Limsup et liminf

On portera une attention particulière à **la rédaction** et à **la propreté** de la copie.
En particulier tout **graphe ou schéma** pertinent et correctement annoté sera **valorisé**.
Les résultats devront être mis en valeur dès que possible.

Indiquez sur votre copie le temps approximatif pris pour le devoir.

Contexte

Ce problème introduit les notions classiques de limites supérieures et limites inférieurs (lim sup et lim inf), et démontre quelques propositions les concernant.
Ces notions généralisant en fait celles de limites, facilitant ainsi de nombreux résultats théoriques et calculs.

1. Classique: Limite supérieure et limite inférieure

On rappelle que l'on note $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ la droite numérique achevée.
Par abus de notation, on dira qu'une suite d'éléments de $\overline{R}$ est bornée si il s'agit d'une suite d'éléments de $\mathbb{R}$ bornée dans $\mathbb{R}$.
Étant donnée une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \overline{\mathbb{R}}^{\mathbb{N}}$, on définit la limite supérieure et la limite inférieure de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$\limsup_{n\to+\infty} u_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} \left(\sup_{k\geq n}(u_k) \right) \in \overline{\mathbb{R}}$$

$$\liminf_{n\to+\infty} u_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left(\inf_{k\geq n}(u_k) \right) \in \overline{\mathbb{R}}.$$

1.I. Définition et premières propositions

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \overline{\mathbb{R}}^{\mathbb{N}}$.

1.1. Expliquer pourquoi les limites inférieures et supérieures sont bien définies.

1.2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose

$$s_n = \sup_{k\geq n}(u_k).$$

Montrer que la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et converge vers $\limsup_{n\to+\infty} u_n$.
Énoncer sans la démontrer une proposition similaire pour la limite inférieure.

1.3. Montrer que

$$\liminf_{n\to+\infty} u_n \leq \limsup_{n\to+\infty} u_n.$$

1.4. Soit $M \in \overline{\mathbb{R}}$.
Montrer que **si** à partir d'un certain rang $u_n \leq M$ **alors** $\limsup_{n\to+\infty} u_n \leq M$.
Énoncer sans la démontrer une proposition similaire pour la limite inférieure.

1.5. On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée **ssi** $\limsup_{n\to+\infty} u_n \in \mathbb{R}$ et $\liminf_{n\to+\infty} u_n \in \mathbb{R}$.

Par simplicité on traitera dans le reste du devoir de suites bornées, c'est à dire par **1.5.** de limites supérieures et inférieures finies.
Les résultats s'étendent néanmoins (quand cela a un sens) au limites supérieurs et inférieurs infinies.

1.II. Lien avec opérations

1.6. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ deux suites bornées.
Montrer que

$$\left(\text{ À Partir d'un Certain Rang , } \quad u_n \leq v_n\right) \Rightarrow \left(\limsup_{n\to+\infty} u_n \leq \limsup_{n\to+\infty} v_n\right).$$

Énoncer sans la démontrer une propostion similaire pour la limite inférieure.

1.7. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ deux suites bornées.
Montrer que

1.7.1.

$$\limsup_{n\to+\infty}(u_n + v_n) \leq \limsup_{n\to+\infty}(u_n) + \limsup_{n\to+\infty}(v_n).$$

1.7.2. Pour tout $\lambda > 0$,

$$\limsup_{n\to+\infty}(\lambda u_n) = \lambda \limsup_{n\to+\infty}(u_n).$$

1.7.3.

$$\limsup_{n\to+\infty}(-u_n) = -\liminf_{n\to+\infty}(u_n).$$

1.8. Énoncer sans les démontrer des propositions similaires pour la limite inférieure.

1.9. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ deux suites bornées **positives**. Montrer que

$$\limsup_{n\to+\infty}(u_n \times v_n) \leq \limsup_{n\to+\infty}(u_n) \times \limsup_{n\to+\infty}(v_n).$$

Énoncer sans la démontrer une propostion similaire pour la limite inférieure.

1.III. Lien avec les limites et valeurs d'adhérences

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée.

1.10. Soit $L \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$L = \limsup_{n\to+\infty} u_n \quad \Leftrightarrow \begin{cases} \forall \lambda > L, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \leq \lambda \\ \quad \text{et} \\ \forall \lambda < L, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N, u_n \geq \lambda \end{cases}$$

Énoncer sans la démontrer une proposition similaire pour la limite inférieure.

1.11. On pose $\mathrm{Adh}((u_n)_{n\in\mathbb{N}})$ l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, c'est à dire

$$\mathrm{Adh}((u_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \left\{\alpha \in \mathbb{R} \mid \exists \varphi \text{ extractrice}, u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \alpha\right\}$$

Montrer que

$$\limsup_{n\to+\infty} u_n = \max\left(\mathrm{Adh}((u_n)_{n\in\mathbb{N}})\right).$$

Énoncer sans la démontrer une proposition similaire pour la limite inférieure.

1.12. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.
Montrer

$$\left(\lim_{n\to+\infty} u_n = \alpha\right) \Leftrightarrow \left(\limsup_{n\to+\infty} u_n = \alpha \text{ et } \liminf_{n\to+\infty} u_n = \alpha\right).$$

1.13. Commenter.