En cas d'erreur de corrigé, n'hésitez pas à me le signaler.

Contexte

Ce problème est issu du DM 23 de l'année 2022-2023 (dont la partie « méthode de Simpson » figure par ailleurs dans les archives). Son objectif est de démontrer que π est irrationnel, à l'aide de l'étude d'une suite d'intégrales.
La preuve repose sur l'introduction d'une famille de polynômes bien choisis, sur des intégrations par parties répétées, et sur un argument d'encadrement conduisant à une absurdité. Les prérequis sont l'étude de polynômes (degré, racines multiples et dérivées, binôme de Newton), l'intégration par parties et le raisonnement par récurrence, ainsi que les comparaisons de suites (croissances comparées).

---

1. Irrationalité de π

L'objectif de ce problème est de démontrer que π est irrationnel.
Dans la suite on suppose donc **par l'absurde** qu'il existe $(p, q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tel que

$$\pi = \frac{p}{q}.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$ on définit le polynôme P_n par

$$P_n(X) = \frac{1}{n!} X^n (p - qX)^n.$$

1.I. Étude d'un polynôme

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1.1. Déterminer le degré du polynôme P_n.

Comme X^n est de degré n et que $(p - qX)^n$ est de degré n (car $q \neq 0$) on en déduit

$$\boxed{\deg(P_n) = 2n}.$$

1.2. Montrer que

$$P_n(\pi - X) = P_n(X).$$

On a

$$\begin{aligned} P_n(\pi - X) &= P_n\left(\frac{p}{q} - X\right) \\ &= \frac{1}{n!}\left(\frac{p}{q} - X\right)^n \left(p - q\left(\frac{p}{q} - X\right)\right)^n \\ &= \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{q}(p - qX)\right)^n (p - p + qX)^n \\ &= \frac{1}{n!}\frac{1}{q^n}(p - qX)^n q^n X^n \\ &= \frac{1}{n!}(p - qX)^n X^n \end{aligned}$$

et donc on a bien

$$\boxed{P_n(\pi - X) = P_n(X)}.$$

1.3. Déterminer les racines de P_n et leurs multiplicités respectives.
En déduire que $\forall d \in [\![0, n-1]\!]$, $P_n^{(d)}(0) = 0$ et $P_n^{(d)}(\pi) = 0$.

De par la factorisation de P_n

$$P_n(X) = \frac{(-1)^n q^n}{n!}(X - 0)^n \left(X - \frac{p}{q}\right)^n$$

on en déduit que $\boxed{\text{les racines de } P_n \text{ sont } 0 \text{ et } \pi \text{ de multiplicités respectives } n \text{ et } n}$.
Comme 0 et π sont racines de P d'ordres respectifs n et n on a par caractérisation par les dérivées des racines multiples

$$\boxed{\forall d \in [\![0, n-1]\!],\ P_n^{(d)}(0) = 0}$$

$$\boxed{\forall d \in [\![0, n-1]\!],\ P_n^{(d)}(\pi) = 0}$$

1.4. Montrer que

$$P_n = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k p^{n-k}q^k X^{n+k}.$$

Par le binôme de Newton on a

$$\begin{aligned} P_n(X) &= \frac{1}{n!}X^n(p-qX)^n \\ &= \frac{1}{n!}X^n\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^{n-k}(-qX)^k\right) \\ &= \frac{1}{n!}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^{n-k}(-1)^k q^k X^k X^n\right) \end{aligned}$$

c'est à dire

$$\boxed{P_n(X) = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k p^{n-k}q^k X^{n+k}}.$$

1.5. En déduire que pour tout $d \in [\![n, 2n]\!]$

$$P_n^{(d)}(0) = \frac{d!}{n!}\binom{n}{d-n}(-1)^{d-n}p^{2n-d}q^{d-n}.$$

De par la question précédente en effectuant le changement d'indice $j = k + n$ on a

$$P_n(X) = \sum_{j=n}^{2n}\underbrace{\frac{1}{n!}\binom{n}{j-n}(-1)^{(j-n)}p^{n-(j-n)}q^{(j-n)}}_{a_j}X^j.$$

Pour $d \in [\![n, 2n]\!]$ on obtient alors en dérivant d fois

$$P_n^{(d)}(X) = \sum_{j=d}^{2n} a_j j \times (j-1) \times \ldots (j-d+1)X^{j-d}$$

et en particulier

$$P_n^{(d)}(0) = d!a_d$$

ce qui peut se réécrire

$$\boxed{P_n^{(d)}(0) = \frac{d!}{n!}\binom{n}{d-n}(-1)^{d-n}p^{2n-d}q^{d-n}}.$$

1.6. Montrer que $\forall d \in [\![n, 2n]\!]$

$$P_n^{(d)}(0) \in \mathbb{Z}$$

Soit $d \in [\![n, 2n]\!]$ d'après la question précédente

$$P_n^{(d)}(0) = \frac{d!}{n!}\binom{n}{d-n}(-1)^{d-n}p^{2n-d}q^{d-n}.$$

De plus
- $\binom{n}{d-n} \in \mathbb{Z}$ comme coefficient binomial
- $(-1)^{d-n}p^{2n-d}q^{d-n} \in \mathbb{Z}$ car p et q sont entiers (ainsi que n et d)

- Et, comme $d \geq n$

$$\begin{aligned}\frac{d!}{n!} &= \frac{\prod_{k=1}^{d} k}{\prod_{k=1}^{n} k} \\ &= \frac{\left(\prod_{k=1}^{n} k\right)\left(\prod_{k=n+1}^{d} k\right)}{\prod_{k=1}^{n} k} \\ &= \prod_{k=n+1}^{d} k \quad k \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

(Alternativement $\frac{d!}{n!} = (d-n)!\binom{d}{n} \in \mathbb{Z}$)
et donc on obtient bien

$$\boxed{P_n^{(d)}(0) \in \mathbb{Z}}.$$

1.7. Montrer que $\forall d \in [\![n, 2n]\!]$

$$P_n^{(d)}(\pi) \in \mathbb{Z}$$

On a par la question **1.2.**

$$P_n(X) = P_n(\pi - X)$$

d'où pour tout $d \in \mathbb{N}$

$$P_n^{(d)}(X) = (-1)^d P_n^{(d)}(\pi - X)$$

et en particulier

$$P_n^{(d)}(\pi) = (-1)^d P_n^{(d)}(0)$$

et d'après la question précédente on a donc en particulier

$$\boxed{\forall d \in [\![n, 2n]\!],\ P_n^{(d)}(\pi) \in \mathbb{Z}}.$$

1.II. Étude d'une intégrale

Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose

$$I_n = \int_0^\pi P_n(t)\sin(t)\mathrm{d}t$$

1.8. En utilisant une intégration par parties montrer que

$$I_n = (P_n(\pi) + P_n(0)) + \int_0^\pi P_n^{(1)}(t)\cos(t)\mathrm{d}t$$

Avec

$$\begin{aligned} u(t) = P_n(t) \quad , \quad v'(t) &= \sin(t) \\ u'(t) = P_n'(t) \quad , \quad v(t) &= -\cos(t) \end{aligned}$$

on obtient en intégrant par parties

$$\begin{aligned}\int_0^\pi P_n(t)\sin(t)\mathrm{d}t &= [P_n(t)(-\cos(t))]_0^\pi - \int_0^\pi P_n'(t)(-\cos(t))\mathrm{d}t \\ &= P_n(\pi)\underbrace{(-\cos(\pi))}_{1} - P_n(0)\underbrace{(-\cos(0))}_{-1} + \int_0^\pi P_n'(t)\cos(t)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

c'est à dire

$$\boxed{I_n = (P_n(\pi) + P_n(0)) + \int_0^\pi P_n'(t)\cos(t)\mathrm{d}t}.$$

1.9. Montrer par récurrence sur $d \in \mathbb{N}$ que

$$\forall d \in \mathbb{N},\ I_n = \sum_{k=0}^{d}(-1)^k\left(P_n^{(2k)}(0) + P_n^{(2k)}(\pi)\right) + (-1)^d\int_0^\pi P_n^{(2d+1)}(t)\cos(t)\mathrm{d}t.$$

Pour $d \in \mathbb{N}$ soit $\mathcal{R}_d$ la proposition

$$\mathcal{R}_d : \quad I_n = \sum_{k=0}^{d} (-1)^k \left(P_n^{(2k)}(0) + P_n^{(2k)}(\pi) \right) + (-1)^d \int_0^\pi P_n^{(2d+1)}(t)\cos(t)\mathrm{d}t.$$

Montrons par récurrence sur $d \in \mathbb{N}$ que pour tout $d \in \mathbb{N}$, $\mathcal{R}_d$.

- **Initialisation:** Pour $d = 0$ d'après la question précédente on a

$$I_n = (P_n(\pi) + P_n(0)) + \int_0^\pi P_n^{(2\times 0+1)}(t)\cos(t)\mathrm{d}t$$

  ce qui est bien $\mathcal{R}_0$.
- **Hérédité:** Soit $d \in \mathbb{N}$ et supposons $\mathcal{R}_d$ vraie c'est à dire que

$$I_n = \sum_{k=0}^{d} (-1)^k \left(P_n^{(2k)}(0) + P_n^{(2k)}(\pi) \right) + (-1)^d \int_0^\pi P_n^{(2d+1)}(t)\cos(t)\mathrm{d}t.$$

  Alors en intégrant par parties

$$\begin{aligned}\int_0^\pi P_n^{(2d+1)}(t)\cos(t)\mathrm{d}t &= \left[P_n^{(2d+1)}\sin(t)\right]_0^\pi - \int_0^\pi P_n^{(2d+2)}(t)\sin(t)\mathrm{d}t \\ &= P_n^{(2d+1)}(\pi)\underbrace{\sin(\pi)}_{0} - P_n^{(2d+1)}(0)\underbrace{\sin(0)}_{0} - \int_0^\pi P_n^{(2d+2)}(t)\sin(t)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

  et en intégrant de nouveau par parties

$$\begin{aligned}&\int_0^\pi P_n^{(2d+1)}(t)\cos(t)\mathrm{d}t - \int_0^\pi P_n^{(2d+2)}(t)\sin(t)\mathrm{d}t \\ &\qquad = -\left(\left[P_n^{(2d+2)}(t)(-\cos(t))\right]_0^\pi - \int_0^\pi P_n^{(2d+3)}(t)(-\cos(t))\mathrm{d}t \right) \\ &\qquad = -P_n^{(2d+2)}(\pi) - P_n^{(2d+2)}(0) - \int_0^\pi P_n^{(2d+3)}(t)\cos(t)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

  et par conséquent

$$\begin{aligned}I_n &= \sum_{k=0}^{d} (-1)^k \left(P_n^{(2k)}(0) + P_n^{(2k)}(\pi) \right) + (-1)^d \left(-P_n^{(2d+2)}(\pi) - P_n^{(2d+2)}(0) - \int_0^\pi P_n^{(2d+3)}(t)\cos(t)\mathrm{d}t \right) \\ &= \sum_{k=0}^{d} (-1)^k \left(P_n^{(2k)}(0) + P_n^{(2k)}(\pi) \right) + (-1)^{d+1} \left(P_n^{(2(d+1))}(\pi) + P_n^{(2(d+1))}(0) \right) \\ &\quad + (-1)^{d+1} \int_0^\pi P_n^{(2(d+1)+1)}(t)\cos(t)\mathrm{d}t \\ &= \sum_{k=0}^{d+1} (-1)^k \left(P_n^{(2k)}(0) + P_n^{(2k)}(\pi) \right) \\ &\quad + (-1)^{d+1} \int_0^\pi P_n^{(2(d+1)+1)}(t)\cos(t)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

  c'est à dire $\mathcal{R}_{d+1}$.
- **Conclusion:** On a donc montré $\mathcal{R}_0$ et $\forall d \in \mathbb{N}$, $\mathcal{R}_d \Rightarrow \mathcal{R}_{d+1}$. Donc par récurrence, pour tout d on a $\mathcal{R}_d$ i.e

$$\boxed{\forall d \in \mathbb{N},\ I_n = \sum_{k=0}^{d} (-1)^k \left(P_n^{(2k)}(0) + P_n^{(2k)}(\pi) \right) + (-1)^d \int_0^\pi P_n^{(2d+1)}(t)\cos(t)\mathrm{d}t}.$$

1.10. Calculer

$$\int_0^\pi P_n^{(2n+1)}(t)\cos(t)\mathrm{d}t.$$

D'après la question **1.1.** on a $\deg(P_n) = 2n$.

Ainsi $\underline{P^{(2n+1)} = 0}$ et en particulier

$$\boxed{\int_0^\pi P_n^{(2n+1)}(t)\cos(t)\mathrm{d}t = 0}.$$

1.11. Conclure que

$$\boxed{I_n \in \mathbb{Z}}.$$

D'après la question **1.9.**, avec $d = n$ on a

$$I_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left(P_n^{(2k)}(0) + P_n^{(2k)}(\pi)\right) + (-1)^n\int_0^\pi P_n^{(2n+1)}(t)\cos(t)\mathrm{d}t$$

et donc d'après la question précédente

$$I_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left(P_n^{(2k)}(0) + P_n^{(2k)}(\pi)\right).$$

Or d'après la sous-section 1.I on a

$$\forall j \in [\![0, n-1]\!],\ P^{(j)}(0) = 0 \in \mathbb{Z},\quad P^{(j)}(\pi) = 0 \in \mathbb{Z}$$

$$\forall j \in [\![n, 2n]\!],\ P^{(j)}(0) \in \mathbb{Z},\quad P^{(j)}(\pi) \in \mathbb{Z}$$

d'où en particulier

$$\forall k \in [\![0, n]\!],\ P_n^{(2k)}(0) \in \mathbb{Z},\quad P_n^{(2k)}(\pi) \in \mathbb{Z}$$

d'où on déduit

$$\boxed{I_n \in \mathbb{Z}}.$$

1.III. Convergence d'une suite d'intégrales

1.12. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$\forall t \in [0,\pi],\ 0 \le P_n(t) \le \frac{1}{n!}\left(\frac{p^2}{4q}\right)^n$$

On a pour tout $t \in [0,\pi]$

$$\begin{aligned} P_n(t) &= \frac{1}{n!}t^n(p-qt)^n \\ &= \frac{1}{n!}\left(t(p-qt)\right)^n \end{aligned}$$

Or $t(p-qt)$ est un trinôme du second degré de racines 0 et π, pouvant s'écrire

$$t(p-qt) = -qt^2 + pt$$

son coefficient dominant $-q$ étant négatif il admet un maximum global en $\frac{-p}{2(-q)} = \frac{\pi}{2}$ et on a donc le tableau de variations

t	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$t(p-qt)$	0 ↗	$\frac{p^2}{4q}$	↘ 0

Par conséquent

$$\forall t \in [0,\pi],\ 0 \le t(p-qt) \le \frac{p^2}{4q}$$

par croissance de $y \mapsto y^n$ sur $\mathbb{R}_+$ on en déduit

$$\forall t \in [0,\pi],\ 0 \le \left(t(p-qt)\right)^n \le \left(\frac{p^2}{4q}\right)^n.$$

Et donc on a bien

$$\forall t \in [0,\pi],\ 0 \leq P_n(t) \leq \frac{1}{n!}\left(\frac{p^2}{4q}\right)^n$$

Remarque: on aurait pu aussi faire directement une étude de fonction sur P_n

1.13. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$0 \leq I_n \leq \frac{2}{n!}\left(\frac{p^2}{4q}\right)^n.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$
On a donc, comme $\forall t \in [0,\pi],\ 0 \leq \sin(t)$

$$\forall t \in [0,\pi], 0 \leq P_n(t)\sin(t) \leq \frac{1}{n!}\left(\frac{p^2}{4q}\right)^n \sin(t).$$

Par croissance de l'intégrale on obtient

$$0 \leq \int_0^\pi P_n(t)\sin(t)\mathrm{d}t \leq \int_0^\pi \frac{1}{n!}\left(\frac{p^2}{4q}\right)^n \sin(t)\mathrm{d}t$$

et comme

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \frac{1}{n!}\left(\frac{p^2}{4q}\right)^n \sin(t)\mathrm{d}t &= \frac{1}{n!}\left(\frac{p^2}{4q}\right)^n \int_0^\pi \sin(t)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{n!}\left(\frac{p^2}{4q}\right)^n \underbrace{[-\cos(t)]_0^\pi}_{2}\end{aligned}$$

on a bien

$$\boxed{0 \leq I_n \leq \frac{2}{n!}\left(\frac{p^2}{4q}\right)^n}.$$

1.14. Soit $\alpha > 0$. Montrer que

$$\alpha^n = o_{n\to+\infty}(n!)$$

De nombreuses méthodes sont possibles. On peut par exemple utiliser la formule de Stirling, montrer un encadrement pour n APCR ou bien constater qu'en posant pour $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \frac{\alpha^n}{n!}$$

on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 comme produit (télescopique) de termes convergeant vers 0 (cf TD de début d'année).

1.15. Montrer que lorsque $n \to +\infty$,

$$\boxed{I_n \to 0}.$$

On a donc pour tout n

$$\boxed{0 \leq I_n \leq \frac{2}{n!}\left(\frac{p^2}{4q}\right)^n}$$

et de plus, lorsque $n \to \infty$

$$\frac{2}{n!}\left(\frac{p^2}{4q}\right)^n \to 0.$$

Par encadrement on en déduit que lorsque $n \to +\infty$,

$$\boxed{I_n \to 0}.$$

1.IV. Conclusion

1.16. En utilisant les questions **1.11.** et **1.15.** montrer qu'il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$

$$I_n = 0.$$

Par la question **1.15.** on a, lorsque $n \to +\infty$, $I_n \to 0$.
Donc avec $\varepsilon = \frac{1}{2} > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N,\ |I_n - 0| \leq \frac{1}{2}$$

c'est à dire

$$\forall n \geq N,\ I_n \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right].$$

Mais de plus par **1.11.** on a

$$\forall n \geq N,\ I_n \in \mathbb{Z}.$$

Comme $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \cap \mathbb{Z} = \{0\}$ on en déduit

$$\boxed{\forall n \geq N,\ I_n = 0}.$$

1.17. Montrer que $\forall n \geq N,\ P_n = 0$.

Soit $n \geq N$, par la question précédente

$$\int_0^\pi P_n(t)\sin(t)\mathrm{d}t = 0$$

mais, comme de plus

$$\forall t \in [0, \pi],\ P_n(t)\sin(t) \geq 0$$

et que l'intégrale d'une fonction positive est nulle ssi la fonction est nulle on obtient

$$\forall t \in [0, \pi],\ P_n(t)\sin(t) = 0$$

et comme sin ne s'annule pas sur $]0, \pi[$ on a

$$\forall t \in]0, \pi[,\ P_n(t) = 0.$$

Comme $]0, \pi[$ est infini, P_n admet donc une infinité de racines et donc

$$\boxed{P_n = 0}.$$

1.18. Conclure que

$$\boxed{\pi \notin \mathbb{Q}}.$$

On a donc $\forall n \geq N,\ P_n = 0$ et $\deg(P_n) = 2n$ ce qui est **absurde**.
L'hypothèse de départ est donc fausse et donc

$$\boxed{\pi \notin \mathbb{Q}}.$$