En cas d'erreur de corrigé, n'hésitez pas à me le signaler.

Contexte

Ce problème introduit les notions classiques de limites supérieures et limites inférieurs (lim sup et lim inf), et démontre quelques propositions les concernant.
Ces notions généralisant en fait celles de limites, facilitant ainsi de nombreux résultats théoriques et calculs.

Remarque: ce sujet proposait l'étude d'une nouvelle notion la lim sup (et la lim inf). Une des difficultés résidait en l'identification des caractérisations de cette lim sup, caractérisations permettant ensuite de démontrer les propriétés.
En pratique, ici plusieurs caractérisations étaient proposées (définition, **1.2.**, **1.10.**, **1.11.**), et chacune permet de résoudre tout le problème. Cette correction varie volontairement les caractérisations au cours des questions.

1. Classique: Limite supérieure et limite inférieure

On rappelle que l'on note $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ la droite numérique achevée.
Par abus de notation, on dira qu'une suite d'éléments de $\overline{R}$ est bornée si il s'agit d'une suite d'éléments de $\mathbb{R}$ bornée dans $\mathbb{R}$.
Étant donnée une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \overline{\mathbb{R}}^{\mathbb{N}}$, on définit la limite supérieure et la limite inférieure de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$\limsup_{n\to+\infty} u_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} \left(\sup_{k\geq n}(u_k) \right) \in \overline{\mathbb{R}}$$

$$\liminf_{n\to+\infty} u_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left(\inf_{k\geq n}(u_k) \right) \in \overline{\mathbb{R}}.$$

1.I. Définition et premières propositions

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \overline{\mathbb{R}}^{\mathbb{N}}$.
1.1. Expliquer pourquoi les limites inférieures et supérieures sont bien définies.

Dans $\overline{\mathbb{R}}$ tout ensemble admet un sup et un inf, d'où la bonne définition.

1.2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose

$$s_n = \sup_{k\geq n}(u_k).$$

Montrer que la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et converge vers $\limsup_{n\to+\infty} u_n$.
Énoncer sans la démontrer une proposition similaire pour la limite inférieure.

Soit $n \in \mathbb{N}$.
Comme pour tout k, $k \geq n+1 \Rightarrow k \geq n$, on a $\{u_k, k \geq n+1\} \subset \{u_k,\ k \geq n\}$ et donc

$$\sup_{k\geq n+1}(u_k) \leq \sup_{k\geq n}(u_k)$$

c'est à dire

$$s_{n+1} \leq s_n.$$

Comme c'est le cas pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a bien que $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
Par le théorème de limite monotone on a donc $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite (finie ou infinie) et

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \inf_{k\in\mathbb{N}}(s_k)$$

et donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} s_n = \limsup_{n\to+\infty} u_n.}$$

De même en posant pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$i_n = \inf_{k \geq n}(u_k)$$

on obtient $(i_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $\boxed{i_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \liminf_{n\in\mathbb{N}} u_n}$.

Remarque: cette propriété justifie l'appellation de «lim-sup». En effet on a montré que

$$\boxed{\limsup_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \sup_{k\geq n} u_k}.$$

1.3. Montrer que

$$\liminf_{n\to+\infty} u_n \leq \limsup_{n\to+\infty} u_n.$$

Soient p et q deux entiers.
Avec $m = \max(p, q)$ on a

- Comme $m \geq p$, $\sup_{k\geq p}(u_k) \geq u_m$.
- Comme $m \geq q$, $\inf_{k\geq q}(u_k) \leq u_m$.

et par conséquent on obtient

$$\inf_{k\geq q}(u_k) \leq \sup_{k\geq p}(u_k).$$

Soit $p \in \mathbb{N}$. On a

$$\forall q \in \mathbb{N}, \quad \inf_{k\geq q}(u_k) \leq \underbrace{\sup_{k\geq p}(u_k)}_{\text{indépendant de } q}.$$

et donc par passage sup (le sup est plus petit que tous les majorants)

$$\sup_{q\in\mathbb{N}} \left(\inf_{k\geq q}(u_k) \right) \leq \sup_{k\geq p}(u_k).$$

On a donc

$$\forall p \in \mathbb{N}, \underbrace{\sup_{q\in\mathbb{N}} \left(\inf_{k\geq q}(u_k) \right)}_{\text{indépendant de } p} \leq \sup_{k\geq p}(u_k)$$

et donc par passage à l'inf (l'inf est le plus grand des minorants)

$$\sup_{q\in\mathbb{N}} \left(\inf_{k\geq q}(u_k) \right) \leq \inf_{p\in\mathbb{N}} \left(\sup_{k\geq p}(u_k) \right)$$

c'est à dire

$$\boxed{\liminf_{n\to+\infty} u_n \leq \limsup_{n\to+\infty} u_n}.$$

Remarque: on a ici utilisé la définition avec sup et inf, une variante (plus rapide) est d'utiliser la **1.2.** pour passer à la limite $n \to +\infty$ l'inégalité large

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \inf_{k\geq n} u_k \leq \sup_{k\geq n} u_k.$$

1.4. Soit $M \in \overline{\mathbb{R}}$.
Montrer que **si** à partir d'un certain rang $u_n \leq M$ **alors** $\limsup_{n\to+\infty} u_n \leq M$.
Énoncer sans la démontrer une proposition similaire pour la limite inférieure.

Soit N un rang tel que $\forall k \geq N$, $u_k \leq M$.
Alors

$$\forall k \geq N, u_k \leq M$$

et donc par passage au sup (la borne supérieure est plus petit que tout majorant)

$$\sup_{k\geq N}(u_k) \leq M$$

et donc en particulier (comme la borne inférieure est un minorant)

$$\inf_{n\in\mathbb{N}}(\sup_{k\geq N})(u_k) \leq M$$

c'est à dire

$$\boxed{\limsup_{n\to+\infty} u_n \leq M}.$$

De même on a, pour tout $m \in \overline{\mathbb{R}}$, $\boxed{\textbf{si à partir d'un certain rang } m \leq u_n \textbf{ alors } m \leq \liminf_{n\to+\infty} u_n}$.
Remarque: Il s'agit de cas particuliers de passage à la lim sup des inégalités larges, cf question **1.6.**.

1.5. On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée **ssi** $\limsup_{n\to+\infty} u_n \in \mathbb{R}$ et $\liminf_{n\to+\infty} u_n \in \mathbb{R}$.

- $\boxed{\Rightarrow}$ Supposons $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée et soit $(m, M) \in \mathbb{R}^2$ tel

$$\forall n \in \mathbb{N},\ m \leq u_n \leq M.$$

Alors par la question **1.4.** (et la question **1.3.**) on a

$$m \leq \liminf_{n\to+\infty} u_n \leq \limsup_{n\to+\infty} u_n \leq M$$

et donc en particulier $\boxed{\limsup_{n\to+\infty} u_n \in \mathbb{R} \text{ et } \liminf_{n\to+\infty} u_n \in \mathbb{R}}$.

- $\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que $\limsup_{n\to+\infty} u_n \in \mathbb{R}$ et $\liminf_{n\to+\infty} u_n \in \mathbb{R}$.
Soit $M \in \mathbb{R}$ tel que

$$M > \limsup_{n\to+\infty} u_n = \inf_{n\in\mathbb{N}}(\sup_{k\geq n}(u_k)).$$

(Un tel M existe car tout nombre réel admet un nombre réel strictement supérieur.)
Par définition de la borne inférieure, M n'est donc pas un minorant de $(\sup_{k\geq n}(u_k))_{n\in\mathbb{N}}$ et donc

$$\exists n \in \mathbb{N}, \sup_{k\geq n}(u_k) < M$$

et donc M majore la suite $(u_k)_{k\geq n}$. En particulier $(u_k)_{k\geq n}$ est majorée. Comme une suite majorée à partir d'un certain rang est majorée, on en déduit que $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est majorée.
De même soit $m \in \mathbb{R}$ tel que

$$m < \liminf_{n\to+\infty} u_n = \sup_{n\in\mathbb{N}}(\inf_{k\geq n}(u_k)).$$

Par définition de la borne supérieure, m n'est donc pas un majorant de $(\inf_{k\geq n}(u_k))_{n\in\mathbb{N}}$ et donc

$$\exists n \in \mathbb{N}, \inf_{k\geq n}(u_k) > m$$

et donc m minore la suite $(u_k)_{k\geq n}$. En particulier $(u_k)_{k\geq n}$ est minorée. Comme une suite minorée à partir d'un certain rang est minorée, on en déduit que $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est minorée.
Et donc on a bien $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée.}}$
Remarque: ici on redémontre en fait une partie de la caractérisation de la question **1.10.**.

Par simplicité on traitera dans le reste du devoir de suites bornées, c'est à dire par **1.5.** de limites supérieures et inférieures finies.
Les résultats s'étendent néanmoins (quand cela a un sens) au limites supérieurs et inférieurs infinies.

1.II. Lien avec opérations

1.6. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ deux suites bornées.
Montrer que

$$\left(\text{ À Partir d'un Certain Rang },\ \ u_n \leq v_n\right) \Rightarrow \left(\limsup_{n\to+\infty} u_n \leq \limsup_{n\to+\infty} v_n\right).$$

Énoncer sans la démontrer une propostion similaire pour la limite inférieure.

Supposons que ÀPCR, $u_n \leq v_n$.
Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall k \geq N, u_k \leq v_k.$$

Alors, à $n \geq N$ fixé on obtient comme le sup est un majorant

$$\forall n \geq N, \forall k \geq n, u_k \leq \sup_{k \geq n}(v_k)$$

d'où par par passage au sup (le sup est plus petit que tout majorant)

$$\forall n \geq N, \ \sup_{k \geq n}(u_k) \leq \sup_{k \geq n}(v_k).$$

Or, par la question **1.2.**, les deux suites $\left(\sup_{k \geq n}(u_k)\right)_{n \in \mathbb{N}}$ et $\left(\sup_{k \geq n}(v_k)\right)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers respectivement $\limsup_{n \to +\infty}(u_n)$ et $\limsup_{n \to +\infty}(v_n)$, donc par passage à la limite des inégalités larges,

$$\boxed{\limsup_{n \to +\infty} u_n \leq \limsup_{n \to +\infty} v_n}.$$

De même on a

$$\boxed{\left(\text{ À Partir d'un Certain Rang }, \quad u_n \leq v_n \right) \Rightarrow \left(\liminf_{n \to +\infty} u_n \leq \liminf_{n \to +\infty} v_n \right)}.$$

1.7. Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ deux suites bornées.
Montrer que

1.7.1.

$$\limsup_{n \to +\infty}(u_n + v_n) \leq \limsup_{n \to +\infty}(u_n) + \limsup_{n \to +\infty}(v_n).$$

Soit $n \in \mathbb{N}$.
On a pour (le sup est un majorant)

$$\forall k \geq n, \quad u_k + v_k \leq \sup_{k \geq n}(u_k) + \sup_{k \geq n}(v_k)$$

et donc par passage au sup (le sup est plus petit que tout majorant),

$$\sup_{k \geq n}(u_k + v_k) \leq \sup_{k \geq n}(u_k) + \sup_{k \geq n}(v_k).$$

Or par la question **1.2.** tous les termes convergent quand $n \to +\infty$ et par passage à la limite et opérations sur les limites on a

$$\lim_{n \to +\infty} \sup_{k \geq n}(u_k + v_k) \leq \lim_{n \to +\infty} \sup_{k \geq n}(u_k) + \lim_{n \to +\infty} \sup_{k \geq n}(v_k).$$

donc

$$\boxed{\limsup_{n \to +\infty}(u_n + v_n) \leq \limsup_{n \to +\infty}(u_n) + \limsup_{n \to +\infty}(v_n)}.$$

1.7.2. Pour tout $\lambda > 0$,

$$\limsup_{n \to +\infty}(\lambda u_n) = \lambda \limsup_{n \to +\infty}(u_n).$$

Soit $\lambda > 0$.
Come $\lambda > 0$, on a (règles de calcls sur les sup et inf)

$$\inf_{n \in \mathbb{N}} \left(\sup_{k \geq n}(\lambda u_k) \right) = \inf_{n \in \mathbb{N}} \left(\lambda \sup_{k \geq n}(u_k) \right) = \lambda \inf_{n \in \mathbb{N}} \left(\sup_{k \geq n}(u_k) \right)$$

d'où

$$\boxed{\limsup_{n \to +\infty}(\lambda u_n) = \lambda \limsup_{n \to +\infty}(u_n).}$$

Remarque: on aurait aussi pu écrire que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sup_{k \geq n}(\lambda u_k) = \lambda \sup_{k \geq n}(u_k)$$

puis passer à la limite.

1.7.3.

$$\limsup_{n \to +\infty}(-u_n) = -\liminf_{n \to +\infty}(u_n).$$

On a (règles de calculs sur les sup et inf)

$$\inf_{n\in\mathbb{N}}\left(\sup_{k\geq n}(-u_k)\right)=\inf_{n\in\mathbb{N}}\left(-\inf_{k\geq n}(u_k)\right)=-\sup_{n\in\mathbb{N}}\left(\inf_{k\geq n}(u_k)\right)$$

d'où

$$\boxed{\limsup_{n\to+\infty}(-u_n)=-\liminf_{n\to+\infty}(u_n).}$$

1.8. Énoncer sans les démontrer des propositions similaires pour la limite inférieure.

On a de même

$$\liminf_{n\to+\infty}(u_n+v_n)\geq\liminf_{n\to+\infty}(u_n)+\liminf_{n\to+\infty}(v_n)$$

$$\forall\lambda>0,\quad\liminf_{n\to+\infty}(\lambda u_n)=\lambda\liminf_{n\to+\infty}(u_n)$$

$$\liminf_{n\to+\infty}(-u_n)=-\limsup_{n\to+\infty}(u_n).$$

Remarque: La question **1.7.3.** permet par ailleurs de justifier toutes les propositions sur la lim inf à partir de celles sur la lim sup. En effet

$$\liminf_{n\to+\infty}u_n=-\limsup_{n\to+\infty}(-u_n).$$

1.9. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ deux suites bornées **positives**. Montrer que

$$\limsup_{n\to+\infty}(u_n\times v_n)\leq\limsup_{n\to+\infty}(u_n)\times\limsup_{n\to+\infty}(v_n).$$

Énoncer sans la démontrer une propostion similaire pour la limite inférieure.

Soit $n\in\mathbb{N}$.
Pour tout $k\geq n$ on a

$$0\leq u_k\leq\sup_{k\geq n}(u_k)$$

$$0\leq v_k\leq\sup_{k\geq n}(v_k)$$

d'où par produit d'inégalités positives on obtient

$$\forall k\geq n,\ 0\leq u_kv_k\leq\sup_{k\geq n}(u_k)\times\sup_{k\geq n}(v_k)$$

et par passage au sup (sur $k\geq n$),

$$0\leq\sup_{k\geq n}(u_kv_k)\leq\sup_{k\geq n}(u_k)\times\sup_{k\geq n}(v_k).$$

Comme par la question **1.2.** tous les termes convergent lorsque $n\to+\infty$, par passage à la limite des inégalités larges et opérations sur les limites,

$$0\leq\lim_{n\to+\infty}\sup_{k\geq n}(u_kv_k)\leq\left(\lim_{n\to+\infty}\sup_{k\geq n}(u_k)\right)\times\left(\lim_{n\to+\infty}\sup_{k\geq n}(v_k)\right)$$

c'est à dire

$$\boxed{0\leq\limsup_{n\to+\infty}(u_n\times v_n)\leq\limsup_{n\to+\infty}(u_n)\times\limsup_{n\to+\infty}(v_n)}.$$

1.III. Lien avec les limites et valeurs d'adhérences

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée.

1.10. Soit $L\in\mathbb{R}$. Montrer que

$$L=\limsup_{n\to+\infty}u_n\quad\Leftrightarrow\begin{cases}\forall\lambda>L,\exists N\in\mathbb{N},\forall n\geq N,u_n\leq\lambda\\ \quad\text{et}\\ \forall\lambda<L,\forall N\in\mathbb{N},\exists n\geq N,u_n\geq\lambda\end{cases}$$

Énoncer sans la démontrer une proposition similaire pour la limite inférieure.

- $\boxed{\Rightarrow}$ Supposons $L = \limsup_{n\to+\infty} u_n$.
  ▷ Soit $\lambda > L$ c'est à dire
  $$\lambda > \inf_{N\in\mathbb{N}} \left(\sup_{n\geq N} u_n \right).$$
  Par définition de la borne inférieure, on a donc
  $$\exists N \in \mathbb{N},\ \sup_{n\geq N} u_n \leq \lambda$$
  c'est à dire par définition de la borne supérieure
  $$\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ u_n \leq \lambda.$$
  On a donc bien montré
  $$\boxed{\forall \lambda > L, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \leq \lambda}.$$
  ▷ Soit $\lambda < L$ c'est à dire
  $$\lambda < \inf_{N\in\mathbb{N}} \left(\sup_{n\geq N} u_n \right).$$
  La borne inférieure étant un minorant, on a donc
  $$\forall N \in \mathbb{N},\ \lambda \leq \sup_{n\geq N} u_n$$
  et donc, par définition de la borne supérieure
  $$\forall N \in \mathbb{N},\ \exists n \geq N,\ \lambda \leq u_n.$$
  On a donc bien montré
  $$\boxed{\forall \lambda < L, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N, u_n \geq \lambda}.$$
- $\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que $\forall \lambda > L, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \leq \lambda$ et $\forall \lambda < L, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N, u_n \geq \lambda$.
  ▷ Soit $\lambda > L$.
  Alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall k \geq N, u_n \leq \lambda$ et donc d'après la question **1.4.** on a $\limsup_{n\to+\infty} u_n \leq \lambda$.
  On a donc montré
  $$\forall \lambda > L,\ \lambda \geq \limsup_{n\to+\infty} u_n$$
  et donc
  $$\boxed{\limsup_{n\to+\infty} u_n \leq L.}$$
  (Car si ce n'est pas le cas avec $\lambda = \frac{L+\limsup_{n\to+\infty} u_n}{2}$ on a $\lambda > L$ et $\lambda < \limsup_{n\to+\infty} u_n$, faire un schéma.)
  ▷ Soit $\lambda < L$.
  Soit $N \in \mathbb{N}$. Alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \geq \lambda$ et donc, en particulier
  $$\sup_{n\geq N} u_n \geq \lambda.$$
  Comme c'est le cas pour tout $N \in \mathbb{N}$ par passage à la borne inférieure (ou passage à la limite)
  $$\limsup_{n\to+\infty} u_n \geq \lambda.$$
  On a donc montré
  $$\forall \lambda < L,\ \lambda \leq \limsup_{n\to+\infty} u_n$$
  et donc
  $$\boxed{\limsup_{n\to+\infty} u_n \geq L.}$$
  (Car si ce n'est pas le cas avec $\lambda = \frac{L+\limsup_{n\to+\infty} u_n}{2}$ on a $\lambda < L$ et $\lambda > \limsup_{n\to+\infty} u_n$, faire un schéma.)
  On a donc bien montré que sous ces hypothèses,
  $$\boxed{\limsup_{n\to+\infty} u_n = L.}$$
  De même pour la borne inférieure on a

$$L = \liminf_{n\to+\infty} u_n \quad \Leftrightarrow \begin{cases} \forall \lambda < L, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \geq \lambda \\ \quad \text{et} \\ \forall \lambda > L, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N, u_n \leq \lambda \end{cases}$$

1.11. On pose $\mathrm{Adh}((u_n)_{n\in\mathbb{N}})$ l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, c'est à dire

$$\mathrm{Adh}((u_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \left\{ \alpha \in \mathbb{R} \mid \exists \varphi \text{ extractrice}, u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \alpha \right\}$$

Montrer que

$$\limsup_{n\to+\infty} u_n = \max\left(\mathrm{Adh}((u_n)_{n\in\mathbb{N}})\right).$$

Énoncer sans la démontrer une proposition similaire pour la limite inférieure.

Posons $L = \limsup_{n\to+\infty}(u_n)$.
Remarque: à ce stade il y un large choix pour la caractérisation de L: la définition initiale, celle de la question **1.2.**, ou celle de la question **1.10.**. À titre d'exemple on utilisera ici la question **1.2.** pour un point et **1.10.** pour un autre, mais chaque point peut se traiter avec n'importe quelle caractérisation.

- Montrons que L est un majorant de l'ensemble des valeurs d'adhérence. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons

$$s_n = \sup_{k\geq n}(u_k).$$

Soit φ une extractrice et $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \alpha$.
Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{\varphi(n)} \leq \sup_{k\geq\varphi(n)}(u_k) = s_{\varphi(n)}.$$

Or $(s_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers L, comme suite extraite de la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers L (par **1.2.**). Les deux termes convergent donc, et par passage à la limite des inégalités larges

$$\alpha \leq L.$$

On a donc $\boxed{L \text{ majore } \mathrm{Adh}((u_n)_{n\in\mathbb{N}})}$.

- Montrons que L est une valeur d'adhérence.
On remarque que la caractérisation de **1.10.** implique en particulier que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \leq L + \varepsilon$$
$$\forall \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N, u_n \geq L - \varepsilon$$

et donc en particulier

$$\forall \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N, u_n \leq L + \varepsilon$$
$$\forall \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N, u_n \geq L - \varepsilon$$

(car pour tout prédicat $\mathcal{P}(n)$, $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \mathcal{P}(n)$ implique $\forall M \in \mathbb{N}, \exists n \geq M, \mathcal{P}(n)$). Et donc

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N, L - \varepsilon \leq u_n \leq L + \varepsilon}. \tag{1}$$

Il s'agit alors bien d'une caractérisation de « $\boxed{L \text{ est une valeur d'adhérence}}$ ».
Remarque: Rappelons la démonstration que cette caractérisation implique que L est une valeur d'adhérence.
On construit une extractrice φ récurrence suivante:
▷ On choisit $\varphi(0) \geq 0$ tel que $L - 1 \leq u_{\varphi(0)} \leq L + 1$, ce qui est possible par (1)
▷ Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\varphi(n)$ construit.
Par (1) il existe alors $k \geq \varphi(n) + 1$ tel que $L - \frac{1}{n+2} \leq u_k \leq L + \frac{1}{n+2}$. On choisit $\varphi(n+1)$ un tel entier.
Alors la suite $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est bien définie, est une extractrice (car pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n+1) \geq \varphi(n) + 1$) et vérifie

$$\forall n \in \mathbb{N},\ L - \frac{1}{n+1} \leq u_{\varphi(n)} \leq L + \frac{1}{n+1}$$

et donc par encadrement,

$$u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} L.$$

Et donc on a bien

$$\boxed{\limsup_{n\to+\infty} u_n = \max\left(\mathrm{Adh}((u_n)_{n\in\mathbb{N}})\right)}.$$

De même

$$\boxed{\liminf_{n\to+\infty} u_n = \min\left(\mathrm{Adh}((u_n)_{n\in\mathbb{N}})\right)}.$$

Remarque: on remarque qu'en fait dans cette preuve est contenue une preuve de Bolzano-Weierstrass. En effet on a montré (sans utiliser Bolzano-Weierstrass) que la lim sup (et la lim inf) est une valeur d'adhérence, et donc en particulier, qu'il existe des valeurs d'adhérence !

1.12. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.
Montrer

$$\left(\lim_{n\to+\infty} u_n = \alpha\right) \Leftrightarrow \left(\limsup_{n\to+\infty} u_n = \alpha \text{ et } \liminf_{n\to+\infty} u_n = \alpha\right).$$

Remarque: encore une fois, ici toutes les caractérisations fonctionnent. Pour varier (mais ce n'est pas la seule façon) utilisons la question **1.11.** et la caractérisation de la convergence par l'unicité de la valeur d'adhérence.

- $\boxed{\Rightarrow}$ Supposons $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α.
  Alors α est l'une et unique valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et comme
  $$\min(\{\alpha\}) = \alpha \text{ et } \max(\{\alpha\}) = \alpha.$$
  On en déduit
  $$\boxed{\limsup_{n\to+\infty} u_n = \alpha \text{ et } \liminf_{n\to+\infty} u_n = \alpha}.$$
- $\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que la lim sup et lim inf soient égales à α.
  Alors
  $$\alpha = \min\left(\mathrm{Adh}\left((u_n)_{n\in\mathbb{N}}\right)\right) = \max\left(\mathrm{Adh}\left((u_n)_{n\in\mathbb{N}}\right)\right) = \alpha$$
  et donc
  $$\mathrm{Adh}\left((u_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) = \{\alpha\}.$$
  Donc il existe une unique valeur d'adhérence et comme la suite est bornée on en déduit
  $$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \alpha}.$$

1.13. Commenter.

Les notions de lim inf/lim sup se comportent de manière similaire à des limites et des infimums/supremum, par exemple par les règles de calculs ou les nombreuses caractérisations.
De plus, contrairement à la lim qui n'existe pas forcément, les lim inf et lim sup sont toujours bien définies.
En regardant (pour une suite bornée) l'ensemble des valeurs d'adhérence, l'objet «lim» correspond au cas particulier où l'ensemble des valeurs d'adhérences est un singleton. En tant que respectivement plus grande et plus petit valeurs d'adhérence, les objets «lim sup» et «lim inf» sont donc une généralisation.
Enfin d'un calcul de lim inf et de lim sup on peut se ramener à celui de limite (il s'agit de la question **1.12.**).