On portera une attention particulière à **la rédaction** et à **la propreté** de la copie.
En particulier tout **graphe ou schéma** pertinent et correctement annoté sera **valorisé**.
Les résultats devront être mis en valeur dès que possible.

Indiquez sur votre copie le temps approximatif pris pour le devoir.

---

1. Quatres démonstrations d'un cas particulier de Cauchy-Schwarz

1.I. Variation de la norme selon une droite

Soient $n \in \mathbb{N}$, $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ et $(b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ deux familles de n réels.
On définit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$f : \begin{array}{c} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (a_k + t b_k)^2 \end{array}$$

1.1. Expliquer pourquoi,

$$\text{pour tout } t \in \mathbb{R},\ f(t) \geq 0.$$

1.2. Déterminer $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tels que

$$\text{pour tout } t \in \mathbb{R},\ f(t) = \alpha t^2 + \beta t + \gamma.$$

1.3. En déduire que

$$\left| \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (a_k)^2} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (b_k)^2}$$

1.II. Optimisation d'une inégalité locale

Soient $n \in \mathbb{N}$, $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ et $(b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ deux familles de n réels.

1.4. Montrer que pour tout $\eta > 0$,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq \eta \sum_{k=1}^{n} (a_k)^2 + \frac{1}{4\eta} \sum_{k=1}^{n} (b_k)^2$$

1.5. Soit $(A, B) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$.
Montrer que la fonction

$$\begin{array}{c} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+ \\ \eta \mapsto A\eta + \dfrac{1}{\eta} B \end{array}$$

admet un minimum sur $\mathbb{R}_+^*$ et le déterminer.

1.6. En déduire que

$$\left| \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (a_k)^2} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (b_k)^2}$$

1.III. Par normalisation

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ et $(b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ deux familles de n réels.
Erreur d'énoncé: On suppose de plus que les deux familles sont non identiquement nulles c'est à dire $(a_1, \dots, a_n) \neq (0, \dots, 0)$ *et* $(b_1, \dots, b_n) \neq (0, \dots, 0)$.
On pose

$$A = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}, \quad B = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}. \quad .$$

Ainsi $A \neq 0$ *et* $B \neq 0$.
1.7. Montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{a_k}{A} - \frac{b_k}{B} \right)^2 \geq 0.$$

1.8. En déduire que

$$\left| \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (a_k)^2} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (b_k)^2}.$$

1.9. Commenter le lien entre la question **1.7.** et l'exercice 1.I.

1.IV. Par calcul de somme double

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ et $(b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ deux familles de n réels.
1.10. Montrer que

$$\left(\sum_{k=1}^{n} {a_k}^2 \right) \left(\sum_{k=1}^{n} {b_k}^2 \right) = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \right)^2 + \sum_{j=2}^{n} \left(\sum_{i=1}^{j-1} (a_i b_j - a_j b_i)^2 \right).$$

1.11. En déduire que

$$\left| \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (a_k)^2} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (b_k)^2}.$$

1.12. Commenter géométriquement l'égalité précédente dans le cas $n = 2$.