En cas d'erreur de corrigé, n'hésitez pas à me le signaler.

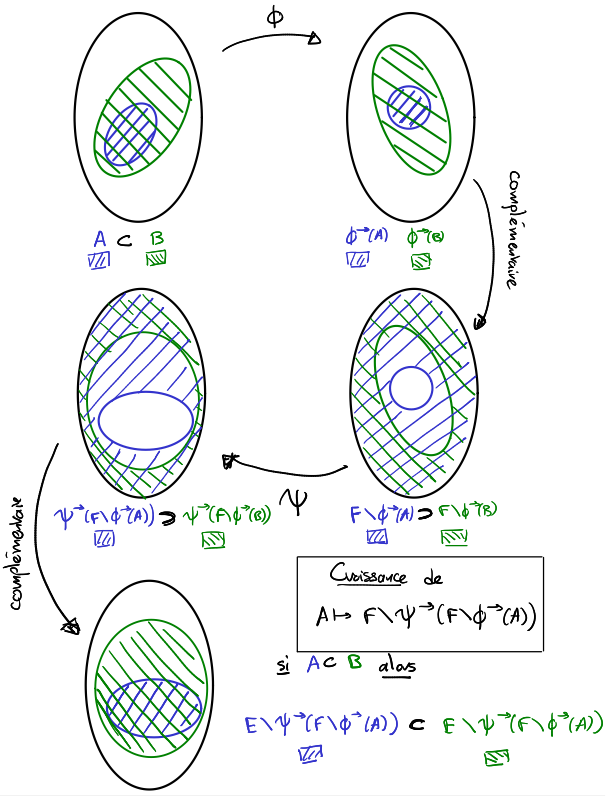
Contexte

La première partie de ce devoir propose de démontrer un cas particulier du théorème de Knaster-Tarski:

> Soit E un ensemble et $f \in \mathcal{F}(\mathcal{P}(E), \mathcal{P}(E))$ croissante pour l'inclusion.
> Alors f admet un point fixe.

La seconde partie utilise le résultat pour démontrer le fameux **théorème de Cantor-Bernstein**:

> Soient E et F deux ensembles.
> **Si** il existe une injection de E dans F et une injection de F dans E **alors** il existe une bijection entre E et F.



On remarquera qu'étant donné un ensemble E, la relation $\subset$ est une **relation d'ordre** (c'est à dire une relation réflexive, transitive et antisymétrique).

En particulier étant donnés E et F deux ensembles et $g\colon \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(F)$, on dit que g est croissante (pour l'inclusion) ssi

$$\forall (X, Y) \in (\mathcal{P}(E))^2,\ X \subset Y \Rightarrow g(X) \subset g(Y).$$

De plus étant donnée une famille $(A_i)_{i\in I}$ de parties de E l'ensemble

- $\bigcup_{i\in I} A_i$ est le **supremum** de la famille c'est à dire qu'il s'agit du plus petit de tous les majorants de la famille, i.e

$$\forall j \in I,\ A_j \subset \bigcup_{i\in I} A_i \quad \text{et} \quad \forall B \in \mathcal{P}(E), (\forall j \in I,\ A_j \subset B) \Rightarrow \bigcup_{i\in I} A_i \subset B.$$

- $\bigcap_{i\in I} A_i$ est **l'infimum** de la famille c'est à dire qu'il s'agit du plus grand de tous les minorants de la famille, i.e

$$\forall j \in I,\ \bigcap_{i\in I} A_i \subset A_j \quad \text{et} \quad \forall B \in \mathcal{P}(E), (\forall j \in I,\ B \subset A_j) \Rightarrow B \subset \bigcap_{i\in I} A_i.$$

---

1 Un cas particulier de Knaster-Tarski

On considère E un ensemble et $f\colon \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$ une application croissante (pour l'inclusion). On cherche à montrer que f admet un point fixe, c'est à dire qu'il existe une partie A de E telle que $f(A) = A$.
On pose

$$F = \{X \subset E \mid X \subset f(X)\}$$

et

$$A = \bigcup_{X\in F} X.$$

C'est à dire A le supremum de l'ensemble des ensembles plus petits (i.e inclus) dans leur image par f.

1.1. Montrer que $A \subset f(A)$.

Soit $X \in F$.
Par définition de F

$$X \subset f(X).$$

De plus par définition de A

$$X \subset A$$

et donc par croissance de f on déduit

$$X \subset f(A).$$

On a donc

$$\forall X \in F,\ X \subset f(A)$$

ce qui par définition de l'union (supremum) donne

$$\boxed{A \subset f(A)}.$$

1.2. Montrer que $f(A) \subset A$.

D'après la question **1.1.** on a

$$A \subset f(A)$$

et donc par croissance de f on déduit

$$f(A) \subset f\left(f(A)\right)$$

c'est à dire

$$f(A) \in F.$$

Par définition de l'union (supremum) on a donc

$$\boxed{f(A) \subset A}.$$

1.3. Conclure.

Par les deux questions précédentes $A \subset f(A)$ et $f(A) \subset A$.
On a donc par double inclusion (antisymétrie)

$$\boxed{A = f(A)}.$$

C'est à dire A est un point fixe de f.
Remarques

- On observe que la preuve utilisée ici (ainsi que l'énoncé) n'utilise que l'existence du supremum pour la relation d'ordre de l'inclusion et s'étend par conséquent à toute relation d'ordre où toute partie admet un supremum.
  Il suffit de poser exactement de même pour $f : E \to E$ où $(E, \leq)$ est un ensemble ordonné où toute partie admet un supremum,
  $$a = \sup\left(\{x \in E \mid x \leq f(x)\}\right).$$
  Par exemple toute fonction croissante d'un segment dans lui même admet un point fixe.
- On peut montrer que le point fixe ainsi obtenu est le plus grand (pour la relation d'ordre) point fixe.
  Pour obtenir le plus petit on aurait pu de manière duale considérer
  $$\bigcap_{\substack{X \subset E \\ f(X) \subset X}} X.$$

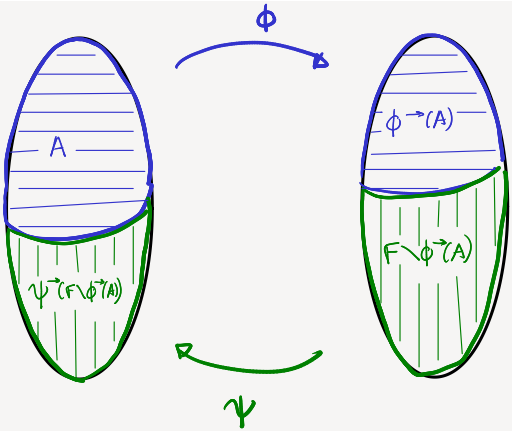
2 Théorème de Cantor-Bernstein

On considère E et F deux ensembles, $\phi\colon E \to F$ et $\psi\colon F \to E$ injectives.
2.1. On suppose dans cette question qu'il existe une partie $A \subset E$ telle que

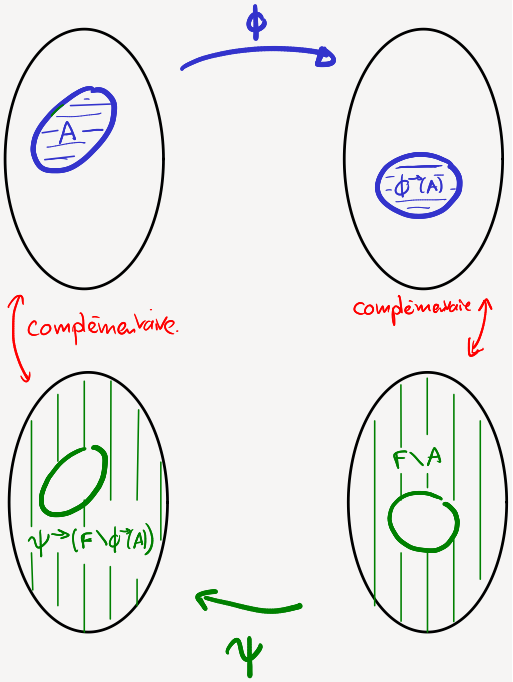
$$E \backslash \psi^{\to}\left(F \backslash \phi^{\to}(A)\right) = A.$$

2.1.1. Faire un schéma de cette situation.

On obtient le schéma suivant:



un autre schéma possible étant:



2.1.2. Expliquer pourquoi

$$\widetilde{\phi}\colon \begin{array}{l} A \to \phi^{\to}(A) \\ x \mapsto \phi(x) \end{array} \quad \text{et} \quad \widetilde{\psi}\colon \begin{array}{l} F\backslash\phi^{\to}(A) \to E\backslash A \\ x \mapsto \psi(x) \end{array}$$

sont bijectives.

- L'application $\widetilde{\phi}$ est bien définie et surjective par définition de l'image directe, et est injective comme restriction (et corestriction) d'une application injective.

  Par conséquent $\boxed{\widetilde{\phi} \text{ est bien définie et bijective}}$.
- On a $E\backslash\psi^{\to}(F\backslash\phi^{\to}(A)) = A$ ce qui revient par passage au complémentaire par rapport à E à

$$\psi^{\to}(F\backslash\phi^{\to}(A)) = E\backslash A.$$

  Par conséquent l'application $\widetilde{\psi}$ est bien définie et surjective par définition de l'image directe, et est injective comme restriction (et corestriction) d'une application injective.

  D'où $\boxed{\widetilde{\psi} \text{ est bien définie et bijective}}$.

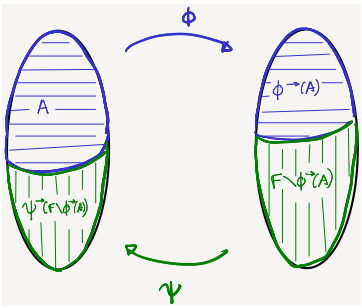
2.1.3. En déduire une bijection entre E et F.

Considérons

$$\Xi\colon \begin{array}{l} E \to F \\ x \mapsto \begin{cases} \widetilde{\phi}(x) & \text{si } x \in A \\ \widetilde{\psi}^{-1}(x) & \text{si } x \notin A. \end{cases} \end{array}$$

Alors $\boxed{\Xi : E \to F \text{ est bijective}}$.
En effet elle admet comme réciproque

$$\begin{array}{l} F \to E \\ y \mapsto \begin{cases} \widetilde{\phi}^{-1}(y) & \text{si } y \in \phi^{\to}(A) \\ \widetilde{\psi}(y) & \text{si } y \notin \phi^{\to}(A). \end{cases} \end{array}$$



2.2. On considère l'application

$$u\colon \begin{array}{l} \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E) \\ X \mapsto E\backslash\psi^{\to}(F\backslash\phi^{\to}(X)). \end{array}$$

2.2.1. Montrer que

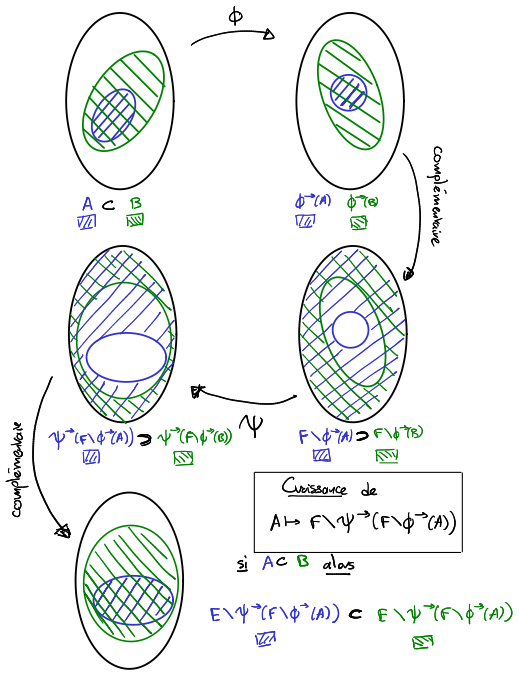
- $X \mapsto \phi^{\rightarrow}(X)$ est croissante,
- $Y \mapsto F \backslash Y$ est décroissante,

- $Y \mapsto \psi^{\rightarrow}(Y)$ est croissante,
- $X \mapsto E \backslash X$ est décroissante.

- Soient $X_1, X_2 \in \mathcal{P}(E)$ tels que $X_1 \subset X_2$.
  Soit $y \in \phi^{\rightarrow}(X_1)$. Alors il existe $x \in X_1$ tel que $y = \phi(x)$ (fixons le). Comme $X_1 \subset X_2$ on a donc $y = \phi(x)$ avec $x \in X_2$. Donc $\phi^{\rightarrow}(X_1) \subset \phi^{\rightarrow}(X_2)$.
  D'où $\boxed{\phi^{\rightarrow} \text{ est croissante}}$.
- Exactement de même $\boxed{\psi^{\rightarrow} \text{ est croissante}}$ (on a démontré en fait que toute application image directe est croissante).
- Soient $X_1, X_2 \in \mathcal{P}(E)$ tels que $X_1 \subset X_2$.
  Alors $E \backslash X_2 \subset E \backslash X_1$.
  D'où $\boxed{X \mapsto E \backslash X \text{ est décroissante}}$.
- Exactement de même $\boxed{Y \mapsto F \backslash Y \text{ est décroissante}}$ (on a démontré en fait que toute application "complémentaire" est décroissante).

2.2.2. Montrer que u est croissante.

On a donc u composée d'une fonction croissante, d'une fonction décroissante, d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante.
Par conséquent (nombre pair de fonctions décroissantes et nombre quelconque de fonctions croissantes), $\boxed{u \text{ est croissante}}$.



2.2.3. Conclure qu'il existe une bijection entre E et F.

L'application u de la question **2.2.** étant croissante, par le théorème de Knaster-Tarski démontré à la partie 1 elle admet un point fixe, c'est à dire il existe $A \in \mathcal{P}(E)$ tel que $E \backslash \psi^{\rightarrow}(F \backslash \phi^{\rightarrow}(A)) = A$. Par la question **2.1.** on a donc

$\boxed{\text{Il existe une bijection entre } E \text{ et } F.}$