P$ sa matrice compagnon.
Pour tout polynôme $A \in \mathbb{K}[X]$ on note $\pi_P(A)$ le reste de la division euclidienne de A par P.
On note

$$\widetilde{T} : \begin{array}{c} \mathbb{K}_{n-1}[X] \to \mathbb{K}_{n-1}[X] \\ A \mapsto \pi_P(XA) \end{array}$$

1.17. Montrer que $\widetilde{T}$ est bien définie et linéaire.

La multiplication par X est linéaire.
De plus $\pi : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X]$ est linéaire et $\mathrm{Im}(\pi) = \mathbb{K}_{n-1}[X]$. C'est en effet la projection sur $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ parallèlement à $\{PQ, Q \in \mathbb{K}[X]\}$ (sev car image de la multiplication par P).
Donc $\boxed{\widetilde{T} \text{ est bien définie et linéaire}}$.

1.18. Soit $\mathcal{B} = (1, X, \dots, X^{n-1})$ la base canonique de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$.
Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\widetilde{T})$.

Pour tout $j \in [\![0, n-2]\!]$, $XX^j = X^{j+1} \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ et donc $\pi(XX^j) = X^{j+1}$.
De plus

$$XX^{n-1} = X^n = P \times 1 + \underbrace{\left(-\sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k\right)}_{\in \mathbb{K}_{n-1}[X]}$$

et par conséquent, $\pi(X^n) = \left(-\sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k\right)$

$$\tilde{T}(X^{n-1}) = \sum_{k=0}^{n-1} (-a_k) X^k.$$

On a donc

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\tilde{T}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} = \mathcal{C}_P}.$$

On définit par récurrence une suite de polynômes (dit polynômes de Horner associés à P) par

$$H_0 = 1$$
$$\forall j \in [\![0, n-2]\!],\ H_{j+1} = a_{n-j-1} + XH_j$$

On pose $\mathcal{H} = (H_0, \dots, H_{n-1})$ et $\overleftarrow{\mathcal{H}} = (H_{n-1}, \dots, H_0)$.

1.19. Déterminer l'expression de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{H})$.
Donner sans justification l'expression de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\overleftarrow{\mathcal{H}})$.

Montrons par récurrence finie sur j que pour tout $j \in [\![0, n-1]\!]$,

$$H_j = \sum_{k=0}^{j-1} a_{n-(j-k)} X^k + X^j$$

- **Initialisation**: pour $n = 0$, $H_0 = 1$.
- **Hérédité**: soit $j \in [\![0, n-2]\!]$ et supposons que $H_j = \sum_{k=0}^{j-1} a_{n-(j-k)} X^k + X^j$.

Alors

$$\begin{aligned} H_{j+1} &= a_{n-j-1} + X\left(\sum_{k=0}^{j-1} a_{n-(j-k)}X^k + X^j\right) \\ &= a_{n-(j+1)} + \sum_{k=0}^{j-1} a_{n-(j-k)}X^{k+1} + X^{j+1} \\ &= \sum_{l=0}^{(j+1-1)} a_{n-((j+1)-l)}X^l + X^{j+1} \end{aligned}$$

ce qui est bien la proposition au rang $j+1$.

- **Conclusion**: La proposition étant initalisée et héréditaile, par récurrence finie on a donc pour tout $j \in [\![0, n-1]\!]$

$$H_j = \sum_{k=0}^{j-1} a_{n-(j-k)}X^k + X^j$$

c'est à dire

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(H_j) = \begin{pmatrix} a_{n-j} \\ a_{n-j+1} \\ \vdots \\ a_{n-1} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Et par conséquence

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{H}) = \begin{pmatrix} 1 & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 \\ 0 & 1 & a_{n-1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a_{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

d'où

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\breve{\mathcal{H}}) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_2 & \iddots & & \iddots & \iddots & 0 \\ a_3 & & \iddots & \iddots & \iddots & \vdots \\ \vdots & \iddots & \iddots & \iddots & & \vdots \\ a_{n-1} & \iddots & \iddots & & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}}$$

1.20. Montrer que $\breve{\mathcal{H}}$ est une base de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$.

Comme la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{H})$ est une matrice triangulaire dont les coefficients diagonaux sont non nuls, elle est inversible, d'où $\mathcal{H}$ est une base et donc par permutation $\boxed{\breve{\mathcal{H}} \text{ est une base}}$.
Alternativement il s'agit d'une famille de polynômes échelonnée en degré, donc libre, donc une base par dimension.

1.21. Déterminer $\mathrm{Mat}_{\breve{\mathcal{H}}}(\widetilde{T})$.

On a, par définition, pour tout $j \in [\![0, n-1]\!]$,

$$XH_j = -a_{n-j-1} + H_{j+1} \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$$

et $XH_{n-1} + a_0 = P$ d'où

$$XH_{n-1} = P \times 1 - a_0$$

d'où

$$\begin{aligned} \forall j \in [\![0, n-2]\!], \quad \tilde{T}(H_j) &= -a_{n-j-1}H_0 + H_{j+1} \\ \tilde{T}(H_{n-1}) &= -a_0 \end{aligned}$$

et donc

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\breve{\mathcal{H}}}(\widetilde{T}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix} = {\mathcal{C}_P}^\top}$$

1.22. Conclure que toute matrice compagnon est semblable à sa transposée.

Soit P un polynôme et $\mathcal{C}_P$ sa matrice compagnon.
D'après les questions **1.18.** et **1.21.**, comme elles représentent le même endomorphisme dans des bases bien choisies, $\boxed{\mathcal{C}_P \text{ et } {\mathcal{C}_P}^\top \text{ sont semblables}}$.