On portera une attention particulière à **la rédaction** et à **la propreté** de la copie.
En particulier tout **graphe ou schéma** pertinent et correctement annoté sera **valorisé**.
Les résultats devront être mis en valeur dès que possible.

Indiquez sur votre copie le temps approximatif pris pour le devoir.

1 Caractérisations de la majorisation

Notations et définitions

Dans tout le problème $n \in \mathbb{N}^*$ est un entier naturel non nul.

- Pour $\sigma \in S_n$ on notera P_σ la matrice de permutation associée à σ, définie par

$$P_\sigma = \left(\delta_{i,\sigma(j)}\right)_{1\leq i,j\leq n}$$

c'est-à-dire pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $(P_\sigma)_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = \sigma(j) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

- On dit qu'une matrice est bistochastique ssi ses coefficients sont tous positifs ou nuls et si la somme de chaque ligne et chaque colonne est égale à 1.
On notera $\mathcal{B}_n$ l'ensemble des matrices bistochastiques de taille $n \times n$.
Ainsi pour tout $M = (m_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, on a

$$M \in \mathcal{B}_n \Leftrightarrow \begin{cases} \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, & m_{ij} \geq 0, \\ \forall i \in [\![1,n]\!], & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} m_{ij} = 1, \\ \forall j \in [\![1,n]\!], & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} m_{ij} = 1. \end{cases}$$

- On note $\mathbb{R}^n_\downarrow$ l'ensemble des vecteurs de $\mathbb{R}^n$ dont les coordonnées sont ordonnées de manière décroissante, c'est-à-dire

$$\mathbb{R}^n_\downarrow = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n \right\}.$$

- Soient $x, y \in \mathbb{R}^n_\downarrow$. On dit que x est majorisé par y et on note $x \prec y$ ssi

$$\begin{cases} \forall k \in [\![1,n]\!], & \displaystyle\sum_{i=1}^{k} x_i \leq \sum_{i=1}^{k} y_i, \\ & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i. \end{cases}$$

- Pour $x, y \in \mathbb{R}^n$ quelconques, on dit que x est majorisé par y ssi il existe des permutations $\sigma, \rho \in S_n$ telles que $P_\sigma x, P_\rho y \in \mathbb{R}^n_\downarrow$ et $P_\sigma x \prec P_\rho y$. On note dans ce cas $x \prec y$.
- On dit que $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ est une T-transformation ssi il existe $\tau \in S_n$ une transposition et $t \in [0,1]$ tels que

$$A = (1-t)I_n + tP_\tau.$$

Étude d'ensemble de matrices

1.1. Soit $\sigma \in S_n$ et $X \in \mathbb{R}^n$.
Exprimer les coordonnées de $P_\sigma X$ en fonction de celles de X.

1.2. Montrer que

$$\begin{array}{ccc} S_n & \to & \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \\ \sigma & \mapsto & P_\sigma \end{array}$$

1 / 3

est un morphisme de groupes.

1.3. Soient $\sigma_1, \dots, \sigma_r \in S_n$ et $t_1, \dots, t_r \in [0,1]$ tels que $\sum_{i=1}^{r} t_i = 1$.

Montrer que

$$\sum_{i=1}^{r} t_i P_{\sigma_i} \in \mathcal{B}_n.$$

1.4. Montrer que $\mathcal{B}_n$ est stable par produit.

Majorisation et convexité

1.5. Montrer que $\prec$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{R}^n_\downarrow$.
La relation $\prec$ est-elle une relation d'ordre sur $\mathbb{R}^n$?
La relation d'ordre $\prec$ sur $\mathbb{R}^n_\downarrow$ est-elle totale ?

1.6. On suppose dans cette question que $n \geq 2$.
Soient $x, y \in \mathbb{R}^n_\downarrow$.
On suppose qu'il existe $j \in [\![1, n]\!]$ tel que $x_j = y_j$ et on pose $\widetilde{x} = (x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n)$ et $\widetilde{y} = (y_1, \dots, y_{j-1}, y_{j+1}, \dots$
les vecteurs de $\mathbb{R}^{n-1}$ obtenus à partir de x et y en supprimant leur j-ème coordonnée.
Montrer que $\widetilde{x}, \widetilde{y} \in \mathbb{R}^{n-1}_\downarrow$ puis que, $x \prec y$ ssi $\widetilde{x} \prec \widetilde{y}$.

Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$. On cherche à démontrer l'équivalence suivante:

$$(x \prec y) \Leftrightarrow \left(\forall f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \text{ convexe}, \quad \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \leq \sum_{i=1}^{n} f(y_i) \right).$$

1.7. Soient:
- $(\Delta_i)_{i \in [\![1,n]\!]} \in \mathbb{R}^n$ tel que $\Delta_1 \geq \Delta_2 \geq \cdots \geq \Delta_n$ une famille décroissante de réels,
- $(\varepsilon_i)_{i \in [\![1,n]\!]} \in \mathbb{R}^n$ tel que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i \geq 0$ et $\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i = 0$.

Montrer que

$$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \Delta_i \geq 0.$$

1.8. En déduire que **si** $x \prec y$ **alors** pour toute fonction $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ convexe, $\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \leq \sum_{i=1}^{n} f(y_i)$.

1.9. Pour $\xi \in \mathbb{R}$, on note $\xi^+ = \max(\xi, 0)$ et $\xi^- = \max(-\xi, 0)$.
Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ \xi &\mapsto (\xi - \alpha)^+ \end{aligned}$$

est convexe.

1.10. En déduire que **si** pour toute fonction $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ convexe, $\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \leq \sum_{i=1}^{n} f(y_i)$ **alors** $x \prec y$.

T-transformations et matrices bistochastiques

On cherche à démontrer dans cette partie l'équivalence suivante:

$$(x \prec y) \Leftrightarrow (\exists M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \text{ bistochastique}, \quad x = My) \Leftrightarrow (\exists T_1, \dots, T_r \text{ T-transformations}, \quad x = T_1 \dots T_r y).$$

1.11. On suppose qu'il existe $T_1, \dots, T_r$ des T-transformations telles que $x = T_1 \dots T_r y$.
Montrer qu'il existe $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ bistochastique telle que $x = My$.

1.12. On suppose qu'il existe $M \in \mathcal{B}_n$ une matrice bistochastique telle que $x = My$.
À l'aide de la question **1.10.**, montrer que $x \prec y$.

1.13. On suppose dans cette question que $x, y \in \mathbb{R}^n_\downarrow$, $x \prec y$ et $x \neq y$.
Montrer qu'il existe $k, \ell \in [\![1, n]\!]$ tels que $k < \ell$,

$$y_\ell < x_\ell \leq x_k < y_k$$

et

$$\forall i \in [\![k+1, \ell-1]\!], \quad x_i = y_i.$$

1.14. **(Bonus)** En déduire que si $x \prec y$ alors il existe $T_1, \dots, T_r$ des T-transformations telles que $x = T_1 \dots T_r y$.

Une application parmi d'autres

1.15. Soient $\alpha, \beta > 0$, $u, v \in \mathbb{R}$. Montrer que pour tout $t \in [0,1]$,

$$\alpha^{tu+(1-t)v}\beta^{(1-t)u+tv} + \alpha^{(1-t)u+tv}\beta^{tu+(1-t)v} \leq \alpha^u\beta^v + \alpha^v\beta^u.$$

1.16. (**Bonus**) Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$ tels que $x \prec y$.
Montrer que pour tout $(a_1, \dots, a_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ on a

$$\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n}\prod_{i=1}^{n} {a_{\sigma(i)}}^{x_i} \leq \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n}\prod_{i=1}^{n} {a_{\sigma(i)}}^{y_i}.$$

1.17. Que donne l'inégalité de la question **1.16.** pour $x = \left(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right)$ et $y = (1, 0, \dots, 0)$?