Knaster-Tarski et Cantor-Bernstein

On portera une attention particulière à **la rédaction** et à **la propreté** de la copie.
En particulier tout **graphe ou schéma** pertinent et correctement annoté sera **valorisé**.
Les résultats devront être mis en valeur dès que possible.

Indiquez sur votre copie le temps approximatif pris pour le devoir.

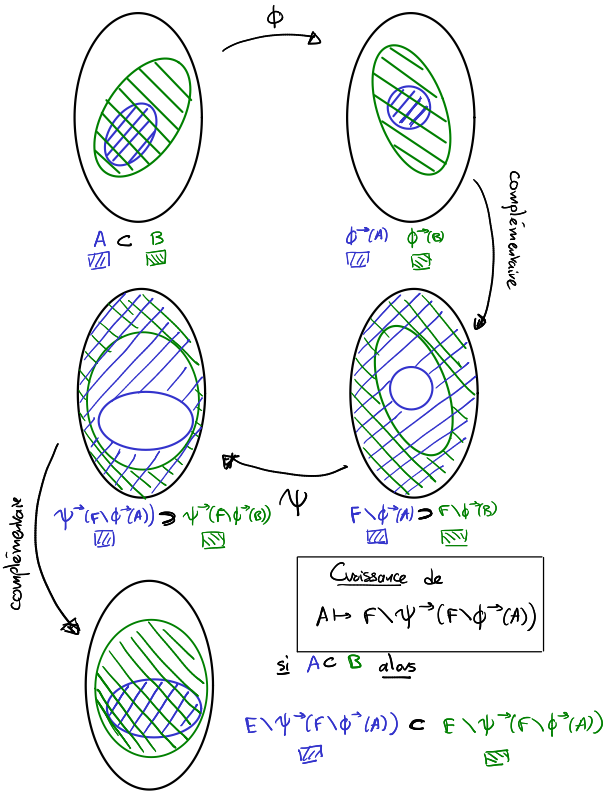
Contexte

La première partie de ce devoir propose de démontrer un cas particulier du théorème de Knaster-Tarski:

> Soit E un ensemble et $f \in \mathcal{F}(\mathcal{P}(E), \mathcal{P}(E))$ croissante pour l'inclusion.
> Alors f admet un point fixe.

La seconde partie utilise le résultat pour démontrer le fameux **théorème de Cantor-Bernstein**:

> Soient E et F deux ensembles.
> **Si** il existe une injection de E dans F et une injection de F dans E **alors** il existe une bijection entre E et F.



On remarquera qu'étant donné un ensemble E, la relation $\subset$ est une **relation d'ordre** (c'est à dire une relation réflexive, transitive et antisymétrique).

En particulier étant donnés E et F deux ensembles et $g\colon \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(F)$, on dit que g est croissante (pour l'inclusion) ssi

$$\forall (X, Y) \in (\mathcal{P}(E))^2,\ X \subset Y \Rightarrow g(X) \subset g(Y).$$

De plus étant donnée une famille $(A_i)_{i\in I}$ de parties de E l'ensemble

- $\bigcup_{i\in I} A_i$ est le **supremum** de la famille c'est à dire qu'il s'agit du plus petit de tous les majorants de la famille, i.e

$$\forall j \in I,\ A_j \subset \bigcup_{i\in I} A_i \quad \text{et} \quad \forall B \in \mathcal{P}(E), (\forall j \in I,\ A_j \subset B) \Rightarrow \bigcup_{i\in I} A_i \subset B.$$

- $\bigcap_{i\in I} A_i$ est **l'infimum** de la famille c'est à dire qu'il s'agit du plus grand de tous les minorants de la famille, i.e

$$\forall j \in I,\ \bigcap_{i\in I} A_i \subset A_j \quad \text{et} \quad \forall B \in \mathcal{P}(E), (\forall j \in I,\ B \subset A_j) \Rightarrow B \subset \bigcap_{i\in I} A_i.$$

---

1 Un cas particulier de Knaster-Tarski

On considère E un ensemble et $f\colon \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$ une application croissante (pour l'inclusion). On cherche à montrer que f admet un point fixe, c'est à dire qu'il existe une partie A de E telle que $f(A) = A$.
On pose

$$F = \{X \subset E \mid X \subset f(X)\}$$

et

$$A = \bigcup_{X \in F} X.$$

C'est à dire A le supremum de l'ensemble des ensembles plus petits (i.e inclus) dans leur image par f.
1.1. Montrer que $A \subset f(A)$.
1.2. Montrer que $f(A) \subset A$.
1.3. Conclure.

2 Théorème de Cantor-Bernstein

On considère E et F deux ensembles, $\phi\colon E \to F$ et $\psi\colon F \to E$ injectives.
2.1. On suppose dans cette question qu'il existe une partie $A \subset E$ telle que

$$E\backslash\psi^{\to}\left(F\backslash\phi^{\to}(A)\right) = A.$$

2.1.1. Faire un schéma de cette situation.
2.1.2. Expliquer pourquoi

$$\widetilde{\phi}\colon \begin{array}{l} A \to \phi^{\to}(A) \\ x \mapsto \phi(x) \end{array} \quad \text{et} \quad \widetilde{\psi}\colon \begin{array}{r} F\backslash\phi^{\to}(A) \to E\backslash A \\ x \mapsto \psi(x) \end{array}$$

sont bijectives.
2.1.3. En déduire une bijection entre E et F.
2.2. On considère l'application

$$u\colon \begin{array}{c} \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E) \\ X \mapsto E\backslash\psi^{\to}\left(F\backslash\phi^{\to}(X)\right). \end{array}$$

2.2.1. Montrer que

- $X \mapsto \phi^{\to}(X)$ est croissante,
- $Y \mapsto F\backslash Y$ est décroissante,
- $Y \mapsto \psi^{\to}(Y)$ est croissante,
- $X \mapsto E\backslash X$ est décroissante.

2.2.2. Montrer que u est croissante.
2.2.3. Conclure qu'il existe une bijection entre E et F.