On portera une attention particulière à **la rédaction** et à **la propreté** de la copie.
En particulier tout **graphe ou schéma** pertinent et correctement annoté sera **valorisé**.
Les résultats devront être mis en valeur dès que possible.

Indiquez sur votre copie le temps approximatif pris pour le devoir.

Contexte

L'objectif de ce DM est d'étudier un cas particulier d'inégalité de concentration, c'est à dire des inégalités permettant de quantifier l'écart de variables aléatoires à leur espérance.

1. Une inégalité de concentration

Soit $p \in]0,1[$.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on considère X_n une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et p.
L'objectif de ce problème est de quantifier l'écart de $\frac{X_n}{n}$ à son espérance lorsque $n \to +\infty$.

1.I. Premières bornes

1.1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Quelle est la valeur de $\mathbb{E}\left[\frac{X_n}{n}\right]$?
1.2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $t > 0$ on a

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{X_n}{n} - p\right| \geq t\right) \leq \frac{p(1-p)}{nt^2}.$$

1.3. En déduire que, en particulier, pour tout $t > 0$

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{X_n}{n} - p\right| \geq t\right) = 0.$$

On cherche dans le reste du problème un majorant plus précis que celui de la question **1.2.**.
À cet effet on fixe dans la suite $t > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

1.II. Méthode de Chernoff

1.4. Montrer que pour tout $\lambda > 0$

$$\mathbb{P}\left(\left(\frac{X_n}{n} - p\right) \geq t\right) \leq \frac{\mathbb{E}\left[e^{\lambda(X_n - np)}\right]}{e^{\lambda nt}}.$$

1.5. En déduire que pour tout $\lambda > 0$

$$\mathbb{P}\left(\left(\frac{X_n}{n} - p\right) \geq t\right) \leq \frac{e^{-\lambda np}\left((1-p) + pe^{\lambda}\right)^n}{e^{\lambda nt}}.$$

1.6. On pose désormais, pour $\lambda > 0$,

$$\psi_p(\lambda) = \ln\left(1 + p\left(e^{\lambda} - 1\right)\right) - \lambda p.$$

Montrer que

$$\forall \lambda > 0, \quad \mathbb{P}\left(\left(\frac{X_n}{n} - p\right) \geq t\right) \leq e^{-n(\lambda t - \psi_p(\lambda))}.$$

1.III. Minoration de la transformée de Legendre de ψ_p

On rappelle que la fonction ψ_p a été définie dans la partie précédente par

$$\psi_p : \begin{array}{l}]0,+\infty[\to \mathbb{R} \\ \lambda \mapsto \ln\left(1 + p\left(e^{\lambda} - 1\right)\right) - \lambda p. \end{array}$$

1.7. Montrer que pour tout $x > -1$

$$\ln(1+x) \leq x$$

et en déduire que pour tout $\lambda > 0$

$$\psi_p(\lambda) \leq p\left(e^{\lambda} - 1 - \lambda\right).$$

1.8. Montrer que pour tout $\xi > 0$,

$$\max_{\lambda \in]0,+\infty[} \Big(\lambda\xi - (e^{\lambda} - 1 - \lambda)\Big) = (\xi+1)\ln(\xi+1) - \xi.$$

1.9. Montrer que pour tout $\xi > 0$

$$(\xi+1)\ln(\xi+1) - \xi \geq \frac{\xi^2}{2\left(1 + \frac{\xi}{3}\right)}.$$

Indication: une étude de fonction est calculatoire mais donne le résultat recherché.

1.10. Déduire des questions précédentes que

$$\sup_{\lambda \in]0,+\infty[} (\lambda t - \psi_p(\lambda)) \geq \frac{t^2}{2\left(p + \frac{t}{3}\right)}$$

1.IV. Une inégalité de concentration de Bernstein

1.11. À l'aide des questions précédentes montrer que

$$\mathbb{P}\left(\left(\frac{X_n}{n} - p\right) \geq t\right) \leq e^{-n\frac{t^2}{2\left(p+\frac{t}{3}\right)}}$$

1.12. Conclure que

$$\boxed{\mathbb{P}\left(\left|\frac{X_n}{n} - p\right| \geq t\right) \leq e^{-n\frac{t^2}{2\left(p+\frac{t}{3}\right)}} + e^{-n\frac{t^2}{2\left((1-p)+\frac{t}{3}\right)}}}.$$

1.13. Comparer brièvement les inégalité obtenues aux questions **1.2.** et **1.12.**.