Irrationalité de π

On portera une attention particulière à **la rédaction** et à **la propreté** de la copie.
En particulier tout **graphe ou schéma** pertinent et correctement annoté sera **valorisé**.
Les résultats devront être mis en valeur dès que possible.

Indiquez sur votre copie le temps approximatif pris pour le devoir.

Contexte

Ce problème est issu du DM 23 de l'année 2022-2023 (dont la partie « méthode de Simpson » figure par ailleurs dans les archives). Son objectif est de démontrer que π est irrationnel, à l'aide de l'étude d'une suite d'intégrales.
La preuve repose sur l'introduction d'une famille de polynômes bien choisis, sur des intégrations par parties répétées, et sur un argument d'encadrement conduisant à une absurdité. Les prérequis sont l'étude de polynômes (degré, racines multiples et dérivées, binôme de Newton), l'intégration par parties et le raisonnement par récurrence, ainsi que les comparaisons de suites (croissances comparées).

---

1. Irrationalité de π

L'objectif de ce problème est de démontrer que π est irrationnel.
Dans la suite on suppose donc **par l'absurde** qu'il existe $(p, q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tel que

$$\pi = \frac{p}{q}.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$ on définit le polynôme P_n par

$$P_n(X) = \frac{1}{n!} X^n (p - qX)^n.$$

1.I. Étude d'un polynôme

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1.1. Déterminer le degré du polynôme P_n.

1.2. Montrer que

$$P_n(\pi - X) = P_n(X).$$

1.3. Déterminer les racines de P_n et leurs multiplicités respectives.
En déduire que $\forall d \in [\![0, n-1]\!]$, $P_n^{(d)}(0) = 0$ et $P_n^{(d)}(\pi) = 0$.

1.4. Montrer que

$$P_n = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k p^{n-k} q^k X^{n+k}.$$

1.5. En déduire que pour tout $d \in [\![n, 2n]\!]$

$$P_n^{(d)}(0) = \frac{d!}{n!} \binom{n}{d-n} (-1)^{d-n} p^{2n-d} q^{d-n}.$$

1.6. Montrer que $\forall d \in [\![n, 2n]\!]$

$$P_n^{(d)}(0) \in \mathbb{Z}$$

1.7. Montrer que $\forall d \in [\![n, 2n]\!]$

$$P_n^{(d)}(\pi) \in \mathbb{Z}$$

1.II. Étude d'une intégrale

Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose

$$I_n = \int_0^{\pi} P_n(t) \sin(t) \mathrm{d}t$$

1.8. En utilisant une intégration par parties montrer que

$$I_n = (P_n(\pi) + P_n(0)) + \int_0^\pi P_n^{(1)}(t)\cos(t)\mathrm{d}t$$

1.9. Montrer par récurrence sur $d \in \mathbb{N}$ que

$$\forall d \in \mathbb{N},\ I_n = \sum_{k=0}^{d}(-1)^k \left(P_n^{(2k)}(0) + P_n^{(2k)}(\pi)\right) + (-1)^d \int_0^\pi P_n^{(2d+1)}(t)\cos(t)\mathrm{d}t.$$

1.10. Calculer

$$\int_0^\pi P_n^{(2n+1)}(t)\cos(t)\mathrm{d}t.$$

1.11. Conclure que

$$\boxed{I_n \in \mathbb{Z}}.$$

1.III. Convergence d'une suite d'intégrales

1.12. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$\forall t \in [0,\pi],\ 0 \leq P_n(t) \leq \frac{1}{n!}\left(\frac{p^2}{4q}\right)^n$$

1.13. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$0 \leq I_n \leq \frac{2}{n!}\left(\frac{p^2}{4q}\right)^n.$$

1.14. Soit $\alpha > 0$. Montrer que

$$\alpha^n = o_{n\to+\infty}(n!)$$

1.15. Montrer que lorsque $n \to +\infty$,

$$\boxed{I_n \to 0}.$$

1.IV. Conclusion

1.16. En utilisant les questions **1.11.** et **1.15.** montrer qu'il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$

$$I_n = 0.$$

1.17. Montrer que $\forall n \geq N$, $P_n = 0$.

1.18. Conclure que

$$\boxed{\pi \notin \mathbb{Q}}.$$