En cas d'erreur de corrigé, n'hésitez pas à me le signaler.

Contexte

L'objectif de ce DM est d'étudier un cas particulier d'inégalité de concentration, c'est à dire des inégalités permettant de quantifier l'écart de variables aléatoires à leur espérance.

1. Une inégalité de concentration

Soit $p \in]0,1[$.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on considère X_n une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et p.
L'objectif de ce problème est de quantifier l'écart de $\frac{X_n}{n}$ à son espérance lorsque $n \to +\infty$.

1.I. Premières bornes

1.1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Quelle est la valeur de $\mathbb{E}\left[\frac{X_n}{n}\right]$?

On sait (loi usuelle) que $\mathbb{E}[X_n] = np$, et par linéarité de l'espérance $\mathbb{E}\left[\frac{1}{n}X_n\right] = \frac{1}{n}E[X_n]$.
Donc

$$\boxed{\mathbb{E}\left[\frac{X_n}{n}\right] = p}.$$

1.2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $t > 0$ on a

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{X_n}{n} - p\right| \geq t\right) \leq \frac{p(1-p)}{nt^2}.$$

Par l'inégalité de Tchebychev on a

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{X_n}{n} - \mathbb{E}\left[\frac{X_n}{n}\right]\right| \geq t\right) \leq \frac{\mathrm{Var}\left(\frac{X_n}{n}\right)}{t^2}.$$

Et de plus

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}\left(\frac{X_n}{n}\right) &= \left(\frac{1}{n}\right)^2 \mathrm{Var}(X_n) \qquad \text{(variance d'une transformation affine)}\\ &= \frac{1}{n^2}np(1-p) \qquad \text{(variance d'une binomiale)}\end{aligned}$$

et donc

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{X_n}{n} - \mathbb{E}\left[\frac{X_n}{n}\right]\right| \geq t\right) \leq \frac{\frac{np(1-p)}{n^2}}{t^2}$$

et comme d'après la question **1.1.**, $\mathbb{E}\left[\frac{X_n}{n}\right] = p$ on a bien

$$\boxed{\mathbb{P}\left(\left|\frac{X_n}{n} - p\right| \geq t\right) \leq \frac{p(1-p)}{nt^2}}.$$

1.3. En déduire que, en particulier, pour tout $t > 0$

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{X_n}{n} - p\right| \geq t\right) = 0.$$

Soit $t > 0$.
On a pour tout n

$$0 \leq \mathbb{P}\left(\left|\frac{X_n}{n} - p\right| \geq t\right) \leq \frac{p(1-p)}{nt^2}$$

et comme

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{p(1-p)}{t^2}\frac{1}{n} = \frac{p(1-p)}{t^2} \times 0 = 0$$

on en déduit **par encadrement**

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{X_n}{n} - p\right| \geq t\right) = 0}.$$

On cherche dans le reste du problème un majorant plus précis que celui de la question **1.2.**.
À cet effet on fixe dans la suite $t > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

1.II. Méthode de Chernoff

1.4. Montrer que pour tout $\lambda > 0$

$$\mathbb{P}\left(\left(\frac{X_n}{n} - p\right) \geq t\right) \leq \frac{\mathbb{E}\left[e^{\lambda(X_n - np)}\right]}{e^{\lambda nt}}.$$

Soit $\lambda > 0$. On a comme λ et n sont positives

$$\left(\frac{X_n}{n} - p \geq t\right) \;=\; (\lambda(X_n - np) \geq \lambda nt)$$

par **stricte croissance** de exp on a de plus

$$(\lambda(X_n - np) \geq \lambda nt) \;=\; \left(e^{\lambda(X_n - np)} \geq e^{\lambda nt}\right)$$

et donc, en particulier

$$\mathbb{P}\left(\left(\frac{X_n}{n} - p\right) \geq t\right) = \mathbb{P}\left(e^{\lambda(X_n - np)} \geq e^{\lambda nt}\right).$$

Et par **inégalité de Markov**

$$\boxed{\mathbb{P}\left(e^{\lambda(X_n - np)} \geq e^{\lambda nt}\right) \leq \frac{\mathbb{E}\left[e^{\lambda(X_n - np)}\right]}{e^{\lambda nt}}}.$$

1.5. En déduire que pour tout $\lambda > 0$

$$\mathbb{P}\left(\left(\frac{X_n}{n} - p\right) \geq t\right) \leq \frac{e^{-\lambda np}\left((1-p) + pe^{\lambda}\right)^n}{e^{\lambda nt}}.$$

Soit $\lambda > 0$.
On a, par **formule de transfert**

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[e^{\lambda(X_n - np)}\right] &= \sum_{k=0}^{n} e^{\lambda(k-np)} \mathbb{P}(X_n = k) \\
&= \sum_{k=0}^{n} e^{\lambda(k-np)} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= e^{-\lambda np} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(pe^{\lambda}\right)^k (1-p)^{n-k} \\
&= e^{-\lambda np}\left((1-p) + pe^{\lambda}\right)^n
\end{aligned}$$

et donc d'après la question précédente on a bien

$$\boxed{\mathbb{P}\left(\left(\frac{X_n}{n} - p\right) \geq t\right) \leq \frac{e^{-\lambda np}\left((1-p) + pe^{\lambda}\right)^n}{e^{\lambda nt}}}.$$

1.6. On pose désormais, pour $\lambda > 0$,

$$\psi_p(\lambda) = \ln\left(1 + p\left(e^{\lambda} - 1\right)\right) - \lambda p.$$

Montrer que

$$\forall \lambda > 0, \quad \mathbb{P}\left(\left(\frac{X_n}{n} - p\right) \geq t\right) \leq e^{-n(\lambda t - \psi_p(\lambda))}.$$

On a pour tout $\lambda > 0$

$$\begin{aligned} e^{-\lambda np}\left((1-p)+pe^{\lambda}\right)^n &= \exp(-\lambda np) \times \exp\left(n\ln\left(1-p+pe^{\lambda}\right)\right) \\ &= \exp\left(-n\lambda p + n\ln\left(1+p\left(e^{\lambda}-1\right)\right)\right) \\ &= \exp(n\psi_p(\lambda)) \end{aligned}$$

par conséquent

$$\begin{aligned} e^{-\lambda nt}\, e^{-\lambda np}\left((1-p)+pe^{\lambda}\right)^n &= e^{-n\lambda t} e^{n\psi_p(\lambda)} \\ &= e^{-n(\lambda t - \psi_p(\lambda))} \end{aligned}$$

et l'inégalité de la question précédente est se réécrit donc

$$\boxed{\forall \lambda > 0, \quad \mathbb{P}\left(\left(\frac{X_n}{n} - p\right) \geq t\right) \leq e^{-n(\lambda t - \psi_p(\lambda))}}.$$

1.III. Minoration de la transformée de Legendre de ψ_p

On rappelle que la fonction ψ_p a été définie dans la partie précédente par

$$\begin{aligned} \psi_p : \;]0,+\infty[&\to \mathbb{R} \\ \lambda &\mapsto \ln\left(1+p\left(e^{\lambda}-1\right)\right) - \lambda p. \end{aligned}$$

1.7. Montrer que pour tout $x > -1$

$$\ln(1+x) \leq x$$

et en déduire que pour tout $\lambda > 0$

$$\psi_p(\lambda) \leq p\left(e^{\lambda} - 1 - \lambda\right).$$

Étudions la fonction

$$\begin{aligned} f : \;]-1,+\infty[&\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \ln(1+x) - x. \end{aligned}$$

On a f dérivable comme combinaison linéaire de fonctions usuelles et

$$\forall x > -1, \; f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{x}{1+x}.$$

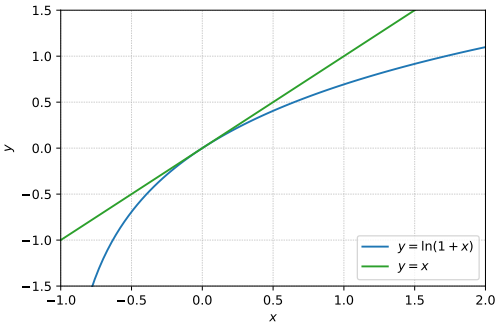
Donc $f'(x)$ est du même signe que x. De plus $f(0) = \ln(1) - 0 = 0$ et on obtient par conséquent le tableau de variations

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖	$-\infty$ ↘	0	↗ $-\infty$	

et donc

$$\forall x > -1, \; \boxed{\ln(1+x) \leq x}.$$

Graphiquement la courbe d'équation $y = \ln(1+x)$ est en dessous de sa tangente en 0.



Soit $\lambda > 0$. En appliquant cette inégalité à $x = p(e^\lambda - 1) \in]-1, +\infty[$ (car $-p \leq p(e^\lambda - 1)$) on obtient alors

$$\psi_p(\lambda) \leq p(e^\lambda - 1) - \lambda p$$

c'est à dire

$$\boxed{\psi_p(\lambda) \leq p\left(e^\lambda - 1 - \lambda\right)}.$$

1.8. Montrer que pour tout $\xi > 0$,

$$\max_{\lambda \in]0,+\infty[} \Big(\lambda\xi - (e^\lambda - 1 - \lambda)\Big) = (\xi+1)\ln(\xi+1) - \xi.$$

Soit $\xi > 0$ et posons

$$\phi : \begin{array}{c}]0,+\infty[\to \mathbb{R} \\ \lambda \mapsto \lambda\xi - (e^\lambda - 1 - \lambda) \end{array}.$$

La fonction ϕ est dérivable comme combinaison linéaire de fonctions usuelles et pour tout $\lambda > 0$

$$\phi'(\lambda) = (\xi+1) - e^\lambda$$

et est donc positif si $\lambda \leq \ln(1+\xi)$ et négatif si $\lambda \geq \ln(1+\xi)$.
Comme de plus

$$\begin{aligned} \phi(\ln(1+\xi)) &= \ln(1+\xi)\xi - ((1+\xi) - 1 - \ln(1+\xi)) \\ &= (\xi+1)\ln(\xi+1) - \xi \end{aligned}$$

on obtient le tableau de variations suivant

λ	0		$\ln(\xi+1)$		$+\infty$
$\phi'(\lambda)$		$-$	0	$+$	
$\phi(\lambda)$	0	↗	$(\xi+1)\ln(\xi+1) - \xi$	↘	$-\infty$

et on a donc bien

$$\boxed{\max_{\lambda \in]0,+\infty[} \big(\lambda\xi - (e^\lambda - 1 - \lambda)\big) = (\xi+1)\ln(\xi+1) - \xi}.$$

1.9. Montrer que pour tout $\xi > 0$

$$(\xi+1)\ln(\xi+1) - \xi \geq \frac{\xi^2}{2\left(1 + \frac{\xi}{3}\right)}.$$

Indication: une étude de fonction est calculatoire mais donne le résultat recherché.

Étudions

$$g : \begin{array}{c} [0,+\infty[\to \mathbb{R} \\ \xi \mapsto (\xi+1)\ln(\xi+1) - \xi - \dfrac{\xi^2}{2\left(1 + \frac{\xi}{3}\right)} \end{array}.$$

On a g est deux fois dérivables comme combinaison linéaire de fonctions usuelles et $\forall \xi \geq 0$

$$g'(\xi) = \ln(\xi+1) - \frac{\xi+1}{\xi+1} + 1 - \frac{\frac{2\xi}{2}\left(1 + \frac{\xi}{3}\right) - \frac{\xi^2}{2}\frac{1}{3}}{\left(1 + \frac{\xi}{3}\right)^2}$$

ce qui donne en simplifiant

$$g'(\xi) = \ln(\xi+1) - \frac{\xi + \frac{\xi^2}{6}}{\left(1 + \frac{\xi}{3}\right)^2}$$

en dérivant de nouveau par rapport à ξ

$$\begin{aligned}
g''(\xi) &= \frac{1}{1+\xi} - \frac{1}{\left(1+\frac{\xi}{3}\right)^3}\left(\left(1+\frac{2\xi}{6}\right)\left(1+\frac{\xi}{3}\right) - 2\left(\xi+\frac{\xi^2}{6}\right)\frac{1}{3}\right) \\
&= \frac{1}{1+\xi} - \frac{1}{\left(1+\frac{\xi}{3}\right)^3}\left(\left(1+\frac{2}{3}\xi+\frac{1}{9}\xi^2\right) - \left(\frac{2}{3}\xi+\frac{1}{9}\xi^2\right)\right) \\
&= \frac{1}{1+\xi} - \frac{1}{\left(1+\frac{\xi}{3}\right)^3} \\
&= \frac{\left(1+\frac{\xi}{3}\right)^3 - (1+\xi)}{\left(1+\frac{\xi}{3}\right)^3(1+\xi)} \\
&= \frac{1+3\frac{\xi}{3}+3\left(\frac{\xi}{3}\right)^2+\left(\frac{\xi}{3}\right)^3-(1+\xi)}{\left(1+\frac{\xi}{3}\right)^3(1+\xi)} \\
&= \frac{\frac{\xi^2}{3}+\frac{\xi^3}{27}}{\left(1+\frac{\xi}{3}\right)^3(1+\xi)}
\end{aligned}$$

et donc pour $\xi \geq 0$ on a $g''(\xi) \geq 0$.
Par conséquent comme de plus

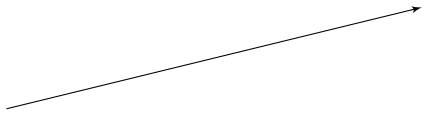
$$g(0) = (0+1)\ln(1+0) - 0 - \frac{0^2}{(1+0)} = 0$$

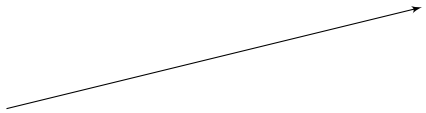
et

$$g'(0) = \ln(1+0) - \frac{0+0}{(1+0)^3} = 0$$

on obtient le tableau de variations suivant

ξ	0 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$g''(\xi)$	$+$
$g'(\xi)$	$0 \nearrow$
$g'(\xi)$	$+$
$g(\xi)$	$0 \nearrow$





et en particulier on a bien $g(\xi) \geq 0$ pour tout $\xi \geq 0$ c'est à dire

$$\forall \xi \geq 0, \quad \boxed{(\xi+1)\ln(\xi+1) - \xi \geq \frac{\xi^2}{2\left(1+\frac{\xi}{3}\right)}}.$$

1.10. Déduire des questions précédentes que

$$\sup_{\lambda \in]0,+\infty[} (\lambda t - \psi_p(\lambda)) \geq \frac{t^2}{2\left(p+\frac{t}{3}\right)}$$

On a d'après la question **1.7.** pour tout $\lambda > 0$

$$\lambda t - \psi_p(\lambda) \geq \lambda t - p(e^\lambda - 1 - \lambda)$$

c'est à dire

$$\lambda t - \psi_p(\lambda) \geq p\left(\lambda\left(\frac{t}{p}\right) - (e^\lambda - 1 - \lambda)\right)$$

Comme cela est vrai pour tout λ, en passant au sup sur λ ($p > 0$), on obtient avec

$$\xi = \frac{t}{p}$$

d'après la question **1.8.**,

$$\sup_{\lambda\in]0,+\infty[}(\lambda t - \psi_p(\lambda)) \geq p\left((\xi+1)\ln(\xi+1) - \xi\right)$$

et d'après la question **1.9.** on a donc en particulier

$$\sup_{\lambda\in]0,+\infty[}(\lambda t - \psi_p(\lambda)) \geq p\left(\frac{\xi^2}{2\left(1+\frac{\xi}{3}\right)}\right)$$

c'est à dire

$$\sup_{\lambda\in]0,+\infty[}(\lambda t - \psi_p(\lambda)) \geq p\left(\frac{\left(\frac{t}{p}\right)^2}{2\left(1+\frac{\left(\frac{t}{p}\right)}{3}\right)}\right)$$

ce qui se réécrit aussi

$$\boxed{\sup_{\lambda\in]0,+\infty[}(\lambda t - \psi_p(\lambda)) \geq \frac{t^2}{2\left(p+\frac{t}{3}\right)}}.$$

1.IV. Une inégalité de concentration de Bernstein

1.11. À l'aide des questions précédentes montrer que

$$\mathbb{P}\left(\left(\frac{X_n}{n} - p\right) \geq t\right) \leq e^{-n\frac{t^2}{2\left(p+\frac{t}{3}\right)}}$$

Par la question **1.6.** on a

$$\forall\lambda > 0,\quad \mathbb{P}\left(\left(\frac{X_n}{n} - p\right) \geq t\right) \leq e^{-n(\lambda t - \psi_p(\lambda))}$$

comme c'est le cas pour tout λ, on a en passant à l'inf en λ

$$\mathbb{P}\left(\left(\frac{X_n}{n} - p\right) \geq t\right) \leq \inf_{\lambda\in]0,+\infty[}\left(e^{-n(\lambda t - \psi_p(\lambda))}\right).$$

Or par **continuité** et **décroissance** de $y \mapsto e^{-ny}$ on a

$$\inf_{\lambda\in]0,+\infty[}\left(\exp\left(-n(\lambda t - \psi_p(\lambda))\right)\right) = \exp(-n\sup_{\lambda\in]0,+\infty[}(\lambda t - \psi_p(\lambda)))$$

Et par la question **1.10.** et décroissance de $y \mapsto e^{-ny}$

$$\exp(-n\sup_{\lambda\in]0,+\infty[}(\lambda t - \psi_p(\lambda))) \leq \exp\left(-n\frac{t^2}{2\left(p+\frac{t}{3}\right)}\right).$$

On obtient donc bien

$$\boxed{\mathbb{P}\left(\left(\frac{X_n}{n} - p\right) \geq t\right) \leq e^{-n\frac{t^2}{2\left(p+\frac{t}{3}\right)}}}.$$

1.12. Conclure que

$$\boxed{\mathbb{P}\left(\left|\frac{X_n}{n} - p\right| \geq t\right) \leq e^{-n\frac{t^2}{2\left(p+\frac{t}{3}\right)}} + e^{-n\frac{t^2}{2\left((1-p)+\frac{t}{3}\right)}}}.$$

On sait que

$$\mathbb{P}\left(\left(\frac{X_n}{n}-p\right)\geq t\right)\leq e^{-n\frac{t^2}{2\left(p+\frac{t}{3}\right)}}$$

De plus

$$\begin{aligned}\left(\frac{X_n}{n}-p\leq -t\right)&\Leftrightarrow\left(-\frac{X_n}{n}+p\geq t\right)\\&\Leftrightarrow\left(\frac{n-X_n}{n}-(1-p)\geq t\right)\end{aligned}$$

Or pour tout $k\in[\![0,n]\!]$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(n-X_n=k\right)&=\mathbb{P}(X_n=n-k)\\&=\binom{n}{n-k}p^{n-k}(1-p)^{n-(n-k)}\\&=\binom{n}{k}(1-p)^k(1-(1-p))^{n-k}\end{aligned}$$

c'est à dire que $n-X_n$ suit une loi binomiale de paramètre n et $1-p$.
Par conséquent en appliquant la question précédente à $n-X_n$ on a

$$\mathbb{P}\left(\frac{X_n}{n}-p\leq -t\right)=\mathbb{P}\left(\frac{n-X_n}{n}-(1-p)\geq t\right)\leq e^{-n\frac{t^2}{2\left((1-p)+\frac{t}{3}\right)}}$$

et comme, par probabilité d'une union-disjointe

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{X_n}{n}-p\right|\geq t\right)=\mathbb{P}\left(\left(\frac{X_n}{n}-p\right)\geq t\right)+\mathbb{P}\left(\frac{X_n}{n}-p\leq -t\right)$$

on obtient bien

$$\boxed{\mathbb{P}\left(\left|\frac{X_n}{n}-p\right|\geq t\right)\leq e^{-n\frac{t^2}{2\left(p+\frac{t}{3}\right)}}+e^{-n\frac{t^2}{2\left((1-p)+\frac{t}{3}\right)}}}.$$

1.13. Comparer brièvement les inégalité obtenues aux questions **1.2.** et **1.12.**.

Lorsque $n\to+\infty$ on a pour tout $c>0$, $e^{-cn}=o_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)$ et donc la seconde inégalité est bien plus précise que la première.