En cas d'erreur de corrigé, n'hésitez pas à me le signaler.

1 Caractérisations de la majorisation

Notations et définitions

Dans tout le problème $n \in \mathbb{N}^*$ est un entier naturel non nul.

- Pour $\sigma \in S_n$ on notera P_σ la matrice de permutation associée à σ, définie par

$$P_\sigma = \left(\delta_{i,\sigma(j)}\right)_{1\leq i,j\leq n}$$

c'est-à-dire pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $(P_\sigma)_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = \sigma(j) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

- On dit qu'une matrice est bistochastique ssi ses coefficients sont tous positifs ou nuls et si la somme de chaque ligne et chaque colonne est égale à 1.
  On notera $\mathcal{B}_n$ l'ensemble des matrices bistochastiques de taille $n \times n$.
  Ainsi pour tout $M = (m_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, on a

$$M \in \mathcal{B}_n \Leftrightarrow \begin{cases} \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad m_{ij} \geq 0, \\ \forall i \in [\![1,n]\!], \quad \displaystyle\sum_{j=1}^{n} m_{ij} = 1, \\ \forall j \in [\![1,n]\!], \quad \displaystyle\sum_{i=1}^{n} m_{ij} = 1. \end{cases}$$

- On note $\mathbb{R}^n_\downarrow$ l'ensemble des vecteurs de $\mathbb{R}^n$ dont les coordonnées sont ordonnées de manière décroissante, c'est-à-dire

$$\mathbb{R}^n_\downarrow = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n \right\}.$$

- Soient $x, y \in \mathbb{R}^n_\downarrow$. On dit que x est majorisé par y et on note $x \prec y$ ssi

$$\begin{cases} \forall k \in [\![1,n]\!], \quad \displaystyle\sum_{i=1}^{k} x_i \leq \sum_{i=1}^{k} y_i, \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i. \end{cases}$$

- Pour $x, y \in \mathbb{R}^n$ quelconques, on dit que x est majorisé par y ssi il existe des permutations $\sigma, \rho \in S_n$ telles que $P_\sigma x, P_\rho y \in \mathbb{R}^n_\downarrow$ et $P_\sigma x \prec P_\rho y$. On note dans ce cas $x \prec y$.
- On dit que $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ est une T-transformation ssi il existe $\tau \in S_n$ une transposition et $t \in [0,1]$ tels que

$$A = (1-t)I_n + tP_\tau.$$

Étude d'ensemble de matrices

1.1. Soit $\sigma \in S_n$ et $X \in \mathbb{R}^n$.
Exprimer les coordonnées de $P_\sigma X$ en fonction de celles de X.

Posons

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

On a pour tout $i \in [\![1,n]\!]$,

$$\begin{aligned}(P_\sigma X)_i &= \sum_{j=1}^{n} (P_\sigma)_{i,j}\, x_j \\ &= \sum_{j=1}^{n} \delta_{i,\sigma(j)} x_j \\ &= x_{\sigma^{-1}(i)}.\end{aligned}$$

D'où

$$\boxed{P_\sigma X = \begin{pmatrix} x_{\sigma^{-1}(1)} \\ x_{\sigma^{-1}(2)} \\ \vdots \\ x_{\sigma^{-1}(n)} \end{pmatrix}}.$$

1.2. Montrer que

$$\begin{aligned} S_n &\to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \\ \sigma &\mapsto P_\sigma \end{aligned}$$

est un morphisme de groupes.

On remarque que pour tout $\sigma \in S_n$, la définition de P_σ s'interprète par colonne de la manière suivante:

$$\forall j \in [\![1,n]\!], P_\sigma e_j = (\delta_{i,\sigma(j)})_{1\le i\le n} = e_{\sigma(j)}.$$

Soient $\sigma_1, \sigma_2 \in S_n$, on en déduit que

$$\begin{aligned}\forall j \in [\![1,n]\!], \quad (P_{\sigma_1} P_{\sigma_2})(e_j) &= P_{\sigma_1}(P_{\sigma_2} e_j) \\ &= P_{\sigma_1} e_{\sigma_2(j)} \\ &= e_{\sigma_1(\sigma_2(j))} \\ &= e_{(\sigma_1\circ\sigma_2)(j)}.\end{aligned}$$

Ainsi la j-ème colonne de $P_{\sigma_1}P_{\sigma_2}$ est $e_{(\sigma_1\circ\sigma_2)(j)}$ c'est-à-dire $(\delta_{i,(\sigma_1\circ\sigma_2)(j)})_{1\le i\le n}$.
Par conséquent

$$\boxed{P_{\sigma_1}P_{\sigma_2} = P_{\sigma_1\circ\sigma_2}}.$$

On en déduit les propriétés suivantes:

- Bonne définition
  Soit $\sigma \in S_n$. Alors $P_\sigma P_{\sigma^{-1}} = P_{\sigma\circ\sigma^{-1}} = P_{\mathrm{Id}} = I_n$ d'où $P_\sigma \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
- Morphisme de groupes
  Soient $\sigma_1, \sigma_2 \in S_n$. Alors $P_{\sigma_1\circ\sigma_2} = P_{\sigma_1}P_{\sigma_2}$.

1.3. Soient $\sigma_1, \dots, \sigma_r \in S_n$ et $t_1, \dots, t_r \in [0,1]$ tels que $\sum_{i=1}^{r} t_i = 1$.

Montrer que

$$\sum_{i=1}^{r} t_i P_{\sigma_i} \in \mathcal{B}_n.$$

Montrons tout d'abord que pour tout $\sigma \in S_n$, P_σ est une matrice bistochastique.

- Tout d'abord pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $(P_\sigma)_{i,j} = \delta_{i,\sigma(j)} \in \{0,1\}$ et donc en particulier $(P_\sigma)_{i,j} \ge 0$.
- Soit $i \in [\![1,n]\!]$. Alors par bijectivité de σ il existe exactement un $j \in [\![1,n]\!]$ tel que $i = \sigma(j)$ d'où

$$\sum_{j=1}^{n} (P_\sigma)_{i,j} = \sum_{j=1}^{n} \delta_{i,\sigma(j)} = 1$$

- Soit $j \in [\![1,n]\!]$. Alors il existe exactement un $i \in [\![1,n]\!]$ tel que $i = \sigma(j)$ d'où

$$\sum_{i=1}^{n} (P_\sigma)_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} \delta_{i,\sigma(j)} = 1$$

et donc on a bien P_σ est une matrice bistochastique.
Montrons ensuite que l'ensemble des matrices bistochastiques est stable par combinaison convexe.
Soient M_0, M_1 des matrices bistochastiques et $t \in [0,1]$.
Posons $M = (1-t)M_0 + tM_1$.
- Tout d'abord pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $m_{ij} = (1-t)m_{0,ij} + tm_{1,ij} \geq 0$.
- Soit $i \in [\![1,n]\!]$. Alors

$$\sum_{j=1}^{n} m_{ij} = \sum_{j=1}^{n} ((1-t)m_{0,ij} + tm_{1,ij}) = (1-t)\sum_{j=1}^{n} m_{0,ij} + t\sum_{j=1}^{n} m_{1,ij} = 1$$

- Soit $j \in [\![1,n]\!]$. Alors

$$\sum_{i=1}^{n} m_{ij} = \sum_{i=1}^{n} ((1-t)m_{0,ij} + tm_{1,ij}) = (1-t)\sum_{i=1}^{n} m_{0,ij} + t\sum_{i=1}^{n} m_{1,ij} = 1$$

On en déduit par récurrence immédiate que pour tous $\sigma_1, \dots, \sigma_r \in S_n$ et $t_1, \dots, t_r \in [0,1]$ tels que $\sum_{i=1}^{r} t_i = 1$, $\sum_{i=1}^{r} t_i P_{\sigma_i}$ est une matrice bistochastique.
Remarque: on pourrait même montrer que l'ensemble des matrices bistochastiques est exactement l'enveloppe convexe des matrices de permutation, c'est-à-dire que pour toute matrice bistochastique M, il existe $\sigma_1, \dots, \sigma_r \in S_n$ et $t_1, \dots, t_r \in [0,1]$ tels que $\sum_{i=1}^{r} t_i = 1$ et $M = \sum_{i=1}^{r} t_i P_{\sigma_i}$ (il s'agit du théorème de Birkhoff-von Neumann).

1.4. Montrer que $\mathcal{B}_n$ est stable par produit.

Posons

$$U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Pour toute matrice $M = (m_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, on a

$$MU = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} m_{1,j} \\ \sum_{j=1}^{n} m_{2,j} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} m_{n,j} \end{pmatrix}.$$

Ainsi la somme de chaque ligne de M est égale à 1 ssi $MU = U$ et la somme de chaque colonne de M est égale à 1 ssi $M^\top U = U$ ou encore ssi $U^\top M = U^\top$.
Soient M_1, $M_2 \in \mathcal{B}_n$.
- Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, en tant que somme de produit de termes positifs,

$$(M_1M_2)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} m_{1,ik}m_{2,kj} \geq 0.$$

- On a

$$(M_1M_2)U = M_1(M_2U) = M_1U = U$$

donc la somme de chaque ligne de M_1M_2 est égale à 1.
- On a

$$U^\top(M_1M_2) = (U^\top M_1)M_2 = U^\top M_2 = U^\top$$

donc la somme de chaque colonne de M_1M_2 est égale à 1.

et donc $M_1M_2 \in \mathcal{B}_n$.
Donc $\mathcal{B}_n$ est stable par produit.

Majorisation et convexité

1.5. Montrer que $\prec$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{R}^n_\downarrow$.

La relation $\prec$ est-elle une relation d'ordre sur $\mathbb{R}^n$?
La relation d'ordre $\prec$ sur $\mathbb{R}^n_\downarrow$ est-elle totale ?

- Réflexivité Soit $x \in \mathbb{R}^n_\downarrow$. Alors pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $\sum_{i=1}^k x_i \leq \sum_{i=1}^k x_i$ et $\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i$ d'où $x \prec x$.
- Transitivité Soient $x, y, z \in \mathbb{R}^n_\downarrow$ tels que $x \prec y$ et $y \prec z$. Alors pour tout $k \in [\![1,n]\!]$,

$$\sum_{i=1}^k x_i \leq \sum_{i=1}^k y_i \leq \sum_{i=1}^k z_i$$

et

$$\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i = \sum_{i=1}^n z_i$$

d'où $x \prec z$.
- Antisymétrie Soient $x, y \in \mathbb{R}^n_\downarrow$ tels que $x \prec y$ et $y \prec x$.
  Montrons par récurrence forte finie que pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $x_k = y_k$.
  - **Initialisation**
    Pour $k = 1$, on a $x_1 \leq y_1$ et $y_1 \leq x_1$ d'où $x_1 = y_1$.
  - **Hérédité**
    Soit $k \in [\![1,n]\!]$ tel que pour tout $i \in [\![1,k-1]\!]$, $x_i = y_i$.
    On a

$$\sum_{i=1}^k x_i \leq \sum_{i=1}^k y_i \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^k y_i \leq \sum_{i=1}^k x_i$$

    d'où

$$\sum_{i=1}^k x_i = \sum_{i=1}^k y_i.$$

    De plus par hypothèse de récurrence, pour tout $i \in [\![1,k-1]\!]$, $x_i = y_i$ d'où

$$\sum_{i=1}^{k-1} x_i = \sum_{i=1}^{k-1} y_i.$$

    Et donc $x_k = y_k$.
  - **Conclusion**
    Par récurrence forte finie on a que pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $x_k = y_k$ d'où $x = y$.
  Remarque: de manière équivalente, si par l'absurde $x \neq y$, alors on pourrait considérer $\min(\{k \in [\![1,n]\!], x_k \neq y_k\})$ et montrer que cela conduit à une contradiction.

Si $n = 1$, alors $\mathbb{R}^1_\downarrow = \mathbb{R}^1$ et il s'agit bien d'une relation d'ordre.
Sinon, on a par exemple $x = (0,1,0,\dots,0)$ et $y = (1,0,0,\dots,0)$ qui sont tous les deux dans $\mathbb{R}^n$ et vérifient $x \prec y$ et $y \prec x$ (prendre une transposition pour x) et $x \neq y$ d'où la relation n'est pas antisymétrique et n'est donc pas une relation d'ordre sur $\mathbb{R}^n$.

L'ordre n'est pas total, par exemple $x = (1,0,0,\dots,0)$ et $y = (0,0,0,\dots,0)$ ne sont pas comparables car leurs sommes totales sont différentes.

1.6. On suppose dans cette question que $n \geq 2$.
Soient $x, y \in \mathbb{R}^n_\downarrow$.
On suppose qu'il existe $j \in [\![1,n]\!]$ tel que $x_j = y_j$ et on pose $\widetilde{x} = (x_1,\dots,x_{j-1},x_{j+1},\dots,x_n)$ et $\widetilde{y} = (y_1,\dots,y_{j-1},y_{j+1},\dots$ les vecteurs de $\mathbb{R}^{n-1}$ obtenus à partir de x et y en supprimant leur j-ème coordonnée.
Montrer que $\widetilde{x}, \widetilde{y} \in \mathbb{R}^{n-1}_\downarrow$ puis que, $x \prec y$ ssi $\widetilde{x} \prec \widetilde{y}$.

Tout d'abord, montrons que $\widetilde{x} \in \mathbb{R}^{n-1}_\downarrow$. Soit $k \in [\![1,n-2]\!]$.
- Si $k < j$, alors $\widetilde{x}_k = x_k$ et $\widetilde{x}_{k+1} = x_{k+1}$ (si $k+1 < j$) ou $\widetilde{x}_{k+1} = x_{k+2}$ (si $k+1 \geq j$). Dans les deux cas $\widetilde{x}_k \geq \widetilde{x}_{k+1}$ par décroissance de (x_i).
- Si $k \geq j$, alors $\widetilde{x}_k = x_{k+1}$ et $\widetilde{x}_{k+1} = x_{k+2}$ d'où $\widetilde{x}_k \geq \widetilde{x}_{k+1}$.

Donc $\widetilde{x} \in \mathbb{R}^{n-1}_\downarrow$ et de même $\widetilde{y} \in \mathbb{R}^{n-1}_\downarrow$.
- $\Rightarrow$ Supposons que $x \prec y$.
  Soit $k \in [\![1,n-1]\!]$.
  ▷ Si $k < j$, alors

$$\sum_{i=1}^{k} \widetilde{x}_i = \sum_{i=1}^{k} x_i \leq \sum_{i=1}^{k} y_i = \sum_{i=1}^{k} \widetilde{y}_i.$$

▷ Si $k \geq j$, alors

$$\sum_{i=1}^{k} \widetilde{x}_i = \sum_{i=1}^{k+1} x_i - x_j \leq \sum_{i=1}^{k+1} y_i - y_j = \sum_{i=1}^{k} \widetilde{y}_i$$

où l'on a utilisé $\sum_{i=1}^{k+1} x_i \leq \sum_{i=1}^{k+1} y_i$ et $x_j = y_j$.
De plus,

$$\sum_{i=1}^{n-1} \widetilde{x}_i = \sum_{i=1}^{n} x_i - x_j = \sum_{i=1}^{n} y_i - y_j = \sum_{i=1}^{n-1} \widetilde{y}_i.$$

D'où $\widetilde{x} \prec \widetilde{y}$.

- $\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que $\widetilde{x} \prec \widetilde{y}$.
Soit $k \in [\![1, n]\!]$.
▷ Si $k < j$, alors

$$\sum_{i=1}^{k} x_i = \sum_{i=1}^{k} \widetilde{x}_i \leq \sum_{i=1}^{k} \widetilde{y}_i = \sum_{i=1}^{k} y_i.$$

▷ Si $k \geq j$, alors

$$\sum_{i=1}^{k} x_i = \sum_{i=1}^{j-1} \widetilde{x}_i + x_j + \sum_{i=j}^{k-1} \widetilde{x}_i \leq \sum_{i=1}^{j-1} \widetilde{y}_i + y_j + \sum_{i=j}^{k-1} \widetilde{y}_i = \sum_{i=1}^{k} y_i$$

De plus,

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n-1} \widetilde{x}_i + x_j = \sum_{i=1}^{n-1} \widetilde{y}_i + y_j = \sum_{i=1}^{n} y_i.$$

D'où $x \prec y$.

Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$. On cherche à démontrer l'équivalence suivante:

$$(x \prec y) \Leftrightarrow \left(\forall f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \text{ convexe}, \quad \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \leq \sum_{i=1}^{n} f(y_i) \right).$$

1.7. Soient:

- $(\Delta_i)_{i \in [\![1,n]\!]} \in \mathbb{R}^n$ tel que $\Delta_1 \geq \Delta_2 \geq \cdots \geq \Delta_n$ une famille décroissante de réels,
- $(\varepsilon_i)_{i \in [\![1,n]\!]} \in \mathbb{R}^n$ tel que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i \geq 0$ et $\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i = 0$.

Montrer que

$$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \Delta_i \geq 0.$$

Posons pour tout $k \in [\![0, n]\!]$,

$$S_k = \sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i.$$

On a alors

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad \varepsilon_k = S_k - S_{k-1}$$

et l'hypothèse se réécrit

$$\begin{aligned} \forall k \in [\![1, n]\!], \quad & S_k \geq 0 \\ & S_n = 0. \end{aligned}$$

Par conséquent (il s'agit d'une méthode de «transformée d'Abel»)

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i\Delta_i &= \sum_{i=1}^{n}(S_i - S_{i-1})\Delta_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} S_i\Delta_i - \sum_{i=1}^{n} S_{i-1}\Delta_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} S_i\Delta_i - \sum_{i=0}^{n-1} S_i\Delta_{i+1} \\ &= S_n\Delta_n - S_0\Delta_1 + \sum_{i=1}^{n-1} S_i(\Delta_i - \Delta_{i+1})\end{aligned}$$

Et donc comme $S_n = 0$, $S_0 = 0$, pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, $S_i \geq 0$ et $\Delta_i - \Delta_{i+1} \geq 0$, on en déduit que

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i\Delta_i \geq 0}.$$

1.8. En déduire que **si** $x \prec y$ **alors** pour toute fonction $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ convexe, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \leq \sum_{i=1}^{n} f(y_i)$.

Supposons que $x \prec y$.
Soit $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ une fonction convexe.

Quitte à remplacer $(x_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ par $(x_{\sigma(i)})_{i\in[\![1,n]\!]}$, comme $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} f(x_{\sigma(i)}) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)$, on peut supposer que $(x_i)_{i\in[\![1,n]\!]} \in \mathbb{R}^n_{\downarrow}$ et de même quitte à permuter les termes on peut supposer que $(y_i)_{i\in[\![1,n]\!]} \in \mathbb{R}^n_{\downarrow}$.
De plus, par la question **1.6.** quitte à retirer tous les $i \in [\![1, n]\!]$ tels que $x_i = y_i$ et alors $f(x_i) = f(x_i)$, on peut supposer que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $x_i \neq y_i$.
Posons alors pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,

$$\Delta_i = \frac{f(y_i) - f(x_i)}{y_i - x_i}$$
$$\varepsilon_i = y_i - x_i$$

et vérifions que ces deux familles vérifient les hypothèses de la question **1.7.**.

- Soit $k \in [\![1, n]\!]$, on a

  $$\sum_{i=1}^{k}\varepsilon_i = \sum_{i=1}^{k} y_i - \sum_{i=1}^{k} x_i \geq 0$$

  avec égalité pour $k = n$.
  D'où les hypothèses sur $(\varepsilon_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ sont vérifiées.
- Soit $i \in [\![1, n-1]\!]$.
  Comme $(x_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ et $(y_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ sont tous les deux décroissants, $x_i \geq x_{i+1}$ et $y_i \geq y_{i+1}$.
  Par croissance des taux d'accroissements (faire un schéma) on a donc

  $$\frac{f(y_i) - f(x_i)}{y_i - x_i} \geq \frac{f(y_{i+1}) - f(x_i)}{y_{i+1} - x_i}$$

  et de même

  $$\frac{f(y_{i+1}) - f(x_i)}{y_{i+1} - x_i} \geq \frac{f(y_{i+1}) - f(x_{i+1})}{y_{i+1} - x_{i+1}}$$

  et par conséquent on a bien

  $$\underbrace{\frac{f(y_i) - f(x_i)}{y_i - x_i}}_{\Delta_i} \geq \underbrace{\frac{f(y_{i+1}) - f(x_{i+1})}{y_{i+1} - x_{i+1}}}_{\Delta_{i+1}}.$$

D'où par la question **1.7.**, on a bien

$$\sum_{i=1}^{n} f(y_i) - f(x_i) \geq 0$$

c'est à dire

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \leq \sum_{i=1}^{n} f(y_i)}.$$

1.9. Pour $\xi \in \mathbb{R}$, on note $\xi^+ = \max(\xi, 0)$ et $\xi^- = \max(-\xi, 0)$.
Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ \xi &\mapsto (\xi - \alpha)^+ \end{aligned}$$

est convexe.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.
Soient $\xi_0, \xi_1 \in \mathbb{R}$ et $t \in [0, 1]$.
On a comme t et $1-t$ sont positifs, et que le maximum est un majorant,

$$\begin{aligned} (1-t)0 + t0 &\leq (1-t)(\xi_0 - \alpha)^+ + t(\xi_1 - \alpha)^+ \\ (1-t)(\xi_0 - \alpha) + t(\xi_1 - \alpha) &\leq (1-t)(\xi_0 - \alpha)^+ + t(\xi_1 - \alpha)^+ \end{aligned}$$

par conséquent (passage au maximum) comme $(1-t)(\xi_0 - \alpha) + t(\xi_1 - \alpha) = ((1-t)\xi_0 + t\xi_1) - \alpha$, on a

$$(((1-t)\xi_0 + t\xi_1) - \alpha)^+ \leq (1-t)(\xi_0 - \alpha)^+ + t(\xi_1 - \alpha)^+$$

et donc la fonction $\boxed{\xi \mapsto (\xi - \alpha)^+ \text{ est convexe}}$.

1.10. En déduire que **si** pour toute fonction $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ convexe, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \leq \sum_{i=1}^{n} f(y_i)$ **alors** $x \prec y$.

Supposons que pour toute fonction $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ convexe, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \leq \sum_{i=1}^{n} f(y_i)$.
Comme précédemment, quitte à réordonner la somme on peut supposer que $(x_i)_{i\in[\![1,n]\!]} \in \mathbb{R}^n_{\downarrow}$ et de même que $(y_i)_{i\in[\![1,n]\!]} \in \mathbb{R}^n_{\downarrow}$.
Soit $k \in [\![1, n]\!]$.
Par la question **1.9.**, la fonction $f_k : x \mapsto (x - y_k)^+$ est convexe et donc

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_k)^+ \leq \sum_{i=1}^{n} (y_i - y_k)^+.$$

Or comme $(y_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est décroissante on a

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} (y_i - y_k)^+ &= \sum_{i=1}^{k} (y_i - y_k) + \sum_{i=k+1}^{n} 0 \\ &= \left(\sum_{i=1}^{k} y_i\right) - k y_k. \end{aligned}$$

De plus comme pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $(x - y_k)^+ \geq 0$ puis que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(x - y_k)^+ \geq x - y_k$, on a

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_k)^+ &\geq \sum_{i=1}^{k} (x_i - y_k)^+ + \sum_{i=k+1}^{n} 0 \\ &\geq \sum_{i=1}^{k} (x_i - y_k) \\ &= \left(\sum_{i=1}^{k} x_i\right) - k y_k. \end{aligned}$$

et on a donc bien

$$\sum_{i=1}^{k} x_i \leq \sum_{i=1}^{k} y_i.$$

Et ce pour tout $k \in [\![1, n]\!]$.

De plus avec $f = -\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$ qui est convexe car affine, on a

$$\sum_{i=1}^{n} -x_i \leq \sum_{i=1}^{n} -y_i$$

d'où

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \geq \sum_{i=1}^{n} y_i.$$

Par conséquent $\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i$.
D'où

$$\boxed{x \prec y}.$$

T-transformations et matrices bistochastiques

On cherche à démontrer dans cette partie l'équivalence suivante:

$$(x \prec y) \Leftrightarrow (\exists M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \text{ bistochastique}, \quad x = My) \Leftrightarrow (\exists T_1, \dots, T_r \text{ T-transformations}, \quad x = T_1 \dots T_r y)\,.$$

1.11. On suppose qu'il existe $T_1, \dots, T_r$ des T-transformations telles que $x = T_1 \dots T_r y$.
Montrer qu'il existe $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ bistochastique telle que $x = My$.

Par la question **1.3.** on a pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, T_i est une matrice bistochastique.
Par la question **1.4.** et une récurrence immédiate, $M = T_1 \dots T_r$ est donc une matrice bistochastique.
Et on a bien $x = My$.
D'où $\boxed{\text{il existe } M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \text{ bistochastique telle que } x = My}$.

1.12. On suppose qu'il existe $M \in \mathcal{B}_n$ une matrice bistochastique telle que $x = My$.
À l'aide de la question **1.10.**, montrer que $x \prec y$.

Par la question **1.10.**, il suffit de montrer que pour toute fonction $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ convexe, $\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \leq \sum_{i=1}^{n} f(y_i)$.

Soit $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ une fonction convexe.
Alors pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, f étant convexe, et M étant bistochastique, on a

$$f(x_i) = f\left(\sum_{j=1}^{n} m_{ij} y_j\right) \leq \sum_{j=1}^{n} m_{ij} f(y_j).$$

En sommant sur i, on a comme M est bistochastique,

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} m_{ij} f(y_j) = \sum_{j=1}^{n} f(y_j)$$

D'où le résultat.
Ainsi $\boxed{x \prec y}$.

1.13. On suppose dans cette question que $x, y \in \mathbb{R}^n_{\downarrow}$, $x \prec y$ et $x \neq y$.
Montrer qu'il existe $k, \ell \in [\![1, n]\!]$ tels que $k < \ell$,

$$y_\ell < x_\ell \leq x_k < y_k$$

et

$$\forall i \in [\![k+1, \ell-1]\!], \quad x_i = y_i.$$

On a

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i) = 0$$

et les termes ne sont pas tous nuls. D'où il existe $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $x_i - y_i < 0$ et $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $x_i - y_i > 0$.
Ainsi

$$k = \max\left(\{i \in [\![1, n]\!], x_i < y_i\}\right)$$

est bien défini et on a

$$\boxed{x_k < y_k}.$$

De plus

$$\begin{aligned}\sum_{i=k+1}^{n}(x_i - y_i) &= \sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i) - \sum_{i=1}^{k}(x_i - y_i)\\ &= 0 - \underbrace{(x_k - y_k)}_{<0} - \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{k-1} x_i - \sum_{i=1}^{k-1} y_i\right)}_{\leq 0}\\ &> 0\end{aligned}$$

et donc il existe $i \in [\![k+1, n]\!]$ tel que $x_i - y_i > 0$.
Ainsi

$$\ell = \min\left(\{i \in [\![k+1, n]\!], x_i > y_i\}\right)$$

est bien défini et on a

$$\boxed{y_\ell < x_\ell}.$$

et comme $\ell > k$, on a aussi

$$\boxed{x_\ell \leq x_k}.$$

Enfin par définition de k, pour tout $i > k$, $x_i \geq y_i$ et par définition de ℓ, pour tout $i > k$ tel que $i < \ell$, on a $x_i \leq y_i$, d'où

$$\boxed{\forall i \in [\![k+1, \ell-1]\!], \quad x_i = y_i}.$$

1.14. (Bonus) En déduire que si $x \prec y$ alors il existe $T_1, \dots, T_r$ des T-transformations telles que $x = T_1 \dots T_r y$.

Comme les matrices de permutations sont des T-transformations, on peut, de même que précédemment, supposer que x et y sont tous les deux dans $\mathbb{R}^n_\downarrow$.
On procède de manière algorithmique.
Tant que $x \neq y$
Posons k et ℓ comme dans la question **1.13.**.
Si $y_k - x_k \leq x_\ell - y_\ell$ alors posons $\delta = y_k - x_k$ et $t = \frac{\delta}{y_k - y_\ell} = \frac{y_k - x_k}{y_k - y_\ell}$.
On a bien $t \in [0, 1]$.
En effet $y_k - y_\ell > 0$, $y_k - x_k > 0$ d'où $t > 0$, et $y_k - x_k \leq y_k - y_\ell$ d'où $t \leq 1$.
Posons $T = (1-t)I_n + tP_{(k\ell)}$.
Posons aussi

$$\widetilde{y} = Ty.$$

On a alors:

- $\widetilde{y}_k = x_k$ et pour $i \neq k, \ell$, $\widetilde{y}_i \geq x_i$.
  Pour $i \notin \{k, \ell\}$, la matrice T n'agit pas sur la i-ème coordonnée, d'où $\widetilde{y}_i = y_i$.
  Pour la coordonnée k:

  $$\widetilde{y}_k = (1-t)y_k + ty_\ell = y_k - t(y_k - y_\ell) = y_k - \delta = y_k - (y_k - x_k) = x_k.$$

  Pour la coordonnée ℓ:

  $$\widetilde{y}_\ell = (1-t)y_\ell + ty_k = y_\ell + t(y_k - y_\ell) = y_\ell + \delta.$$

- $x \prec \widetilde{y}$.
  Comme $\widetilde{y}_k = y_k - \delta = x_k$, $\widetilde{y}_\ell = y_\ell + \delta$ et pour $i \notin \{k, \ell\}$, $\widetilde{y}_i = y_i$, on a
  ▷ la somme totale

$$\sum_{i=1}^{n}\widetilde{y}_i=\sum_{i=1}^{n}y_i-\delta+\delta=\sum_{i=1}^{n}y_i=\sum_{i=1}^{n}x_i.$$

▷ pour $j\in[\![1,k-1]\!]$,

$$\sum_{i=1}^{j}\widetilde{y}_i=\sum_{i=1}^{j}y_i\geq\sum_{i=1}^{j}x_i.$$

▷ pour $j\in[\![k,\ell-1]\!]$,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{j}\widetilde{y}_i&=\sum_{i=1}^{k-1}y_i+\widetilde{y}_k+\sum_{i=k+1}^{j}\widetilde{y}_i\\&=\sum_{i=1}^{k-1}y_i+x_k+\sum_{i=k+1}^{j}y_i\\&=\sum_{i=1}^{k-1}y_i+x_k+\sum_{i=k+1}^{j}x_i\\&=\sum_{i=1}^{k-1}y_i+\sum_{i=k}^{j}x_i\\&\geq\sum_{i=1}^{k-1}x_i+\sum_{i=k}^{j}x_i\\&=\sum_{i=1}^{j}x_i\end{aligned}$$

▷ pour $j\in[\![\ell,n]\!]$,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{j}\widetilde{y}_i&=\sum_{i=1}^{j}y_i-\delta+\delta\\&=\sum_{i=1}^{j}y_i\\&\geq\sum_{i=1}^{j}x_i.\end{aligned}$$

Si $y_k-x_k>x_\ell-y_\ell$ alors posons $\delta=x_\ell-y_\ell$ et $t=\frac{\delta}{y_k-y_\ell}$.
On a de même $t\in[0,1]$, $T=(1-t)I_n+tP_{(k\ell)}$ est une T-transformation, $\widetilde{y}=Ty$ vérifie $x\prec\widetilde{y}$ et $\widetilde{y}_\ell=x_\ell$.
On remplace alors y par $\widetilde{y}$ et on recommence.
Comme le nombre de coordonnées distinctes entre x et y est un variant de boucle, l'algorithme se termine et à la fin on obtient donc en notant $T_1,\dots,T_r$ les T-transformations utilisées que

$$\boxed{x=T_r\cdots T_1y}.$$

Une application parmi d'autres

1.15. Soient $\alpha,\beta>0$, $u,v\in\mathbb{R}$. Montrer que pour tout $t\in[0,1]$,

$$\alpha^{tu+(1-t)v}\beta^{(1-t)u+tv}+\alpha^{(1-t)u+tv}\beta^{tu+(1-t)v}\leq\alpha^u\beta^v+\alpha^v\beta^u.$$

Soit $t\in[0,1]$.
L'inégalité précédente est équivalente à (en divisant par $\alpha^u\beta^v$)

$$\alpha^{(1-t)(v-u)}\beta^{(1-t)(u-v)}+\alpha^{t(v-u)}\beta^{t(u-v)}\leq1+\alpha^{v-u}\beta^{u-v}.$$

Posons

$$f:\begin{array}{c}[0,1]\to\mathbb{R}\\ s\mapsto\alpha^{s(v-u)}\beta^{s(u-v)}\end{array}.$$

Il suffit donc de montrer que

$$f(1-t)+f(t)\leq f(0)+f(1).$$

De plus comme pour tout $s\in[0,1]$, $f(s)=\exp\left(s\left((v-u)\ln(\alpha)+(u-v)\ln(\beta)\right)\right)$, f est convexe.
D'où

$$\begin{aligned}f(t)=f((1-t)\times 0+t\times 1)&\leq(1-t)f(0)+tf(1)\\ f(1-t)=f((1-t)\times 1+t\times 0)&\leq(1-t)f(1)+tf(0)\end{aligned}$$

et donc

$$f(t)+f(1-t)\leq(1-t)f(0)+tf(1)+(1-t)f(1)+tf(0)=f(0)+f(1).$$

Par conséquent on a bien

$$\boxed{\alpha^{tu+(1-t)v}\beta^{(1-t)u+tv}+\alpha^{(1-t)u+tv}\beta^{tu+(1-t)v}\leq\alpha^u\beta^v+\alpha^v\beta^u}.$$

1.16. (**Bonus**) Soient $x,y\in\mathbb{R}^n$ tels que $x\prec y$.
Montrer que pour tout $(a_1,\dots,a_n)\in(\mathbb{R}_+^*)^n$ on a

$$\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n}\prod_{i=1}^n {a_{\sigma(i)}}^{x_i}\leq\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n}\prod_{i=1}^n {a_{\sigma(i)}}^{y_i}.$$

Par la question **1.14.**, il suffit de montrer que si $x=Ty$ avec T une T-transformation, alors pour tous $(a_1,\dots,a_n)\in(\mathbb{R}_+^*)^n$ on a

$$\sum_{\sigma\in S_n}\prod_{i=1}^n {a_{\sigma(i)}}^{x_i}\leq\sum_{\sigma\in S_n}\prod_{i=1}^n {a_{\sigma(i)}}^{y_i}.$$

Soit $T=(1-t)I_n+tP_{(k\ell)}$ une T-transformation et $x,y\in\mathbb{R}^n$ tels que $x=Ty$.
On a alors

$$\begin{aligned}\forall i\in[\![1,n]\!],\quad x_i&=(1-t)y_i+ty_{\tau(i)}\\ &=\begin{cases}y_i & \text{si } i\notin\{k,\ell\}\\ (1-t)y_k+ty_\ell & \text{si } i=k\\ (1-t)y_\ell+ty_k & \text{si } i=\ell.\end{cases}\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}\sum_{\sigma\in S_n}\prod_{i=1}^n {a_{\sigma(i)}}^{x_i}&=\sum_{\sigma\in S_n}\left(\prod_{i\notin\{k,\ell\}}{a_{\sigma(i)}}^{y_i}\right){a_{\sigma(k)}}^{(1-t)y_k+ty_\ell}{a_{\sigma(\ell)}}^{(1-t)y_\ell+ty_k}\\ \sum_{\sigma\in S_n}\prod_{i=1}^n {a_{\sigma(i)}}^{y_i}&=\sum_{\sigma\in S_n}\left(\prod_{i\notin\{k,\ell\}}{a_{\sigma(i)}}^{y_i}\right){a_{\sigma(k)}}^{y_k}{a_{\sigma(\ell)}}^{y_\ell}\end{aligned}$$

De plus $\sigma\mapsto\sigma\circ(k\ell)$ est une bijection de S_n, et donc on a aussi

$$\begin{aligned}\sum_{\sigma\in S_n}\prod_{i=1}^n {a_{\sigma(i)}}^{x_i}&=\sum_{\sigma\in S_n}\left(\prod_{i\notin\{k,\ell\}}{a_{\sigma(i)}}^{y_i}\right){a_{\sigma(\ell)}}^{(1-t)y_k+ty_\ell}{a_{\sigma(k)}}^{(1-t)y_\ell+ty_k}\\ \sum_{\sigma\in S_n}\prod_{i=1}^n {a_{\sigma(i)}}^{y_i}&=\sum_{\sigma\in S_n}\left(\prod_{i\notin\{k,\ell\}}{a_{\sigma(i)}}^{y_i}\right){a_{\sigma(\ell)}}^{y_k}{a_{\sigma(k)}}^{y_\ell}\end{aligned}$$

et il suffit donc de montrer que

$$\forall\sigma\in S_n\, {a_{\sigma(k)}}^{(1-t)y_k+ty_\ell}{a_{\sigma(\ell)}}^{(1-t)y_\ell+ty_k}+{a_{\sigma(\ell)}}^{(1-t)y_k+ty_\ell}{a_{\sigma(k)}}^{(1-t)y_\ell+ty_k}\leq{a_{\sigma(k)}}^{y_k}{a_{\sigma(\ell)}}^{y_\ell}+{a_{\sigma(\ell)}}^{y_k}{a_{\sigma(k)}}^{y_\ell}$$

ce qui est exactement l'inégalité de la question **1.15.** appliquée à $\alpha=a_{\sigma(k)}$, $\beta=a_{\sigma(\ell)}$, $u=y_k$ et $v=y_\ell$.
Ainsi on a bien

$$\boxed{\sum_{\sigma\in S_n}\prod_{i=1}^n {a_{\sigma(i)}}^{x_i}\leq\sum_{\sigma\in S_n}\prod_{i=1}^n {a_{\sigma(i)}}^{y_i}}.$$

1.17. Que donne l'inégalité de la question **1.16.** pour $x=\left(\frac{1}{n},\dots,\frac{1}{n}\right)$ et $y=(1,0,\dots,0)$?

Vérifions tout d'abord que $x \prec y$.
On a pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$,

$$\sum_{i=1}^{k} x_i = \frac{k}{n} \leq 1 = \sum_{i=1}^{k} y_i$$

et

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1 = \sum_{i=1}^{n} y_i.$$

De plus, on a

$$\frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{i=1}^{n} {a_{\sigma(i)}}^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i)}} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i}$$

et

$$\frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{i=1}^{n} {a_{\sigma(i)}}^{y_i} = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} a_{\sigma(1)}.$$

De plus on a pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, il existe exactement $(n-1)!$ permutations $\sigma \in S_n$ telles que $\sigma(1) = i$.
D'où

$$\sum_{\sigma \in S_n} a_{\sigma(1)} = (n-1)! \sum_{i=1}^{n} a_i$$

et donc

$$\frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} a_{\sigma(1)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

D'où l'inégalité de la question **1.16.** donne

$$\boxed{\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i} \leq \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n}}$$

c'est à dire $\boxed{\text{l'IAG}}$.
Remarque culturelle: l'inégalité montrée à la question **1.16.** s'appelle l'inégalité de Muirhead.